# Obóz przygotowawczy do Olimpiady Matematycznej

**Bielsko-Biała, 29 stycznia – 4 lutego 2018**

Obóz Przygotowawczy do Olimpiady Matematycznej
Bielsko-Biała, 29 stycznia – 4 lutego 2018

Szkolne Schronisko Młodzieżowe im. Bolka i Lolka w Bielsku - Białej
ul. Starobielska 10
43-300 Bielsko-Biała

Skład tekstu:

Dominik Burek

# Treści zadań

## Zawody indywidualne grupy $\mathbb{A}$

**1.** Zbiór $\mathcal{S}$ liczb całkowitych nazwiemy *fajnym* jeśli dla dowolnych trzech różnych liczb $a, b, c$ ze zbioru $\mathcal{S}$ zachodzą podzielności

$$a \mid bc, \quad b \mid ca \ \text{ oraz } c \mid ab.$$

Pokazać, że istnieje zbiór fajny złożony z 2018 względnie pierwszych liczb całkowitych.

**2.** Dana jest liczba całkowita dodatnia $n$ oraz liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pokazać, że istnieją $m, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takie, że

$$\left|\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{i=m+1}^{n} a_i\right| \leqslant |a_k|.$$

**3.** Okrąg wpisany w trójkąt $ABC$ ($AB < AC$) jest styczny do boków $BC$, $CA$ i $AB$ w punktach odpowiednio $D$, $E$ i $F$. Punkt $S$ jest środkiem łuku $BAC$ okręgu $\omega$ opisanego na trójkącie $ABC$. Prosta $SD$ przecina $\omega$ w punkcie $P$. Prosta $AP$ przecina odcinek $EF$ w punkcie $Q$. Pokazać, że $QD \perp EF$.

**4.** Dany jest okrąg $\omega$ środku w punkcie $O$. Odcinek $AB$ jest cięciwą tego okręgu i nie jest jego średnicą. Cięciwa $AC$ tego okręgu przechodzi przez środek odcinka $OB$. Proste $OC$ i $AB$ przecinają się w punkcie $P$, zaś proste $OA$ i $BC$ przecinają się w punkcie $Q$. Dowieść, że $PC = AQ$.

**5.** Dane są liczby rzeczywiste dodatnie $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pokazać, że istnieją $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{-1, 1\}$ takie, że

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_nx_n^2 \geqslant (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n)^2.$$

**6.** W rzędzie danych jest kilka liczb całkowitych dodatnich. *Operacją* nazwiemy wybór sąsiednich liczb $x$ i $y$ przy czym $x$ leży na lewo od $y$ oraz $x > y$ i zamianę pary $(x, y)$ na $(y + 1, x)$ lub $(x - 1, x)$. Pokazać, że można wykonać jedynie skończenie wiele operacji.

**7.** Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takie, że dla dowolnych liczby rzeczywistych dodatnich $x, y$ zachodzi równość

$$(x+y)f(f(x)y) = x^2 f(f(x) + f(y)).$$

**8.** Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $a > 1$, $b > 1$ takie, że $a \mid b+1$ oraz $b \mid a^3 - 1$.

**9.** Niech $M$ będzie środkiem łuku $BC$ (niezawierającego punktu $A$) okręgu $\omega$ opisanego na trójkącie $ABC$ o środku w punkcie $O$. Wysokość trójkąta $ABC$ opuszczona z wierzchołka $A$ przecina $\omega$ w $N$. Proste przechodzące przez $O$ i równoległe do $MB$ i $MC$ przecinają $AB$ i $AC$ w punktach $K$ i $L$, w tej kolejności. Pokazać, że $NK = NL$.

**10.** Wyznaczyć wszystkie wielomiany $P(x)$ o współczynnikach rzeczywistych takie, że równość

$$xP\left(\frac{y}{x}\right) + yP\left(\frac{x}{y}\right) = x + y$$

zachodzi dla dowolnych niezerowych liczb rzeczywistych $x$ i $y$.

**11.** W trapezie $ABCD$, suma długości podstaw $AB$ i $CD$ jest równa przekątnej $BD$. Niech $M$ będzie środkiem odcinka $BC$, i niech $E$ będzie obrazem punktu $C$ w symetrii względem prostej $DM$. Pokazać, że $\sphericalangle AEB = \sphericalangle ACD$.

**12.** Wyznaczyć wszystkie takie trójki liczb naturalnych $(k, m, n)$, że trzy ściany prostopadłościanu $k \times m \times n$ o wspólnym wierzchołku można okleić niezachodzącymi na siebie prostokątami $3 \times 1$. Prostokąty mogą być zaginane na krawędziach prostopadłościanu.

## Zawody indywidualne grupy $\mathbb{B}$

**1.** Dana jest liczba całkowita dodatnia $n$ oraz liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pokazać, że istnieją $m, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takie, że

$$\left|\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{i=m+1}^{n} a_i\right| \leqslant |a_k|.$$

**2.** Okrąg wpisany w trójkąt $ABC$ ($AB < AC$) jest styczny do boków $BC$, $CA$ i $AB$ w punktach odpowiednio $D$, $E$ i $F$. Punkt $S$ jest środkiem łuku $BAC$ okręgu $\omega$ opisanego na trójkącie $ABC$. Prosta $SD$ przecina $\omega$ w punkcie $P$. Prosta $AP$ przecina odcinek $EF$ w punkcie $Q$. Pokazać, że $QD \perp EF$.

**3.** Dana jest nieskończona rodzina zbiorów 3-elementowych. Udowodnić, że jeżeli każde dwa z tych zbiorów mają niepustą cześć wspólną, to istnieje taki zbiór 2-elementowy, który ma niepustą część wspólną z każdym zbiorem z tej rodziny.

**4.** Dane są liczby rzeczywiste dodatnie $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pokazać, że istnieją $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{-1, 1\}$ takie, że

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_nx_n^2 \geqslant (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n)^2.$$

**5.** Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ takie, że dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi $f(mn) = f(m)f(n)$ oraz $m + n \mid f(m) + f(n)$.

**6.** Dany jest trójkąt ostrokątny $ABC$, w którym $AB \neq AC$. Okrąg o środku $J$ jest styczny w punkcie $E$ do odcinka $BC$ oraz jest styczny do przedłużeń boków $AB$ i $AC$. Odcinki $BC$ i $AJ$ przecinają się w punkcie $D$. Okręgi opisane na trójkątach $ABC$ i $ADE$ przecinają się w punkcie $F$ różnym od $A$. Udowodnić, że $\sphericalangle AFJ = 90^\circ$.

**7.** Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $a > 1$, $b > 1$ takie, że $a \mid b + 1$ oraz $b \mid a^3 - 1$.

**8.** Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że następujący zbiór

$$\left\{\frac{f(x)}{x} : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}$$

jest skończony oraz dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$f(x - 1 - f(x)) = f(x) - x - 1.$$

**9.** Wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$, nie będącego trapezem, leży taki punkt $X$, że $\sphericalangle ADX = \sphericalangle BCX$, $\sphericalangle DAX = \sphericalangle CBX$ i wszystkie te kąty są ostre, oraz taki punkt $Y$, że $AY = BY$ i $CY = DY$. Dowieść, że $\sphericalangle AYB = 2 \cdot \sphericalangle ADX$.

**10.** W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątna $AC$ jest dwusieczną kąta $BAD$. Ponadto $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ACB$. Punkty $X$ i $Y$ są rzutami prostokątnymi punktu $A$ na $BC$ i $CD$, odpowiednio. Pokazać, że ortocentrum trójkąta $AXY$ leży na prostej $BD$.

**11.** Wyznaczyć wszystkie takie trójki liczb naturalnych $(k, m, n)$, że trzy ściany prostopadłościanu $k \times m \times n$ o wspólnym wierzchołku można okleić niezachodzącymi na siebie prostokątami $3 \times 1$. Prostokąty mogą być zaginane na krawędziach prostopadłościanu.

**12.** Dowieść, że każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych jest różnicą dwóch wielomianów rosnących.

## Zawody indywidualne grupy $\mathbb{C}$

**1.** Okrąg wpisany w trójkąt $ABC$ ($AB < AC$) jest styczny do boków $BC$, $CA$ i $AB$ w punktach odpowiednio $D$, $E$ i $F$. Punkt $S$ jest środkiem łuku $BAC$ okręgu $\omega$ opisanego na trójkącie $ABC$. Prosta $SD$ przecina $\omega$ w punkcie $P$. Prosta $AP$ przecina odcinek $EF$ w punkcie $Q$. Pokazać, że $QD \perp EF$.

**2.** Liczbę naturalną nazwijmy *dobrą* jeśli jest postaci $n^2 + 1$ dla pewnej liczby całkowitej $n$. Pokazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb dobrych $k$, które nie posiadają dzielnika dobrego różnego od 1 i $k$.

**3.** Czy istnieje na płaszczyźnie konfiguracja 22 okręgów i 22 punktów leżących na tych okręgach, że na dowolnym okręgu leży co najmniej siedem punktów i dowolny punkt leży na co najmniej siedmiu okręgach?

**4.** Dane są liczby rzeczywiste dodatnie $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pokazać, że istnieją $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{-1, 1\}$ takie, że

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_nx_n^2 \geqslant (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n)^2.$$

**5.** Punkty $O$ i $H$ są odpowiednio środkiem okręgu opisanego i ortocentrum w trójkącie $ABC$. Punkt $P$ jest obrazem punktu $A$ względem prostej $OH$. Załóżmy, że $A$ i $P$ leży po przeciwnych stronach prostej $BC$. Punkty $E, F$ leżą na $AB, AC$ odpowiednio tak, że $BE = PC$ oraz $CF = PB$. Niech prosta $AP$ przecina $OH$ w punkcie $K$. Pokazać, że $\sphericalangle EKF = 90°$.

**6.** Niech $h \geqslant 3$ będzie liczbą całkowitą a $X$ zbiorem wszystkich liczb całkowitych nie mniejszych niż $2h$. Niech $S$ będzie niepustym podzbiorem $X$ takim, że

1. jeśli $a \geqslant h, b \geqslant h$ oraz $a + b \in S$, to $ab \in S$,
2. jeśli $a \geqslant h, b \geqslant h$ oraz $ab \in S$, to $a + b \in S$.

Pokazać, że $S = X$.

**7.** Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że następujący zbiór

$$\left\{ \frac{f(x)}{x} : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$

jest skończony oraz dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$f(x - 1 - f(x)) = f(x) - x - 1.$$

**8.** Funkcja $f$ prowadząca ze zbioru punktów przestrzeni trójwymiarowej $\mathbb{R}^3$ w ten sam zbiór spełnia warunki:

- dla dowolnych dwóch punktów $A, B \in \mathbb{R}^3$ odległość pomiędzy punktami $f(A)$ i $f(B)$ jest równa odległości pomiędzy $A$ i $B$,
- istnieje taka liczba naturalna $n$, że dla dowolnego punktu $A$ spełniony jest warunek $f^{(n)}(A) = A$ (gdzie $f^{(n)}$ oznacza $n$-krotne złożenie funkcji $f$)

Wykazać, że istnieje punkt $A \in \mathbb{R}^3$ taki, że $f(A) = A$.

**9.** Okrąg o środku w punkcie $I$ jest styczny do boku $BC$ nierównoramiennego trójkąta $ABC$ w punkcie $D$. Punkt $X$ leży na łuku $BC$ (niezwierającego punktu $A$) okręgu opisanego na trójkącie $ABC$. Punkty $E$ i $F$ są rzutami punktu $X$ na proste $BI$ i $CI$, odpowiednio. Punkt $M$ jest środkiem odcinka $EF$. Pokazać, że jeśli $MB = MC$, to $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAX$.

**10.** Okrąg o środku w punkcie $I$ jest wpisany w czworokąt $ABCD$. Punkty $M$ i $N$ leżą na odcinkach $AI$ i $CI$, odpowiednio, przy czym $\sphericalangle MBN = \frac{1}{2}\sphericalangle ABC$. Pokazać, że $\sphericalangle MDN = \frac{1}{2}\sphericalangle ADC$.

**11.** Dana jest liczba bezkwadratowa parzysta $n$ oraz liczba pierwsza $p$ względnie pierwsza z $n$ taka, że $p \leqslant 2\sqrt{n}$ oraz istnieje całkowita liczba $k$ taka, że $p \mid n + k^2$. Pokazać, że istnieją parami różne liczby całkowite dodatnie $a$, $b$, $c$ takie, że $n = ab + bc + ca$.

**12.** Pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej $n$ istnieje dokładnie jeden wielomian $f$ stopnia $n$ taki, że $f(0) = 1$ oraz funkcja $(x + 1)f(x)^2 - 1$ jest funkcją nieparzystą.

# Mecz matematyczny grupy $\mathbb{A}$

**1.** Udowodnij, że w rozwinięciu dziesiętnym liczby $(5+\sqrt{26})^{2018}$, na pierwszych 2018 miejscach po przecinku nie występuje cyfra 7.

**2.** Niech $a, b, x, y, z$ będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi takimi, że $a + b = 3$ oraz $xyz = 1$. Udowodnij że $(ax + b)(ay + b)(az + b) \geqslant 27$.

**3.** Niech $n$ będzie liczbą całkowitą dodatnią. Udowodnić, że istnieją liczby całkowite dodatnie $a$ i $b$, takie, że

$$a^2 + a + 1 = (n^2 + n + 1)(b^2 + b + 1).$$

**4.** Dla liczby całkowitej dodatnie $a$, definiujemy liczbę $M(a)$ jako liczbę takich liczb całkowitych dodatnich $b$, że $a + b \mid ab$. Znajdź wszystkie $1 \leqslant a \leqslant 2018$ dla których zachodzi $M(a) \geqslant M(b)$ dla każdego $1 \leqslant b \leqslant 2018$.

**5.** Niech $a, b, c$ będą takimi liczbami rzeczywistymi dodatnimi, że $\min(ab, bc, ca) \geqslant 1$. Pokazać, że

$$\sqrt[3]{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)} \leqslant \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 + 1.$$

**6.** Znajdź wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takie, że

$$f(x - f(y)) = f(f(x)) - f(y) - 1$$

dla dowolnych liczb całkowitych $x, y$.

**7.** Dane jest $n$ państw. Niech *współczynnik ankapizacji* danego państwa to liczba całkowita z przedziału $[0, N)$. Granice między państwami mają swoją szczelność określoną liczbą rzeczywistą. Ze względu na naturę anarchokapitalizmu, jeżeli w jednym z dwóch graniczących ze sobą państw *współczynnik ankapizacji* jest większy od szczelności granicy między nimi, to te współczynniki obu tych państw są sobie równe. Liczba sposobów ankapizacji to liczba możliwych przyporządkowań *współczynników ankapizacji* do państw, żeby warunek był zachowany. Wykazać, że dla każdej grupy państw istnieje inna możliwa grupa państw, w której każde państwo ma co najwyżej dwóch sąsiadów, i liczba sposobów ankapizacji jest taka sama.

. Wzmocniona teza brzmi wtedy, że dla każdej pary $G$ istnieje graf $G$ taki, że liczba dobrych funkcji dla $G$ jest taka sama, jak liczba dobrych funkcji dla $G'$, i $G'$ jest ścieżką.

Pokażemy rekurencyjną konstrukcję $G'$ wraz z bijekcją ze zbioru dobrych funkcji do $G$ na zbiór dobrych funkcji do $G'$. Gdy graf ma tylko jeden wierzchołek, $G' = G$ oczywiście działa. Załóżmy, że $G = (V, E, s)$ ma więcej niż jeden wierzchołek i jest spójny (gdy nie jest spójny, możemy wykonać konstrukcję na każdej ze spójnych składowych osobno, a potem połączyć je krawędziami o szczelności $N$). Niech $x$ to największa taka liczba całkowita, że graf $H = (V, \{e \in E : s(e) < x\}, s)$ (to jest, graf $G$ z wyrzuconymi krawędziami o szczelności większej lub równej $x$) nie jest spójny, i niech jego spójne składowe to $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Niech $A_i'$ to graf utworzony w wyniku tej rekurencyjnej konstrukcji dla $A_i$ i $N := x + 1$ (konstrukcja istnieje, bo $A_i$ jest mniejsze od $G$). Wtedy graf $G'$ będzie grafem utworzonym z połączenia ścieżek $A_1', A_2', \ldots, A_k'$ krawędziami o szczelności $x$ w jedną ścieżkę. Pokażemy teraz, że istnieje bijekcja między dobrymi funkcjami dla $G$ a dobrymi funkcjami dla $G'$. Rozważmy dobrą funkcję $f$ dla $G$. Może zachodzić przypadek, że $\exists_{v \in V} f(v) > x$, z czego wynikałoby, że $f$ jest funkcją stałą (ponieważ $H$ byłoby spójne, gdybyśmy wzięli krawędzie o szczelności mniejszej lub równej $x$), więc w bijekcji ona odpowiada funkcji stałej dla $G'$ o tej samej wartości. W przeciwnym wypadku $\forall_{v \in V} f(v) \leqslant x$, czyli możemy $f$ rozpatrywać osobno w każdym $A_i$, zastosować bijekcję dla nich rekurencyjnie, i otrzymać dobrą funkcję dla grafu $G'$. Analogiczne rozumowanie możemy przeprowadzić w drugą stronę.

Pokazaliśmy zatem dla każdego grafu, że istnieje ścieżka, na której liczba dobrych funkcji jest taka sama, co było do udowodnienia. $\square$

**8.** Dana jest $n$-wymiarowa szachownica o wymiarach $k \times k \times \ldots \times k$. Na niektórych jej polach stoją wieże. Mówimy, że dwie wieże się biją, gdy stoją na polach, które mają wspólną pewną współrzędną. Udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej nieujemnej $s$, spośród $sk^{n-1} + 1$ wież na szachownicy można wybrać $s + 1$, z których żadne dwie się nie biją.

**9.** Dana jest szachownica $n \times n$. Dominik i jego Burek grają w grę. Zaczyna Dominik. Na początku na każdym polu szachownicy jest 99 kamieni. W każdym ruchu gracz wybiera wiersz lub kolumnę i usuwa kamień z każdego pola w tym wierszu lub kolumnie. Gracz może wybrać daną kolumnę lub wiersz wtedy, gdy na każdym polu w tej kolumnie lub wierszu jest przynajmniej jeden kamień. Gracz przegrywa gdy nie może wykonać ruchu. Wyznacz wszystkie liczby $n$, dla których Dominik ma strategię wygrywającą.

**10.** Dany jest trójkąt $ABC$. Punkty $I$ i $J$ są środkami okręgów wpisanego i dopisanego do boku $BC$ w tym trójkącie. Dwusieczna kąta $BAC$ przecina okrąg opisany na trójkącie $ABC$ po raz drugi w punkcie $M$. Punkt $L$ jest środkiem łuku $ABM$. Proste $NJ$ i $NI$ przecinają okrąg opisany na trójkącie $ABC$ odpowiednio w punktach $S$ i $T$, różnych od $N$. Wykazać, że proste $ST$, $BC$ i $IJ$ przecinają się w jednym punkcie.

**11.** Okrąg $\omega$ jest wpisany w trójkąt $ABC$. Punkty $D$ i $E$ są punktami styczności okręgu $\omega$ odpowiednio z bokami $BC$ i $CA$. Okrąg $\tau$ przechodzi przez punkty $B$ i $C$ i jest styczny do $\omega$ w punkcie $X$. Niech $M$ będzie środkiem odcinka $DE$. Wykazać, że punkty $B$, $X$, $M$ i $D$ leżą na jednym okręgu.

**12.** Dany jest równoległobok $ABCD$ i punkty $A_1$ i $C_1$ odpowiednio na bokach $AB$ i $BC$. Proste $AC_1$ i $CA_1$ przecinają się w punkcie $P$. Załóżmy, że okręgi opisane na trójkątach $AA_1P$ i $CC_1P$ przecinają się w punkcie $Q \neq P$, leżącym wewnątrz trójkąta $ABD$. Udowodnij, że $\sphericalangle PDA = \sphericalangle QBA$.

## Mecz matematyczny grupy $\mathbb{B}$

**1.** Dane są liczby całkowite dodatnie $a$, $b$, $c$, dla których liczba $a^2 - bc$ jest kwadratem liczby całkowitej. Wykazać, że liczba $2a + b + c$ jest złożona.

**2.** Udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej $n$ liczba

$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor + \lfloor \sqrt{n} \rfloor$$

jest parzysta.

**3.** Wyznaczyć wszystkie ciągi arytmetyczne $a_1, a_2, \ldots$ dla których istnieje liczba naturalna $N > 1$ taka, że dla dowolnej liczby naturalnej $k$ zachodzi podzielność

$$a_1 a_2 \ldots a_k \mid a_{N+1} a_{N+2} \ldots a_{N+k}.$$

**4.** Udowodnić, że dla liczb dodatnich $a, b, c, d > 0$ prawdziwa jest nierówność

$$(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)(1+\sqrt[4]{abcd})^4 \geqslant 16abcd(1+a)(1+b)(1+c)(1+d).$$

**5.** Dany jest ciąg liczb całkowitych $\{a_n\}_{n \geqslant 0}$ taki, że $a_0 = 1, a_1 = 3$ oraz

$$a_{n+2} = 1 + \left\lfloor \frac{a_{n+1}^2}{a_n} \right\rfloor \quad \text{dla } n \geqslant 0.$$

W zależności od $n$, obliczyć wartość wyrażenia $a_n \cdot a_{n+2} - a_{n+1}^2$.

**6.** Wyznaczyć wszystkie pary wielomianów $(P(x), Q(x))$ o współczynnikach rzeczywistych, które dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ spełniają warunek

$$P(x)Q(x+1) - P(x+1)Q(x) = 1.$$

**7.** Dany jest skończony zbiór osób $\mathcal{S}$ o następującej własności: dowolne dwie osoby o tej samej liczbie znajomych w $\mathcal{S}$ nie mają wspólnych znajomych w $\mathcal{S}$. Udowodnić, że jeżeli w $\mathcal{S}$ istnieje osoba, która ma przynajmniej jednego znajomego, to w $\mathcal{S}$ istnieje również osoba, która posiada dokładnie jednego znajomego.

**8.** W wierzchołkach grafu skończonego bez pętli i krawędzi wielokrotnych umieszczono lampy. Ruch polega na tym, że wybieramy lampę, a następnie zmieniamy stan tej lampy oraz wszystkich lamp sąsiednich, tj. zapalamy zgaszone i gasimy zapalone. Na początku wszystkie lampy są zgaszone. Rozstrzygnąć w zależności od grafu, czy można je wszystkie zapalić za pomocą skończonej liczby ruchów.

**9.** Dany jest zbiór $n \geqslant 3$ punktów płaszczyzny $\mathcal{F}$, z których żadne dwa nie są współliniowe. Wykazać, że istnieje taki zbiór $\mathcal{T}$ składający się z $2n-5$ punktów płaszczyzny, że każdy trójkąt wyznaczony przez 3 różne punkty zbioru $\mathcal{F}$ zawiera punkt ze zbioru $\mathcal{T}$.

**10.** Niech $E$ będzie sumą mnogościową pewnej skończonej liczby kół otwartych na płaszczyźnie. Udowodnić, że wśród tych kół istnieją parami rozłączne koła $K_1, K_2, \ldots, K_n$ takie, że

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{n} 3K_i,$$

gdzie dla koła $K$ otwartego o środku $S$ i promieniu $r$, przez $3K$ oznaczamy koło otwarte o środku $S$ i promieniu $3r$.

**11.** Punkty $M$ i $N$ leżą na boku $BC$ trójkąta $ABC$, przy czym punkt $M$ leży na odcinku $BN$ tak, że $BM = CN$. Punkty $P$ i $Q$ leżą na odcinkach $AN$ i $AM$, odpowiednio, oraz spełnione są równości $\sphericalangle PMC = \sphericalangle MAB$ i $\sphericalangle QNB = \sphericalangle NAC$. Pokazać, że $\sphericalangle QBC = \sphericalangle PCB$.

**12.** Punkt $M$ jest środkiem odcinka boku $BC$ trójkąta $ABC$ wpisanego w okrąg $\Omega$. Punkty $E$ i $F$ leżą na bokach $CA$ i $AB$, odpowiednio, przy czym $ME = MF$. Styczne w punktach $E$ i $F$ do okręgu $\Gamma$ opisanego na trójkącie $AEF$ przecinają się w punkcie $S$. Okręgi $\Omega$ i $\Gamma$ przecinają się w punkcie $G \neq A$. Pokazać, że $\sphericalangle AGS = 90°$.

# Sprzężenie izogonalne

*Natalia Kucharczuk*

## Wprowadzenie

**Definicja** *Proste $PX$ oraz $PY$ są izogonalnie sprzężone w kącie $APB$ wtedy i tylko wtedy, gdy odbiciem symetrycznym prostej $PX$ względem dwusiecznej kąta $APB$ jest prosta $PY$*

**Fakt 1.** Niech $H$ oraz $O$ będą odpowiednio ortocentrum i środkiem okręgu opisanego na $\triangle ABC$. Wówczas proste $AH$ oraz $AO$ są izogonalnie sprzężone w kącie $BAC$.

*Dowód.* Musimy pokazać, że $\sphericalangle HAB = \sphericalangle OAC$. Oczywiście $\triangle OAC$ jest równoramienny, skąd $\sphericalangle OAC = \sphericalangle OCA \implies AOC = 180° - 2\sphericalangle OAC$. Z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym: $\sphericalangle ABC = \frac{1}{2}\sphericalangle AOC = 90° - \sphericalangle OAC \implies HAB = 90° - \sphericalangle ABC = \sphericalangle OAC$. □

**Fakt 2.** Niech $X$ i $Y$ będą punktami leżącymi wewnątrz (bądź na zewnątrz) pewnego kąta o wierzchołku $P$, zaś niech $A,\ B$ oraz $C,\ D$ będą rzutami punktów odpowiednio $X$ i $Y$ na ramiona tego kąta. Wówczas następujące trzy warunki są równoważne:

1. proste $PX$ i $PY$ są izogonalnie sprzężone w kącie $APB$
2. $PY \perp AB, PX \perp CD$
3. na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg, którego środkiem jest środek odcinka $XY$.

*Dowód.* 1. $\iff$ 2. Zauważmy, że $PX$ jest średnicą okręgu opisanego na $PAXB$, więc z faktu 1. to, że $PX$ oraz $PY$ są izogonalnie sprzężone jest równoważne temu, że $PY$ jest wysokością w $\triangle PAB$, czyli $PY \perp AB$. Analogicznie jest to równoważne temu, że $PX \perp CD$.

1. $\iff$ 3. Rozważmy przekształcenie $\phi$ będące złożeniem jednokładności o środku w $P$ i symetrii względem dwusiecznej kąta $APD$ przekształcające $A$ na $D$ (dla ustalenia uwagi zakładamy, że $A,\ D$ leżą na różnych ramionach kąta). Wówczas warunek 1. równoważny jest temu, że $\phi$ przekształca $X$ na $Y$ oraz $B$ na $C$. To zaś równoważne jest temu, że $\sphericalangle BAP = \sphericalangle CDP$ czyli cykliczności czworokąta $ABDC$ (oczywiście dowód ten można przeprowadzić licząc jedynie poszczególne kąty, jednak wymaga to rozpatrywania szczególnych konfiguracji, zatem pozostawiam go dla czytelnika).

Oczywiście środek okręgu opisanego na tym czworokącie leży na przecięciu symetralnych $AC$ i $BD$, które z tw. Talesa przecinają się w środku odcinka $XY$. $\square$

**Definicja** *Punktem izogonalnie sprzężonym do punktu $P$ względem $\triangle ABC$ nazywamy taki punkt $P'$, że proste $AP$, $AP'$ są izogonalnie sprzężone w kącie $BAC$; proste $BP$, $BP'$ są izogonalnie sprzężone w kącie $ABC$; proste $CP$, $CP'$ są izogonalnie sprzężone w kącie $ACB$.*

**Fakt 3.** Dla dowolnego punktu $P$ nie leżącego na prostych zawierających boki $\triangle ABC$ istnieje punkt sprzężony do niego izogonalnie względem tego trójkąta.

*Dowód.* Niech $Q$ będzie takim punktem, że $P$ i $Q$ są izogonalnie sprzężone w kątach $BAC$ oraz $ABC$, zaś $N$ będzie środkiem $PQ$ (oczywiście taki punkt istnieje). Musimy zatem udowodnić, że $Q$ jest też izogonalnie sprzężony w kącie $ACB$.

Niech $A_1$, $B_1$ i $C_1$ będą rzutami $P$ odpowiednio na $BC$, $AC$ i $AB$. Analogicznie dla punktu $Q$ definiujemy $A_2$, $B_2$ i $C_2$. Z faktu 2. punkty $B_1$, $B_2$, $C_1$ i $C_2$ leżą na okręgu o środku w $N$. Podobnie $A_1$, $A_2$, $C_1$ i $C_2$ leżą na okręgu o środku w $N$. Jest tylko jeden okrąg o środku $N$ przechodzący przez punkty $C_1$ i $C_2$, zatem wszystkie 6 rzutów leży na jednym okręgu. Wówczas, ponownie na mocy faktu 2., otrzymujemy, że $P$ i $Q$ są izogonalnie sprzężone w kącie $ACB$. $\square$

**Fakt 4.** Rzuty punktów izogonalnie sprzężonych w trójkącie na jego boki są współokręgowe.

*Dowód.* Fakt ten wynika bezpośrednio z dowodu faktu 3. $\square$

*Uwaga.* Zauważmy, że z powyższych faktów wynika nam, że rzuty $H$ i $O$ na boki $\triangle ABC$ są współokręgowe, ponadto środek tego okręgu jest środkiem $OH$. Fakt ten jest często przydatny w zadaniach, a okrąg ten nazywany jest okręgiem dziewięciu punktów, okręgiem Feurebacha, bądź też okręgiem Eulera.

**Fakt 5.** W $\triangle ABC$ punkty $P$ i $Q$ leżą na odcinku $BC$. Wówczas $AP$ i $AQ$ są izogonalnie sprzężone w kącie BAC wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{BQ}{QC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$$

*Dowód.* Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że $P$ leży wewnątrz odcinka $BQ$. Prosta równoległa do $AC$ przechodząca przez $B$ przecina $AP$ i $AQ$ odpowiednio w punktach $X$ i $Y$. Wówczas $\triangle BPX \sim \triangle CPA \Longrightarrow \frac{BP}{PC} = \frac{BX}{AC}$. Analogicznie $\frac{BQ}{QC} = \frac{BY}{AC}$. Zatem $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{BQ}{QC} = \frac{BY \cdot BX}{AC^2}$. Musimy więc udowodnić, że $AP$ i $AQ$ są izogonalnie sprzężone wtedy i tylko wtedy, gdy $BY \cdot BX = BA^2$. Jednak $BY \cdot BX = BA^2 \iff \sphericalangle BAX = \sphericalangle AYB = \sphericalangle YAC$. $\square$

# Zadania

**Zadanie 1.** *Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg. Niech $P := AC \cap BD$ oraz $Q := AD \cap BC$. Przez $P'$ oznaczmy odbicie $P$ względem środka $AB$. Wówczas proste $QP$ i $QP'$ są izogonalnie sprzężone w kącie $AQB$.*

*Dowód.* Rozpatrzmy konfiguracje w której punkt $D$ leży na odcinku $AQ$. Zauważmy, że czworokąt $PAP'B$ jest równoległobokiem, wiec $\sphericalangle P'BA = \sphericalangle CAB = \sphericalangle BDC$. Oczywiście mamy także: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle QDC$, co implikuje, że $\sphericalangle P'BQ = \sphericalangle PDQ$. Zauważmy teraz, że ponieważ $\triangle QDC \sim \triangle QAB$, zachodzi: $\frac{QD}{QB} = \frac{CD}{AB}$. Z definicji punktu $P'$ i potęgi punktu wiemy także, że $\frac{DP}{P'B} = \frac{DP}{AP} = \frac{PC}{PB}$. Z kolei z podobieństwa $\triangle PCD$ i $\triangle ABP$ otrzymujemy, że $\frac{PC}{PB} = \frac{CD}{AB}$ , zatem $\triangle QDP \sim \triangle QP'B$, co już implikuje tezę zadania. $\square$

**Zadanie 2.** *Dany jest $\triangle ABC$, w którym $AB = AC$. W jego wnętrzu leżą punkty $P$ i $Q$ takie, że $\sphericalangle ABP = \sphericalangle QCB$ oraz $\sphericalangle ACP = \sphericalangle CBQ$. Udowodnić, że punkty $A$, $P$, $Q$ są współliniowe.*

*Dowód.* Niech $P'$ będzie odbiciem $P$ względem dwusiecznej kąta $BAC$. Wówczas z równości kątów danych w treści zadania otrzymujemy, że $P'$ i $Q$ są izogonalnie sprzężone w $\triangle ABC$, skąd $\sphericalangle PAB = \sphericalangle P'AC = \sphericalangle QAB$, zatem $A$, $P$ i $Q$ leżą na jednej prostej. $\square$

**Zadanie 3.** *Punkty $A$ i $B$ leżą na okręgu $\omega$, zaś styczne do tego okręgu poprowadzone z tych punktów przecinają się w punkcie $P$. Niech $M$ będzie środkiem odcinka $AB$, zaś $X$ dowolnym punktem na $\omega$. Prosta $XM$ przecina $\omega$ po raz drugi w punkcie $Y$. Wówczas $PX$ i $PY$ są izogonalnie sprzężone w kącie $APB$.*

*Dowód.* Niech $O$ będzie środkiem $\omega$. Wówczas na $PAOB$ można opisać okrąg, skąd z potęgi punktu $MA \cdot MB = MP \cdot MO$. Ponadto z potęgi punktu $M$ względem $\omega$ otrzymujemy, że $MA \cdot MB = MX \cdot MY$. Zatem $MX \cdot MY = MP \cdot MO$, co oznacza, że na mocy potęgi punktu, punkty $X$, $O$, $Y$, $P$ są współokręgowe. Ponadto $XO = OY$, zatem $\sphericalangle XPO = \sphericalangle OPY$, skąd teza. $\square$

**Zadanie 4.** *Styczne poprowadzone z punktów $B$ i $C$ do $\bigcirc(ABC)$ przecinają się w punkcie $P$. Okrąg opisany na rzutach punktu $P$ na proste zawierające boki $\triangle ABC$ przecina $BC$ w punkcie $D$ różnym od tych rzutów. Niech $AA'$ będzie średnicą $\bigcirc(ABC)$. Wówczas $A'D \perp BC$.*

*Dowód.* Niech $Q$ będzie punktem izogonalnie sprzężonym do $P$ względem $\triangle ABC$. Wówczas, z prostego rachunku na kątach otrzymujemy, że $QC \parallel AB$. Zatem $BA' \perp AB \parallel QC \implies BA' \perp QC$. Analogicznie $CA' \perp BQ$. $A'$ jest więc ortocentrum $\triangle BQC$, skąd $QA' \perp BC$. Z faktu 4. punkt $D$ jest oczywiście rzutem $Q$ na $BC$, zatem $Q$, $A'$ i $D$ są współliniowe z czego wynika już teza zadania. $\square$

# Rozwiązania

## Zawody indywidualne grupy $\mathbb{A}$

**1.** Zbiór $\mathcal{S}$ liczb całkowitych nazwiemy *fajnym* jeśli dla dowolnych trzech różnych liczb $a, b, c$ ze zbioru $\mathcal{S}$ zachodzą podzielności

$$a \mid bc, \quad b \mid ca \text{ oraz } c \mid ab.$$

Pokazać, że istnieje zbiór fajny złożony z 2018 względnie pierwszych liczb całkowitych.

*Rozwiązanie:*

Niech $p_1, p_2, \ldots, p_{2018}$ będą różnymi liczbami pierwszymi. Wówczas zbiór $\{a_1, a_2, \ldots, a_{2018}\}$, gdzie

$$a_i = \frac{1}{p_i} \cdot p_1 p_2 \ldots p_{2018} \text{ dla } i \in \{1, 2, \ldots, 2018\}$$

spełnia warunki zadania. $\square$

**2.** Dana jest liczba całkowita dodatnia $n$ oraz liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pokazać, że istnieją $m, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takie, że

$$\left| \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{i=m+1}^{n} a_i \right| \leqslant |a_k|.$$

*Rozwiązanie:*

Niech $S_m := \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{i=m+1}^{n} a_i$ i $S_0 := -S_n$. Wtedy $S_m - 2a_m = S_{m-1}$. Rozpatrzmy ciąg $S_n, S_{n-1}, \ldots, S_1, S_0$. Bez szkody możemy założyć, że $S_n > 0$, Wówczas znajdujemy $i \geqslant 1$ takie, że $S_i \geqslant 0 \geqslant S_{i-1}$.

Przypuśćmy, że $S_i = |S_i| > |a_i|$ i $-S_{i-1} = |S_{i-1}| > |a_i|$. Ponieważ $S_i - 2a_i = S_{i-1}$, to $-S_i + 2a_i > |a_i|$, więc $2a_i > S_i + |a_i| > 2|a_i|$— co jest niemożliwe. $\square$

**3.** Okrąg wpisany w trójkąt $ABC$ ($AB < AC$) jest styczny do boków $BC$, $CA$ i $AB$ w punktach odpowiednio $D$, $E$ i $F$. Punkt $S$ jest środkiem łuku $BAC$ okręgu $\omega$ opisanego na trójkącie $ABC$. Prosta $SD$ przecina $\omega$ w punkcie $P$. Prosta $AP$ przecina odcinek $EF$ w punkcie $Q$. Pokazać, że $QD \perp EF$.

*Rozwiązanie:*

Niech $EF \cap BC = L$. Wówczas

$$\sphericalangle QPD = \sphericalangle APS = \sphericalangle ACS = \sphericalangle SCB - \sphericalangle ACB = \frac{B-C}{2}$$

oraz

$$\begin{aligned}\sphericalangle QLD &= \sphericalangle FLB = 180^\circ - \sphericalangle LFB - \sphericalangle LBF = \\ &= 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{A}{2}\right) - (180^\circ - B) = \frac{B-C}{2}.\end{aligned}$$

Wobec tego na czworokącie $FLPD$ można opisać okrąg. Ponieważ $PS$ połowi kąt $BPC$, oraz $(L, D; B, C) = 1$, to $\sphericalangle DPL = 90^\circ$. Z cykliczności czworokąta $FLPD$ uzyskujemy, że $QD \perp EF$. □

**4.** Dany jest okrąg $\omega$ środku w punkcie $O$. Odcinek $AB$ jest cięciwą tego okręgu i nie jest jego średnicą. Cięciwa $AC$ tego okręgu przechodzi przez środek odcinka $OB$. Proste $OC$ i $AB$ przecinają się w punkcie $P$, zaś proste $OA$ i $BC$ przecinają się w punkcie $Q$. Dowieść, że $PC = AQ$.

*Rozwiązanie:*

Niech $D$ będzie punktem symetrycznym do punktu $C$ względem środka $M$ odcinka $OB$. Czworokąt $OCBD$ jest wówczas równoległobokiem; w szczególności zachodzą równości $BD = CO = AO$. Korzystając teraz z równoległości $DB \parallel CP$, $DO \parallel CQ$ oraz z twierdzenia Talesa otrzymujemy

$$\frac{PC}{BD} = \frac{AC}{AD} \quad \text{oraz} \quad \frac{AQ}{AO} = \frac{AC}{AD}.$$

Stąd wynika równość stosunków $\dfrac{PC}{BD} = \dfrac{AQ}{AO}$, która w połączeniu z uzyskaną wcześniej zależnością $BD = AO$ daje tezę. □

**5.** Dane są liczby rzeczywiste dodatnie $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pokazać, że istnieją $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{-1, 1\}$ takie, że

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_n x_n^2 \geqslant (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n)^2.$$

*Rozwiązanie:*

Bez szkody załóżmy, że $x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_n$. Pokażemy indukcyjnie, że $a_1 = a_3 = \ldots = 1$ i $a_2 = a_4 = \ldots = -1$ spełniają warunki zadania.

Jeśli $n = 1$, to $a_1 = 1$, więc $a_1 x_1^2 = x_1^2 \geqslant (a_1 x_1)^2$. Jeśli $n = 2$, to $a_1 = 1 = -a_2$, więc

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \geqslant (x_1 - x_2)^2 = (a_1 x_2 + a_2 x_2)^2,$$

gdyż $x_1 \geqslant x_2$.

Weźmy teraz $n \geqslant 3$. Ustalmy $x_2, \ldots, x_n$ i zauważmy, że wyrażenie $a_1x_1^2 + \ldots + a_nx_n^2 - (a_1x_1 + \ldots + a_nx_n)^2$ jest funkcją liniową względem $x_1$. Rozpatrzmy współczynnik $A$ przy $x_1$ w powyższym wyrażeniu. Zauważmy, że $A = -2(a_2x_2 + \ldots + a_nx_n) = 2(x_2 - x_3 + x_4 - \ldots + (-1)^n x_n) \geqslant 0$, gdyż $x_2 \geqslant x_3 \geqslant \ldots \geqslant x_n$. Wobec tego $a_1x_1^2 + \ldots + a_nx_n^2 - (a_1x_1 + \ldots + a_nx_n)^2$ minimalizuje się, gdy $x_1 = x_2$. Jednakże, gdy $x_1 = x_2$, to $a_1 = 1 = -a_2$, więc nierówność z zadania jest równoważna następującej

$$a_3x_3^2 + \ldots + a_nx_n^2 \geqslant (a_3x_3 + \ldots + a_nx_n)^2,$$

która jest prawdziwa na mocy założenia indukcyjnego dla $n-2$ liczb. $\square$

**6.** W rzędzie danych jest kilka liczb całkowitych dodatnich. *Operacją* nazwiemy wybór sąsiednich liczb $x$ i $y$ przy czym $x$ leży na lewo od $y$ oraz $x > y$ i zamianę pary $(x, y)$ na $(y+1, x)$ lub $(x-1, x)$. Pokazać, że można wykonać jedynie skończenie wiele operacji.

*Rozwiązanie:*

Na początku zauważmy, że *operacja* nie zwiększa maksymalnej liczby w rzędzie. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą liczbami w rzędzie po pewnej ilości *operacji*. Rozważmy sumę

$$S = a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n.$$

Pokażemy, że $S$ zwiększa się o dodatnią liczbę całkowitą po wykonaniu *operacji*. Niech *operacja* zamienia parę $(a_i, a_{i+1})$ dla pewnego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ na $(X, a_i)$ gdzie $a_i > a_{i+1}$ oraz $X = a_{i+1} + 1$ lub $X = a_i - 1$. Nowa i stara wartość $S$ zmieniła się o

$$R = (iX + (i+1)a_i) - (ia_i + (i+1)a_{i+1}) = a_i - a_{i+1} + i(X - a_{i+1}).$$

Łatwo widzimy, że $R$ jest liczbą całkowitą dodatnią, gdyż $a_i - a_{i+1} \geqslant 1$ oraz $X - a_{i+1} \geqslant 0$.

Z drugiej strony

$$S \leqslant (1 + 2 + \ldots + n) \cdot \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \text{stała wartość}$$

a ponieważ po wykonaniu *operacji* $S$ się zwiększa, nie można więc wykonać nieskończenie wielu *operacji*. $\square$

**7.** Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takie, że dla dowolnych liczby rzeczywistych dodatnich $x, y$ zachodzi równość

$$(x+y)f(f(x)y) = x^2 f(f(x) + f(y)).$$

*Rozwiązanie:*

Niech $P(x,y)$ oznacza równość daną w zadaniu. Jeżeli $f(a)=f(b)$ dla pewnych $a,b\in\mathbb{R}^+$, to porównując $P(a,x)$ i $P(b,x)$ dostajemy, że

$$\frac{x+a}{a^2}=\frac{x+b}{b^2}$$

dla dowolnego $x>0$, więc $a=b$, skąd $f$ jest injekcją.

Rozpatrując teraz $P(\frac{3}{2},\frac{3}{4})$ dostajemy

$$f\left(\frac{3}{4}f\left(\frac{3}{2}\right)\right)=f\left(f\left(\frac{3}{2}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)\right).$$

Z injektywności $f$ mamy zatem, że

$$\frac{3}{4}f\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right),$$

więc $f(\frac{3}{4})+\frac{1}{4}f(\frac{3}{2})=0$, co jest niemożliwe, gdyż $f$ przyjmuje tylko wartości dodatnie. $\square$

**8.** Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $a>1$, $b>1$ takie, że $a\mid b+1$ oraz $b\mid a^3-1$.

*Rozwiązanie:*

Z podzielności wynika, że $b=ka-1$ oraz $a^3-1=\ell b=\ell ka-\ell$, dla pewnych $k$ i $\ell$. Zatem, $a\mid \ell-1$, więc $\ell=ma+1$ dla pewnego $m$. Wobec tego dostajemy równość

$$a^2-mka+m-k=0.$$

Wyróżnik powyższego równania kwadratowego jest równy

$$\Delta=m^2k^2-4m+4k.$$

Jeśli $m<k$, to $(mk)^2<\Delta$. Ponadto $\Delta<(mk+2)^2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(m-1)(k+1)>-2$. Zatem $m\neq 0$, to $(mk)^2<\Delta<(mk+2)^2$, stąd $\Delta=(mk+1)^2$. Jednakże ostatnia równość implikuje, że $-4m+4k=2mk+1$, co nie może zajść ze względu na parzystość stron. Wobec tego $m=0$ i wtedy $a=k^2$ oraz $b=ka-1=k^3-1$. Zatem pary $(s,s^3-1)$, gdzie $s\geqslant 2$ spełniają warunki zadania.

Jeśli $m>k$, to $\Delta<(mk)^2$ oraz $\Delta>(mk-2)^2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(m+1)(k-1)>0$. Zatem, gdy $k\neq 1$, to $(mk-2)^2<\Delta<(mk)^2$, więc $\Delta=(mk-1)^2$, czyli $-4m+4k=-2mk+1$ i znów dostajemy sprzeczność ze względu na parzystość. Zatem $k=1$ i wtedy $a=m-1$ i $b=ka-1=a-1=m-2$. Wobec tego pary $(s,s-1)$, gdzie $s\geqslant 3$ jest liczbą całkowitą spełniają warunki zadania.

Jeśli $m = k$, to mamy pary $(s^2, s^3 - 1)$, gdzie $s \geqslant 2$ jest liczbą całkowitą spełniające warunki zadania. $\square$

**9.** Niech $M$ będzie środkiem łuku $BC$ (niezawierającego punktu $A$) okręgu $\omega$ opisanego na trójkącie $ABC$ o środku w punkcie $O$. Wysokość trójkąta $ABC$ opuszczona z wierzchołka $A$ przecina $\omega$ w $N$. Proste przechodzące przez $O$ i równoległe do $MB$ i $MC$ przecinają $AB$ i $AC$ w punktach $K$ i $L$, w tej kolejności. Pokazać, że $NK = NL$.

*Rozwiązanie:*

Niech $AB < AC$. Na czworokącie $ALOK$ można opisać okrąg, gdyż $\sphericalangle KOL = \sphericalangle CMB = 180 - \sphericalangle KAL$. Niech $AN$ przecina okrąg opisany na trójkącie $AKL$ w punkcie $S \neq A$. Wiadomo, że $\sphericalangle KAO = \sphericalangle SAL$, więc $OK = LS$ i $SOKL$ trapezem równoramiennym. Ponadto

$$\sphericalangle OSA = \sphericalangle OKA = \sphericalangle MBA = \sphericalangle MNA,$$

więc $MN \parallel OS$. Jednakże $OM \parallel SN$, stąd $OMNS$ jest równoległobokiem i $NS = OM = ON$. Wobec tego $N$ leży na symetralnej $OS$, skąd $NK = NL$. $\square$

**10.** Wyznaczyć wszystkie wielomiany $P(x)$ o współczynnikach rzeczywistych takie, że równość

$$xP\left(\frac{y}{x}\right) + yP\left(\frac{x}{y}\right) = x + y$$

zachodzi dla dowolnych niezerowych liczb rzeczywistych $x$ i $y$.

*Rozwiązanie:*

Kładąc $y = 1$ dostajemy równość $xP\left(\frac{1}{x}\right) = x + 1 - P(x)$. Prawa strona powyższej równości nie zawiera potęg ujemnych zmiennej $x$. Wobec tego w lewej stronie wszystkie ujemne potęgi $x$ muszą być zredukowane przez $x$, stąd $P$ jest liniowy. Wstawiając $P(x) = ax + b$ do wyjściowego równania otrzymujemy, że $b = 1 - a$, więc funkcje liniowe $ax - a + 1$ są jedynymi funkcjami spełniającymi warunki zadania. $\square$

**11.** W trapezie $ABCD$, suma długości podstaw $AB$ i $CD$ jest równa przekątnej $BD$. Niech $M$ będzie środkiem odcinka $BC$, i niech $E$ będzie obrazem punktu $C$ w symetrii względem prostej $DM$. Pokazać, że $\sphericalangle AEB = \sphericalangle ACD$.

*Rozwiązanie:*

Niech $P$ będzie punktem na przekątnej $BD$ takim, że $PD = CD$. Wówczas $PB = AB$, co w połączeniu z równoległością prostych $AB$ i $CD$ pokazuje, że trójkąty równoramienne $DCP$ i $APB$ są podobne, skąd punkty $A, C$ i $P$ są współliniowe. Ponieważ $DE = DP = DC$, to punkty $E, P$ i $C$ leżą na okręgu o środku w punkcie $D$.

Z równości $MB = MC = ME$ wnioskujemy, że $\sphericalangle BEC = 90°$, więc $MD \parallel EB$. Zatem

$$\sphericalangle EPA = \frac{1}{2}\sphericalangle EDC = \sphericalangle ABE,$$

więc na czworokącie ABPE można opisać okrąg. W szczególności $\sphericalangle AEB = \sphericalangle ACD$. □

**12.** Wyznaczyć wszystkie takie trójki liczb naturalnych $(k, m, n)$, że trzy ściany prostopadłościanu $k \times m \times n$ o wspólnym wierzchołku można okleić niezachodzącymi na siebie prostokątami $3 \times 1$. Prostokąty mogą być zaginane na krawędziach prostopadłościanu.

*Rozwiązanie:*

Pole powierzchni trzech ścian o wspólnym wierzchołku wynosi $km+kn+mn$; aby oklejenie tych ścian było możliwe, liczba ta powinna być podzielna przez 3. Jeśli jedna z liczb $k, m, n$ dzieli się przez 3, to podzielność $3 \mid km+kn+mn$ ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jedna z dwóch pozostałych liczb także dzieli się przez 3. Jest jasne, że jeśli przynajmniej dwie z liczb $k, m, n$ są podzielne przez 3, to każda z trzech rozważanych ścian prostopadłościanu ma bok o długości podzielnej przez 3 i każdą z tych ścian z osobna można okleić prostokątami $3 \times 1$.

Wykażemy teraz, że jeśli żadna z liczb $k, m, n$ nie jest podzielna przez 3, to żądane oklejenie nie jest wykonalne. Potraktujmy każdą z trzech badanych ścian jako prostokątną tabelę złożoną z pól będących kwadratami jednostkowymi. Wprowadźmy w tych tabelach numerację wierszy i kolumn przyjmując, że w każdej tabeli pierwszy wiersz i pierwsza kolumna są przyległe do wspólnego wierzchołka $P$ rozważanych trzech ścian. Następnie w każdej tabeli pomalujmy na niebiesko wszystkie pola, których numer wiersza lub numer kolumny daje resztę 2 z dzielenia przez 3. Pozostałe pola pomalujmy na czerwono.

Pola czerwone w jednej tabeli są zgrupowane w kwadratach $2 \times 2$, być może z wyjątkami przy brzegach tabeli. Ponieważ jednak liczba kolumn daje resztę 1 lub 2 z dzielenia przez 3, więc albo ostatnia kolumna jest niebieska, albo trzecia od końca jest niebieska. Wynika stąd, że nie istnieją czerwone prostokąty $1 \times 2$ w ostatniej kolumnie tabeli, które byłyby zawarte w kwadratach $2 \times 2$, gdyby tabela miała jedną kolumnę więcej. Analogiczne stwierdzenie jest prawdziwe dla ostatniego wiersza. Natomiast w pierwszym wierszu i w pierwszej kolumnie znajduje się jedno czerwone pole narożne oraz czerwone prostokąty $1 \times 2$. Wobec tego wszystkie czerwone prostokąty z wyjątkiem pola narożnego zawierającego wierzchołek $P$ mają przynajmniej jeden bok o długości parzystej. Stąd wniosek, że liczba pól czerwonych w każdej tabeli jest nieparzysta i w takim razie liczba wszystkich czerwonych pól jest nieparzysta.

Nietrudno natomiast spostrzec, że każdy prostokąt $3 \times 1$ przyklejony do trzech ścian o wierzchołku $P$ pokrywa parzystą liczbę czerwonych pól. Zatem opisane w zadaniu oklejenie nie jest możliwe. $\square$

## Zawody indywidualne grupy $\mathbb{B}$

**1.** Dana jest liczba całkowita dodatnia $n$ oraz liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pokazać, że istnieją $m, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takie, że

$$\left|\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{i=m+1}^{n} a_i\right| \leqslant |a_k|.$$

*Rozwiązanie:*
Patrz rozwiązanie zadania 2 grupy $\mathbb{A}$. □

**2.** Okrąg wpisany w trójkąt $ABC$ ($AB < AC$) jest styczny do boków $BC$, $CA$ i $AB$ w punktach odpowiednio $D$, $E$ i $F$. Punkt $S$ jest środkiem łuku $BAC$ okręgu $\omega$ opisanego na trójkącie $ABC$. Prosta $SD$ przecina $\omega$ w punkcie $P$. Prosta $AP$ przecina odcinek $EF$ w punkcie $Q$. Pokazać, że $QD \perp EF$.

*Rozwiązanie:*
Patrz rozwiązanie zadania 3 grupy $\mathbb{A}$. □

**3.** Dana jest nieskończona rodzina zbiorów 3-elementowych. Udowodnić, że jeżeli każde dwa z tych zbiorów mają niepustą cześć wspólną, to istnieje taki zbiór 2-elementowy, który ma niepustą część wspólną z każdym zbiorem z tej rodziny.

*Rozwiązanie:*
Niech $\{a, b, c\}$ będzie jednym z danych zbiorów. Gdyby każdy z elementów $a$, $b$, $c$ należał do skończenie wielu pozostałych zbiorów z danej rodziny, to wśród pozostałych zbiorów istniałoby nieskończenie wiele zbiorów rozłącznych ze zbiorem $\{a, b, c\}$, wbrew założeniom zadania. Możemy zatem przyjąć, że element a należy do nieskończenie wielu zbiorów z rozpatrywanej rodziny.

Jeśli element a należy do wszystkich zbiorów rodziny, to teza jest oczywiście spełniona. W przeciwnym razie możemy bez ograniczenia ogólności rozumowania przyjąć, że wśród danych zbiorów istnieje zbiór postaci $\{b, d, e\}$, przy czym elementy $d, e$ są różne od $a$.

Jeżeli każdy zbiór z rozważanej rodziny zawiera element $a$ lub $b$, to zbiór $\{a, b\}$ spełnia tezę zadania.

W przeciwnym przypadku istnieje w danej rodzinie zbiór $S$ nie zawierający żadnego z elementów $a, b$. Zauważmy, że istnieje nieskończenie wiele zbiorów rodziny zawierających element $a$ i nie zawierających elementu $b$ (gdyż w przeciwnym razie istniałoby nieskończenie wiele zbiorów postaci $\{a, b, x\}$ dla różnych elementów $x$, ale wówczas jeden z takich zbiorów byłby rozłączny ze zbiorem $S$ i otrzymalibyśmy sprzeczność z warunkami zadania). Każdy z takich zbiorów ma niepustą część wspólną ze zbiorem $\{b, d, e\}$. Wobec tego nieskończenie wiele zbiorów danej rodziny zawiera elementy $a, d$ lub zawiera elementy $a, e$. Nie zmniejszając ogólności przypuśćmy, że istnieje nieskończenie wiele zbiorów postaci $\{a, d, x\}$ dla różnych wartości $x$. Każdy zbiór danej rodziny ma niepustą część z dowolnym zbiorem tej postaci, a zatem musi zawierać element $a$ lub $d$. W tej sytuacji zbiór $\{a, d\}$ spełnia tezę. □

**4.** Dane są liczby rzeczywiste dodatnie $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pokazać, że istnieją $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{-1, 1\}$ takie, że

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_nx_n^2 \geqslant (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n)^2.$$

*Rozwiązanie:*

Patrz rozwiązanie zadania 5 grupy $\mathbb{A}$. □

**5.** Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ takie, że dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi $f(mn) = f(m)f(n)$ oraz $m + n \mid f(m) + f(n)$.

*Rozwiązanie:*

Zauważmy, że $f(1) = f(1)^2$, więc $f(1) = 1$. Ponadto dla dowolnej liczby pierwszej $p > 2$ mamy $p \mid f(2)f\left(\frac{p-1}{2}\right) + 1$, więc nie istnieje liczba pierwsza $p > 2$ dzieląca $f(2)$. Oczywiście, $f(2) \neq 1$ jako, że $2 + 2$ nie dzieli $1 + 1$, zatem $f(2) = 2^k$ dla pewnego naturalnego $k$. Rozumując indukcyjnie dostajemy równość, $f(2^l) = 2^{kl}$ dla dowolnej liczby $l \in \mathbb{N}$. Ponieważ $2 + 4|2^k + 4^k$, to $k$ jest nieparzyste.

Ustalmy teraz liczbę naturalną $n$. Wtedy $n + 2^l|f(n) + 2^{kl}$ dla dowolnego $l \geqslant 1$. Jednakże $n + 2^l|n^k + 2^{kl}$, gdyż k jest nieparzyste, stąd $n + 2^l|f(n) - n^k$. Powyższa podzielność zachodzi dla dowolnego $l \geqslant 1$ całkowitego, więc $f(n) - n^k = 0$, skąd otrzymujemy rozwiązanie $f(n) = n^k$.

Bezpośrednio stwierdzamy, że funkcje te spełniają warunki zadania. □

**6.** Dany jest trójkąt ostrokątny $ABC$, w którym $AB \neq AC$. Okrąg o środku $J$ jest styczny w punkcie $E$ do odcinka $BC$ oraz jest styczny do przedłużeń boków $AB$ i $AC$. Odcinki $BC$ i $AJ$ przecinają się w punkcie $D$. Okręgi opisane na trójkątach $ABC$ i $ADE$ przecinają się w punkcie $F$ różnym od $A$. Udowodnić, że $\sphericalangle AFJ = 90°$.

*Rozwiązanie:*

Nie tracąc ogólności przyjmijmy, że $AB > AC$; wtedy punkt $F$ leży po przeciwnej stronie prostej $AB$ niż punkt $C$. Niech dany w treści zadania okrąg o środku $J$ będzie styczny do półprostych $AB$ i $AC$ odpowiednio w punktach $P$ i $Q$. Ponieważ

$$\sphericalangle EFA = \sphericalangle ADC = \sphericalangle CBA + \sphericalangle BAD = \sphericalangle CFA + \sphericalangle BAD,$$

więc

$$\sphericalangle EFC = \sphericalangle EFA - \sphericalangle CFA = \sphericalangle BAD = \frac{1}{2}\sphericalangle BAC.$$

Z równości $\sphericalangle BFC = \sphericalangle BAC$ wynika zatem, że półprosta $FE$ jest dwusieczną kąta $BFC$ i w takim razie

$$\frac{BF}{CF} = \frac{BE}{CE} = \frac{BP}{CQ}.$$

Stąd i z zależności

$$\sphericalangle FBP = 180^\circ - \sphericalangle FBA = 180^\circ - \sphericalangle FCA = \sphericalangle FCQ$$

uzyskujemy podobieństwo trójkątów $FBP$ i $FCQ$, które prowadzi do wniosku, że $\sphericalangle FPA = \sphericalangle FQA$. Wobec tego punkty $A, F, P, Q$ leżą na jednym okręgu. Jednak z uwagi na równości $\sphericalangle APJ = \sphericalangle AQJ = 90^\circ$ średnicą tego okręgu jest odcinek $AJ$, a to oznacza, że $\sphericalangle AFJ = 90^\circ$. □

**7.** Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $a > 1$, $b > 1$ takie, że $a \mid b+1$ oraz $b \mid a^3 - 1$.

*Rozwiązanie:*

Patrz rozwiązanie zadania 8 grupy $\mathbb{A}$. □

**8.** Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że następujący zbiór

$$\left\{ \frac{f(x)}{x} : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$

jest skończony oraz dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$f(x - 1 - f(x)) = f(x) - x - 1.$$

*Rozwiązanie:*

Oznaczmy równanie funkcyjne przez $(*)$. Połóżmy $x := y - 1 - f(y)$ w $(*)$. Wtedy $f(2y - 2f(y) - 1) = 2f(y) - 2y - 1$ dla dowolnego rzeczywistego $y$.

Weźmy teraz $y := 2z - 2f(z) - 1$ dla pewnego z. Wtedy $f(4z - 4f(z) - 1) = 4f(z) - 4z - 1$. Indukcyjnie pokazujemy, że $f(2^n(x - f(x)) - 1) = 2^n(f(x) - x) - 1$ dla dowolnego rzeczywistego $x$ oraz liczby naturalnej $n$.

Rozpatrzmy teraz funkcję $g(x) := f(x) - x$. Powyższy związek przekształca się do zależności

$$g(-2^n g(x) - 1) = 2^{n+1} g(x)$$

prawdziwej dla dowolnego rzeczywistego $x$. Wobec tego

$$\frac{g(-2^n g(x) - 1)}{-2^n g(x) - 1} = \frac{2^{n+1} g(x)}{-2^n g(x) - 1}.$$

Ponieważ $\dfrac{g(x)}{x}$ przyjmuje tylko skończenie wiele wartości dla niezerowych $x$, to z powyższej równości wnioskujemy, że funkcja

$$h(n, x) := \frac{2^{n+1} g(x)}{2^n g(x) + 1}$$

przyjmuje skończenie wiele wartości.

Przypuśćmy teraz, że $g(x_0) \neq 0$ dla pewnego $x_0$. Wtedy

$$2 - h(n, x_0) = \frac{2}{2^n g(x_0) + 1}$$

nie może przyjmować jedynie skończenie wiele wartości, gdyż dla różnych $n_1, n_2$, mamy $2^{n_1} g(x_0) \neq 2^{n_2} g(x_0)$. Uzyskana sprzeczność pokazuje, że $g(x) = 0$ dla dowolnego $x$, więc $f(x) \equiv x$. □

**9.** Wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$, nie będącego trapezem, leży taki punkt $X$, że $\sphericalangle ADX = \sphericalangle BCX$, $\sphericalangle DAX = \sphericalangle CBX$ i wszystkie te kąty są ostre, oraz taki punkt $Y$, że $AY = BY$ i $CY = DY$. Dowieść, że $\sphericalangle AYB = 2 \cdot \sphericalangle ADX$.

*Rozwiązanie:*

Niech $M$ i $N$ będą takimi punktami na symetralnej odcinka $AB$, że trójkąty $AMN$ i $ADX$ są podobne oraz mają tę samą orientację. Wówczas $\frac{AM}{AN} = \frac{AD}{AX}$ co wraz z równością kątów $\sphericalangle MAD = \sphericalangle NAX$ daje podobieństwo trójkątów $AMD$ i $ANX$. Analogicznie dowodzimy, że ze zgodnego podobieństwa trójkątów $BMN$ i $BCX$ wynika podobieństwo trójkątów $BMC$ i $BNX$. Zatem

$$\frac{CM}{XN} = \frac{BM}{BN} = \frac{AM}{AN} = \frac{DM}{XN},$$

czyli $CM = DM$. Wobec tego punkt $M$ pokrywa się z punktem $Y$, gdyż symetralne odcinków $AB$ i $CD$ mają dokładnie jeden punkt wspólny, a stąd

$$\sphericalangle AYB = \sphericalangle AMB = 2\sphericalangle AMN = 2\sphericalangle ADX.$$

□

**10.** W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątna $AC$ jest dwusieczną kąta $BAD$. Ponadto $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ACB$. Punkty $X$ i $Y$ są rzutami prostokątnymi punktu $A$ na $BC$ i $CD$, odpowiednio. Pokazać, że ortocentrum trójkąta $AXY$ leży na prostej $BD$.

*Rozwiązanie:*

Oczywiście na czworokącie $AXYC$ można opisać okrąg, który nazwiemy $\omega$. Niech $E$ i $F$ będą punktami przecięcia $\omega$ z $AB$ i $AC$, odpowiednio. Przez $H$ oznaczmy punkt przecięcia $EY$ i $FX$. Z twierdzenia Paskala zastosowanego dla punktów $H, A, G, X, C, Y$ dostajemy, że punkty $B, H, D$ są współliniowe.

Z drugiej strony

$$\sphericalangle AFX = \sphericalangle ACX = \sphericalangle ADC,$$

więc $XF \parallel CD$, skąd $XF \perp AY$. Podobnie pokazujemy, że $YE \perp AX$, więc $H$ jest ortocentrum trójkąta $AXY$. □

**11.** Wyznaczyć wszystkie takie trójki liczb naturalnych $(k, m, n)$, że trzy ściany prostopadłościanu $k \times m \times n$ o wspólnym wierzchołku można okleić niezachodzącymi na siebie prostokątami $3 \times 1$. Prostokąty mogą być zaginane na krawędziach prostopadłościanu.

*Rozwiązanie:*

Patrz rozwiązanie zadania 12 grupy $\mathbb{B}$. □

**12.** Dowieść, że każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych jest różnicą dwóch wielomianów rosnących.

*Rozwiązanie:*

Wielomian nazwiemy dobrym, jeśli jest różnicą dwóch wielomianów rosnących. Jest jasne, że suma dwóch wielomianów dobrych jest wielomianem dobrym oraz iloczyn wielomianu dobrego przez dowolną stałą rzeczywistą jest wielomianem dobrym. Wobec tego wystarczy udowodnić, że jednomiany $1, x, x^2$, $x^3, \ldots$ są dobre, ale to wynika z następujących wzorów:

$$\begin{aligned}
&1 = (x+1) - x,\\
&x^{2k-1} = 2x^{2k-1} - x^{2k-1},\\
&x^{2k} = (x^{4k-1} + x^{2k} + 2kx) - (x^{4k-1} + 2kx).
\end{aligned}$$

W ostatnim wzorze wielomian $x^{4k-1}+2kx$ jest oczywiście rosnący jako suma dwóch wielomianów rosnących. Natomiast dla wielomianu $W(x) := x^{4k-1} + x^{2k} + 2kx$ obliczamy bezpośrednio, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a, b$ mamy

$$W(a)-W(b) = (b-a)\left(\sum_{i=0}^{2k-1}\left(\left(a^i b^{2k-1-i}\right)^2 + \left(a^i b^{2k-1-i}\right) + 1\right) + ab\sum_{i=0}^{2k-2}\left(a^i b^{2k-2-i}\right)^2\right).$$

Z nierówności $t^2+t+1 > 0$ wynika, że drugi czynnik jest dodatni, gdy liczby $a, b$ są tego samego znaku lub jedna z nich jest zerem. Wobec tego $W(a) < W(b)$ zachodzi dla $a < b \leqslant 0$ oraz dla $0 \leqslant a < b$, a to pozwala wnioskować, że wielomian $W$ jest rosnący. $\square$

# Zawody indywidualne grupy $\mathbb{C}$

**1.** Okrąg wpisany w trójkąt $ABC$ ($AB < AC$) jest styczny do boków $BC$, $CA$ i $AB$ w punktach odpowiednio $D$, $E$ i $F$. Punkt $S$ jest środkiem łuku $BAC$ okręgu $\omega$ opisanego na trójkącie $ABC$. Prosta $SD$ przecina $\omega$ w punkcie $P$. Prosta $AP$ przecina odcinek $EF$ w punkcie $Q$. Pokazać, że $QD \perp EF$.

*Rozwiązanie:*

Patrz rozwiązanie zadania 3 grupy $\mathbb{A}$. □

**2.** Liczbę naturalną nazwijmy *dobrą* jeśli jest postaci $n^2 + 1$ dla pewnej liczby całkowitej $n$. Pokazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb dobrych $k$, które nie posiadają dzielnika dobrego różnego od 1 i $k$.

*Rozwiązanie:*

Niech $X$ będzie zbiorem liczb spełniających warunki zadania, natomiast $Y$ zbiorem liczb, które posiadają co najmniej jeden dzielnik dobry (różny od 1 i samej liczby).

Załóżmy, że $X$ jest nieskończony i niech $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, gdzie $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$. Łatwo zauważyć, że dowolna liczba z $Y$ posiada dzielnik ze zbioru $X$.

Rozpatrzmy liczbę $A = (x_1 x_2 \ldots x_k)^2 + 1$. Ponieważ $A$ jest liczbą dobrą większą niż $x_k$, to $A \in Y$. Wobec tego $A$ posiada dzielnik w zbiorze $X$, co jest niemożliwe, gdyż $x_i \mid A - 1$ dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. □

**3.** Czy istnieje na płaszczyźnie konfiguracja 22 okręgów i 22 punktów leżących na tych okręgach, że na dowolnym okręgu leży co najmniej siedem punktów i dowolny punkt leży na co najmniej siedmiu okręgach?

*Rozwiązanie:*

Pokażemy, że nie istnieje konfiguracja punktów $P_i$ i okręgów $C_i$ spełniająca warunki zadania ($i \in \{1, 2, \ldots, 22\}$). Przypuśćmy, że istnieje. Rozpatrzmy wszystkie pary $(P, \{C_1, C_2\})$, gdzie punkt $P$ leży w części wspólnej okręgów $C_1$ i $C_2$. Ponieważ każdy punkt należy do co najmniej 7 okręgów, to dla ustalonego punktu $P$, co najmniej $\binom{7}{2}$ par okręgów $C_1$, $C_2$ jest takich, że $P \in C_1 \cap C_2$. Wobec tego łączna liczba powyższych par jest nie mniejsza niż $22 \cdot \binom{7}{2}$. Z drugiej strony $C_1 \cap C_2$ ma co najwyżej 2 elementy, więc istnieje co najwyżej $2 \cdot \binom{22}{2}$ par $(P, \{C_1, C_2\})$. Jednakże $2 \cdot \binom{22}{2} = 22 \cdot \binom{7}{2}$, stąd liczba szukanych par jest równa $22 \cdot \binom{7}{2}$.

Rozpatrzmy macierz zero-jedynkową $A$, której $(i,j)$-ty wyraz jest równy 1 wtedy i tylko wtedy, gdy $P_j \in C_i$. Łatwo zauważyć, że $A \cdot A^T$ jest macierzą mającą na głównej przekątnej 7 a na pozostałych miejscach 2. Wyznacznik takiej macierzy jest równy $49 \cdot 5^{21}$ (ćwiczenie). Jednakże $\det(A \cdot A^T) = (\det A)^2$, więc $49 \cdot 5^{21}$ jest kwadratem liczby całkowitej — sprzeczność. □

**4.** Dane są liczby rzeczywiste dodatnie $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pokazać, że istnieją $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{-1, 1\}$ takie, że

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_n x_n^2 \geqslant (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n)^2.$$

*Rozwiązanie:*

Patrz rozwiązanie zadania 4 grupy $\mathbb{B}$. □

**5.** Punkty $O$ i $H$ są odpowiednio środkiem okręgu opisanego i ortocentrum w trójkącie $ABC$. Punkt $P$ jest obrazem punktu $A$ względem prostej $OH$. Załóżmy, że $A$ i $P$ leży po przeciwnych stronach prostej $BC$. Punkty $E, F$ leżą na $AB, AC$ odpowiednio tak, że $BE = PC$ oraz $CF = PB$. Niech prosta $AP$ przecina $OH$ w punkcie $K$. Pokazać, że $\sphericalangle EKF = 90°$.

*Rozwiązanie:*

Oczywiście punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie $ABC$. Niech $G \neq A$ będzie punktem przecięcia okręgów opisanych na trójkątach $AEF$ i $ABC$. Ponadto, niech $P'$ oznacza drugi punkt przecięcia prostej $AP$ z okręgiem opisanym na trójkącie $AEF$.

Jeśli $I, J$ to środki odpowiednio $BC, EF$, to punkt $G$ jest środkiem podobieństwa spiralnego, które przekształca punkty $B, C, I, P$ na punkty $E, F, J, P'$ w tej kolejności. Zachodzą również podzielności

$$\frac{P'F}{P'E} = \frac{PC}{PB} = \frac{BE}{CF} = \frac{GE}{GF}$$

z której wynika, że punkty $G, J, P'$ leżą na jednej prostej. Zatem punkty $G, I, P$ są również współliniowe. Stąd i z podobieństwa spiralnego wokół $G$ wnioskujemy, że $IJ \parallel P'P$ .

Niech teraz $S$ będzie drugim końcem średnicy $AS$ okręgu opisanego na trójkącie $ABC$. Wówczas punkty $H, I, S$ są współliniowe (znany lemat) oraz $PK \parallel SP$, więc obraz $L$ punktu $P$ w symetrii względem punktu $I$ leży na prostej $OH$. Ponadto

$$\begin{aligned}\sphericalangle ELF = 360° - \sphericalangle BEL - \sphericalangle FCB - \sphericalangle BLC =\\ = 360° - (180° - \sphericalangle AEL) - (180° - \sphericalangle AFL) - \sphericalangle CPB = 90°.\end{aligned}$$

Ponieważ $IJ \parallel KP$, to $IJ \perp KLOH$, więc $IJ$ połowi odcinek $KL$. Oznacza to, że $JK = JL = JE = JF$, czyli punkty $E, F, K$ i $L$ leżą na okręgu o środku w punkcie $J$. W szczególności $\sphericalangle EKF = 90°$. □

**6.** Niech $h \geqslant 3$ będzie liczbą całkowitą a $X$ zbiorem wszystkich liczb całkowitych nie mniejszych niż $2h$. Niech $S$ będzie niepustym podzbiorem $X$ takim, że

1. jeśli $a \geqslant h, b \geqslant h$ oraz $a + b \in S$, to $ab \in S$,
2. jeśli $a \geqslant h, b \geqslant h$ oraz $ab \in S$, to $a + b \in S$.

Pokazać, że $S = X$.

*Rozwiązanie:*

Zauważmy, że dla $a \in S$, $a - h \geqslant h$, więc $h(a - h) \in S$, czyli $S$ jest nieograniczony, gdyż $h(a - h) > a$.

Niech $h_0 = 3\left[\frac{h}{3}\right] + 3 \geqslant h$. Ustalmy $a \in S$ takie, że $a > 9h_0$. Wtedy $a - h_0 > h$, skąd $b := h_0(a - h_0) \in S$. Ponadto $3 \mid b$ i $\frac{b}{3} > 2h$. Wtedy

$$\left(\frac{2b}{3} + 4\right)\left(\frac{b}{3} - 1\right) = \left(\frac{b}{3} + 2\right)\left(\frac{2b}{3} - 2\right) \in S$$

więc $\frac{2b}{3} + 4 + \frac{b}{3} - 1 = b + 3 \in S$. Przez prostą indukcję pokazujemy, że $b + 3n \in S$ dla dowolnego całkowitego $n > 0$.

Weźmy teraz dowolny $x \geqslant 2h$ i rozpatrzmy ciąg $\{x_n\}_{n \geqslant 0}$ określony następująco: $x_0 = x$ oraz $x_{n+1} = h(x_n - h)$. Niech $N > 0$ będzie taką liczbą całkowitą, że $x_N > b + h_0$. Wtedy $c := h_0(x_N - h_0) > b$ oraz $3 \mid c$. Zatem $3 \mid c - b > 0$, więc na mocy powyższych spostrzeżeń $c = b + c - b \in S$, skąd uzyskujemy, że $x_N = h_0 + x_N - h_0$ należy do $S$.

Łatwo zauważyć, że $x_N \in S$ implikuje, że $x_{N-1} \in S$, więc przez prostą indukcję $x = x_0 \in S$. □

**7.** Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że następujący zbiór

$$\left\{\frac{f(x)}{x} : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}$$

jest skończony oraz dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$f(x - 1 - f(x)) = f(x) - x - 1.$$

*Rozwiązanie:*

Patrz rozwiązanie zadania 8 grupy $\mathbb{B}$. □

**8.** Funkcja $f$ prowadząca ze zbioru punktów przestrzeni trójwymiarowej $\mathbb{R}^3$ w ten sam zbiór spełnia warunki:

- dla dowolnych dwóch punktów $A, B \in \mathbb{R}^3$ odległość pomiędzy punktami $f(A)$ i $f(B)$ jest równa odległości pomiędzy $A$ i $B$,
- istnieje taka liczba naturalna $n$, że dla dowolnego punktu $A$ spełniony jest warunek $f^{(n)}(A) = A$ (gdzie $f^{(n)}$ oznacza $n$-krotne złożenie funkcji $f$)

Wykazać, że istnieje punkt $A \in \mathbb{R}^3$ taki, że $f(A) = A$.

*Rozwiązanie:*

Zauważmy na początek, że jeżeli $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ oraz punkt $C$ leży na odcinku $AB$ to $f(C)$ leży na odcinku $f(A)f(B)$. Wynika to z faktu, że punkt $C$ jest jedynym punktem, który jest jednocześnie w odległości $AC$ od punktu $A$ i w odległości $BC$ od punktu $B$ oraz podobnie, istnieje dokładnie jeden punkt $X$, który jest w odległości $AC$ od punktu $f(A)$ i w odległości $BC$ od punktu $f(B)$ (gdyż $|f(A)f(B)| = |AB|$). Mamy więc $f(C) = X$, a $X$ leży oczywiście na odcinku $f(A)f(B)$. Co więcej, jasne jest, że punkt $f(C)$ dzieli odcinek $f(A)f(B)$ w tym samym stosunku co punkt $C$ dzieli odcinek $AB$.

Za pomocą indukcji po $m \geqslant 1$ udowodnimy następnie, że dla dowolnego skończonego układu punktów $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\} \subset \mathbb{R}^3$, których środkiem ciężkości jest punkt $G$, środkiem ciężkości układu punktów $\{f(A_1), f(A_2), \ldots, f(A_m)\}$ jest punkt $f(G)$. Dla $n = 1$ nie ma czego dowodzić. Załóżmy zatem, że $f$ przeprowadza środek ciężkości $G'$ układu $\{A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}\}$ na środek ciężkości układu $\{f(A_1), f(A_2), \ldots, f(A_{m-1})\}$. Zauważmy, że $G$ leży na odcinku $A_m G'$ i dzieli go w stosunku $1 : (m-1)$. Z początkowej obserwacji wynika więc, że punkt $f(G)$ leży na odcinku $f(A_m)f(G')$ i dzieli go również w stosunku $1 : (n-1)$. Tym samym skoro $f(G')$ jest środkiem ciężkości układu punktów $\{f(A_1), f(A_2), \ldots, f(A_{m-1})\}$, to $f(G)$ jest środkiem ciężkości układu punktów $\{f(A_1), f(A_2), \ldots, f(A_{m-1}), f(A_m)\}$. Kończy to dowód indukcyjny.

Ustalmy dowolny punkt $A \in \mathbb{R}^3$ i rozważmy układ punktów

$$\mathcal{S} = \{A, f(A), f(f(A)), \ldots, f^{(n-1)}(A)\}.$$

Z drugiego założenia danego w zadaniu wynika, że $f(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$. W szczególności, obrazem środka ciężkości $G$ zbioru $\mathcal{S}$ jest środek ciężkości zbioru $f(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$, czyli punkt $G$. Punkt $G$ jest więc szukanym punktem stałym funkcji $f$ i dowód jest zakończony.

**9.** Okrąg o środku w punkcie $I$ jest styczny do boku $BC$ nierównoramiennego trójkąta $ABC$ w punkcie $D$. Punkt $X$ leży na łuku $BC$ (niezwierającego punktu $A$) okręgu opisanego na trójkącie $ABC$. Punkty $E$ i $F$ są rzutami punktu $X$ na proste $BI$ i $CI$, odpowiednio. Punkt $M$ jest środkiem odcinka $EF$. Pokazać, że jeśli $MB = MC$, to $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAX$.

*Rozwiązanie:*

Niech $I_A$ będzie środkiem okręgu $A$-dopisanego do trójkąta $ABC$, natomiast punkt $N$ środkiem łuku $BAC$.

Dla dowolnego punktu $P$ na prostej $NI_A$ definiujemy punkt $P^*$ jako środek odcinka łączącego rzuty punktu $P$ na proste $BI$ i $CI$. Niech $S$ będzie rzutem prostokątnym punktu $I$ na $NI_A$. Podobieństwo spiralne o środku w $S$ pokazuje, że punkty $P^*$ leżą na pewnej prostej $\ell$, gdy $P \in NI_A$.

Jeżeli $P = I_A$, to $P^*$ jest oczywiście środkiem $M$ odcinka $BC$. Rozpatrzmy teraz punkt $N^*$. Jeśli $R$ i $Q$ są rzutami $N$ na $BI$ i $CI$, odpowiednio, to punkty $Q, M, C, N$ leżą na okręgu, więc

$$\sphericalangle MQC = \sphericalangle MNC = \frac{1}{2}\sphericalangle BAC.$$

Wobec tego kąt między prostymi $QM$ i $BI$ jest równy

$$180^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle BAC - \sphericalangle QIB = 180^\circ - \frac{1}{2}(\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA + \sphericalangle CAB) = 90^\circ.$$

Podobnie $RM \perp CI$, zatem czworokąt $NRMQ$ jest równoległobokiem. W szczególności $N^*$ jest środkiem tego równoległoboku, więc leży na $MN$.

Łącząc powyższe fakty wnioskujemy, że $\ell$ jest symetralną odcinka $BC$. Zatem dla dowolnego punktu $P$ mamy, że $BP^* = CP^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P \in NI_A$, więc punkt $X$ z warunków zadania jest przecięciem $NI_A$ z okręgiem opisanym na trójkącie $ABC$.

Rozpatrzmy teraz przekształcenie $\phi$ będące złożeniem inwersji o środku w punkcie $A$ i promieniu równym $\sqrt{AB \cdot AC}$ z obrazem względem dwusiecznej kąta $BAC$. Wtedy $\phi(I_A) = I$ oraz $\phi(N) = K$, gdzie $K$ jest przecięciem dwusiecznej kąta zewnętrznego $BAC$ z prostą $BC$. Ponadto prosta $BC$ oraz okrąg opisany na trójkącie $ABC$ są przekształcane na siebie poprzez $\phi$, więc $\phi(K) = D$. Oznacza to w szczególności, że $X$ i $D$ leżą na prostych izogonalnych względem kąta $BAC$, czyli tezę zadania. □

**10.** Okrąg o środku w punkcie $I$ jest wpisany w czworokąt $ABCD$. Punkty $M$ i $N$ leżą na odcinkach $AI$ i $CI$, odpowiednio, przy czym $\sphericalangle MBN = \frac{1}{2}\sphericalangle ABC$. Pokazać, że $\sphericalangle MDN = \frac{1}{2}\sphericalangle ADC$.

*Rozwiązanie:*

Na podstawie równości $AB - AD = CB - CD$, otrzymujemy, że punkty $A$ i $C$ leżą na hiperboli $\Omega$ o ogniskach $B$ i $D$. Ponieważ $\sphericalangle BAI = \sphericalangle IAD$ oraz $\sphericalangle DCI = \sphericalangle ICB$, to proste $IA, IC$ są styczne do $\Omega$ w punktach $A$ i $C$ (znany fakt konstrukcji stycznej), odpowiednio. Równość $\sphericalangle MBN = \frac{1}{2}\sphericalangle ABC$ pokazuje, że prosta $MN$ jest również styczna do $\Omega$, więc w również $\sphericalangle MDN = \frac{1}{2}\sphericalangle ADC$. □

**11.** Dana jest liczba bezkwadratowa parzysta $n$ oraz liczba pierwsza $p$ względnie pierwsza z $n$ taka, że $p \leqslant 2\sqrt{n}$ oraz istnieje całkowita liczba $k$ taka, że $p \mid n+k^2$. Pokazać, że istnieją parami różne liczby całkowite dodatnie $a$, $b$, $c$ takie, że $n = ab+bc+ca$.

*Rozwiązanie:*

Niech $k \equiv m \pmod p$, gdzie $0 \leqslant m < p$. Zauważmy, że $m > 0$, w przeciwnym wypadku $p \mid k$, więc $p \mid n$ co jest niemożliwe, gdyż $p$ i $n$ są względnie pierwsze. Z owej względnie pierwszości oraz parzystości $n$ wynika również, że $p > 2$. Zatem $p-m$ i $m$ są liczbami różnej parzystości.

Niech $c$ będzie nieparzystą liczbą ze zbioru $\{m, p-m\}$. Ponieważ $0 < m < p$ i $p \mid n+k^2$, to $c > 0$ oraz $p \mid n+c^2$. Wobec tego istnieje $q \in \mathbb{N}$ takie, że $pq = n+c^2$. Korzystając z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną oraz założenia $p \leqslant 2\sqrt{n}$ mamy, że

$$q = \frac{n+c^2}{p} \geqslant \frac{2c\sqrt{n}}{p} \geqslant c.$$

Jednakże, n jest liczbą bezkwadratową, więc równość w powyższej nierówności nie może zajść, stąd $q > c$.

Przyjmijmy teraz $a := q-c$ oraz $b := p-c$ i zauważmy, że

$$n + c^2 = pq = (a+c)(b+c) = ab + ac + bc + c^2.$$

Wobec tego $n = ab+bc+ca$, gdzie $a, b, c > 0$.

Wystarczy teraz pokazać, że $a$, $b$ i $c$ są parami różne. Jeśli $b = c$, to $p = 2c$, co jest niemożliwe, gdyż $p > 2$. Jeśli $a = b$, to $p = q$, stąd $n = p^2 - c^2 = (p-c)(p+c)$. Ponieważ $p$ i $c$ są nieparzyste, to $2 \mid p-c$ i $2 \mid p+c$ zatem $4|n$ co przeczy temu, że $n$ jest liczbą bezkwadratową. Jeśli natomiast $a = c$, to $q = 2c$ i $2pc - n = c^2$. Z parzystości $n$ dostajemy, że $2 \mid c$ — sprzeczność. Wobec tego liczby $a, b, c$ spełniają żądane warunki. $\square$

**12.** Pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej $n$ istnieje dokładnie jeden wielomian $f$ stopnia $n$ taki, że $f(0) = 1$ oraz funkcja $(x+1)f(x)^2 - 1$ jest funkcją nieparzystą.

*Rozwiązanie:*

Rozpatrzmy następujące ciągi wielomianów:

$$\begin{cases} g_0(x) = 1, h_0(x) = 0, \\ g_{2n+1}(x) = g_{2n}(x), \\ h_{2n+1}(x) = -2xg_{2n}(x) - h_{2n}(x), \\ g_{2n}(x) = g_{2n-1}(x) + 2xh_{2n-1}(x), \\ h_{2n}(x) = -h_{2n-1}(x) \end{cases}$$

Łatwo zauważyć, że $g_n(0) = h_n(0)$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Ponadto funkcja $g_n$ jest parzysta a funkcja $h_n$ jest nieparzysta.

Zdefiniujmy teraz wielomian stopnia $n$ równy $f_n(x) := g_n(x)+h_n(x)$. Wówczas $f_n(0) = 0$ oraz

$$\begin{aligned}
&[(x+1)f_n(x)^2 - 1] + [(-x+1)f_n(-x)^2 - 1] = [(x+1)(g_n + h_n)(x)^2 - 1]+ \\
&+ [(-x+1)(g_n + h_n)(-x)^2 - 1] = (x+1)(g_n^2(x) + h_n^2(x) + 2g_n(x)h_n(x))+ \\
&+ (-x+1)(g_n^2(x) + h_n^2(x) - 2g_n(x)h_n(x)) - 2 = \\
&= 4xg_n(x)h_n(x) + 2g_n^2(x) + 2h_n^2(x) - 2 = 0,
\end{aligned}$$

gdzie ostatnia równość, którą oznaczymy przez $(*)$ jest dobrym ćwiczeniem rachunkowym.

Jedyność pokażemy przez indukcję względem $n$. Dla $n = 0$ jest to oczywiste. Weźmy $f_n(x) = g_n(x)+h_n(x)$ i przypuśćmy że rozwiązanie $f_{n-1}$ jest jedyne dla $n-1$. Jeśli $n$ jest parzyste, to zauważamy, że $\deg g_n = n$, $\deg h_n = n-1$ oraz $\deg(g_n + 2xh_n) \leqslant n-2$. Ponadto funkcje $g = g_n + 2xh_n$ i $h = -h_n$ spełniają równość $(*)$ oraz $\deg(g+h) = n-1$. Wobec tego z założenia indukcyjnego $g_n + 2xh_n = g_{n-1}$ oraz $-h_n = h_{n-1}$, czyli $f_n$ jest jedyną funkcją stopnia $n$ spełniającą warunki zadania. Analogicznie pokazujemy przypadek, gdy $n$ jest nieparzyste. $\square$

# Mecz matematyczny grupy $\mathbb{A}$

**1.** Udowodnij, że w rozwinięciu dziesiętnym liczby $(5+\sqrt{26})^{2018}$, na pierwszych 2018 miejscach po przecinku nie występuje cyfra 7.

*Rozwiązanie:*

Ze wzorów skróconego mnożenia wynika, że $(\sqrt{26}+5)^{2018} = a + b\sqrt{26}$ dla pewnych liczb całkowitych $a, b$. Wtedy też $(\sqrt{26}-5)^{2018} = a-b\sqrt{26}$. To oznacza, że liczba $(\sqrt{26}+5)^{2018} + (\sqrt{26}-5)^{2018} = 2a$ jest całkowita. Łatwo sprawdzić, że $\sqrt{26}-5 < \frac{1}{10}$, czyli $(\sqrt{26}-5)^{2018} < \frac{1}{10^{2018}}$. Z poprzedniej obserwacji wynika, że pierwsze 2018 cyfr po przecinku to 9, czyli nie ma tam cyfry 7. □

**2.** Niech $a, b, x, y, z$ będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi takimi, że $a+b=3$ oraz $xyz=1$. Udowodnij że $(ax+b)(ay+b)(az+b) \geqslant 27$.

*Rozwiązanie:*

□

**3.** Niech $n$ będzie liczbą całkowitą dodatnią. Udowodnić, że istnieją liczby całkowite dodatnie $a$ i $b$, takie, że

$$a^2+a+1 = (n^2+n+1)(b^2+b+1).$$

*Rozwiązanie:*

Biorąc $a = n^2$, $b = n-1$ mamy

$$\frac{a^2+a+1}{b^2+b+1} = \frac{n^4+n^2+1}{(n-1)^2+(n-1)+1} = \frac{n^4+n^2+1}{n^2-n+1} = n^2+n+1.$$

□

**4.** Dla liczby całkowitej dodatnie $a$, definiujemy liczbę $M(a)$ jako liczbę takich liczb całkowitych dodatnich $b$, że $a+b \mid ab$. Znajdź wszystkie $1 \leqslant a \leqslant 2018$ dla których zachodzi $M(a) \geqslant M(b)$ dla każdego $1 \leqslant b \leqslant 2018$.

*Rozwiązanie:*

□

**5.** Niech $a, b, c$ będą takimi liczbami rzeczywistymi dodatnimi, że $\min(ab, bc, ca) \geqslant 1$. Pokazać, że

$$\sqrt[3]{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)} \leqslant \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 + 1.$$

*Rozwiązanie:*

**6.** Znajdź wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takie, że

$$f(x - f(y)) = f(f(x)) - f(y) - 1$$

dla dowolnych liczb całkowitych $x, y$.

*Rozwiązanie:*

**7.** Dane jest $n$ państw. Niech *współczynnik ankapizacji* danego państwa to liczba całkowita z przedziału $[0, N)$. Granice między państwami mają swoją szczelność określoną liczbą rzeczywistą. Ze względu na naturę anarchokapitalizmu, jeżeli w jednym z dwóch graniczących ze sobą państw *współczynnik ankapizacji* jest większy od szczelności granicy między nimi, to te współczynniki obu tych państw są sobie równe. Liczba sposobów ankapizacji to liczba możliwych przyporządkowań *współczynników ankapizacji* do państw, żeby warunek był zachowany. Wykazać, że dla każdej grupy państw istnieje inna możliwa grupa państw, w której każde państwo ma co najwyżej dwóch sąsiadów, i liczba sposobów ankapizacji jest taka sama.

*Rozwiązanie:*

Zapiszmy to zadanie w języku teorii grafów. Dany jest graf nieskierowany $G = (V, E, s)$, gdzie $V$ to zbiór wierzchołków odpowiadających państwom, $E$ to zbiór krawędzi odpowiadających granicom między państwami, a $s : E \to \mathbb{Z}$ to funkcja na krawędziach (możemy bez starty ogólności założyć, że szczelności granic są liczbami całkowitymi). Powiemy, że funkcja $f : S \to \mathbb{Z} \cap [0, N)$ jest *dobra*, gdy $\forall_{uv \in E}(max\{f(u), f(v)\} > s(uv) \Rightarrow f(u) = f(v))$. Wzmocniona teza brzmi wtedy, że dla każdej pary $G$ istnieje graf $G$ taki, że liczba dobrych funkcji dla $G$ jest taka sama, jak liczba dobrych funkcji dla $G'$, i $G'$ jest ścieżką.

Pokażemy rekurencyjną konstrukcję $G'$ wraz z bijekcją ze zbioru dobrych funkcji do $G$ na zbiór dobrych funkcji do $G'$. Gdy graf ma tylko jeden wierzchołek, $G' = G$ oczywiście działa. Załóżmy, że $G = (V, E, s)$ ma więcej niż jeden wierzchołek i jest spójny (gdy nie jest spójny, możemy wykonać konstrukcję na każdej ze spójnych składowych osobno, a potem połączyć je krawędziami o szczelności $N$). Niech $x$ to największa taka liczba całkowita, że graf $H = (V, \{e \in E : s(e) < x\}, s)$ (to jest, graf $G$ z wyrzuconymi krawędziami o szczelności większej lub równej $x$) nie jest spójny, i niech jego spójne składowe to $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Niech $A'_i$ to graf utworzony w wyniku tej rekurencyjnej konstrukcji dla $A_i$ i $N := x + 1$ (konstrukcja istnieje, bo $A_i$ jest mniejsze od $G$). Wtedy graf $G'$ będzie grafem utworzonym z połączenia ścieżek $A'_1, A'_2, \ldots, A'_k$ krawędziami o szczelności $x$ w jedną ścieżkę. Pokażemy teraz, że istnieje bijekcja między dobrymi funkcjami dla $G$ a dobrymi funkcjami dla $G'$. Rozważmy dobrą funkcję $f$ dla $G$. Może zachodzić przypadek, że $\exists_{v \in V} f(v) > x$, z czego wynikałoby, że $f$ jest funkcją stałą (ponieważ $H$ byłoby spójne, gdybyśmy wzięli krawędzie o szczelności mniejszej lub równej $x$), więc w bijekcji ona odpowiada funkcji stałej dla $G'$ o tej samej wartości. W przeciwnym wypadku $\forall_{v \in V} f(v) \leqslant x$, czyli możemy $f$ rozpatrywać osobno w każdym $A_i$, zastosować bijekcję dla nich rekurencyjnie, i otrzymać dobrą funkcję dla grafu $G'$. Analogiczne rozumowanie możemy przeprowadzić w drugą stronę.

Pokazaliśmy zatem dla każdego grafu, że istnieje ścieżka, na której liczba dobrych funkcji jest taka sama, co było do udowodnienia. $\square$

**8.** Dana jest $n$-wymiarowa szachownica o wymiarach $k \times k \times \ldots \times k$. Na niektórych jej polach stoją wieże. Mówimy, że dwie wieże się biją, gdy stoją na polach, które mają wspólną pewną współrzędną. Udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej nieujemnej $s$, spośród $sk^{n-1} + 1$ wież na szachownicy można wybrać $s + 1$, z których żadne dwie się nie biją.

*Rozwiązanie:*

Każde pole na danej $n$-wymiarowej szachownicy można utożsamić z $n$-elementowym ciągiem o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$. Dwie wieże stojące na polach, które odpowiadają ciągom $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ biją się wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego $1 \leqslant i \leqslant n$ zachodzi równość $x_i = y_i$. Musimy więc wykazać, że z dowolnego zbioru $sk^{n-1} + 1$ ciągów $n$-elementowych o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$ można wybrać $s + 1$, w taki sposób, że dowolne dwa z wybranych ciągów różnią się na każdej współrzędnej.

Powiemy, że dwa ciągi $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ są *zgodne* jeżeli istnieje taka liczba całkowita $r$, że $y_i \equiv x_i + r \pmod{k}$ dla dowolnego $i = 1, 2, \ldots, n$. Oczywiście każdy ciąg jest zgodny sam ze sobą i jest to relacja symetryczna. Łatwo ponadto zauważyć, jeżeli zgodne są ciągi $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ z $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ oraz $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ z $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, to ciągi o wyrazach $x_i$, $z_i$ również są zgodne. Oznacza to, że zbiór wszystkich ciągów $n$-elementowych o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$ można podzielić na klasy, w taki sposób, że dwa ciągi należą do jednej klasy wtedy i tylko wtedy, gdy są zgodne. Ponieważ wszystkich rozważanych ciągów jest $k^n$, a dla danego ciągu istnieje dokładnie $k$ ciągów z nim zgodnych (licząc również jego), to takich klas jest dokładnie $k^{n-1}$. Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika więc, że z dowolnego zbioru $sk^{n-1} + 1$ ciągów pewne $s + 1$ znajduje się w jednej klasie, czyli są one parami zgodne. Pozostaje zauważyć, że dwa różne ciągi zgodne różnią się na każdej współrzędnej. Kończy to rozwiązanie zadania. $\square$

**9.** Dana jest szachownica $n \times n$. Dominik i jego Burek grają w grę. Zaczyna Dominik. Na początku na każdym polu szachownicy jest 99 kamieni. W każdym ruchu gracz wybiera wiersz lub kolumnę i usuwa kamień z każdego pola w tym wierszu lub kolumnie. Gracz może wybrać daną kolumnę lub wiersz wtedy, gdy na każdym polu w tej kolumnie lub wierszu jest przynajmniej jeden kamień. Gracz przegrywa gdy nie może wykonać ruchu. Wyznacz wszystkie liczby $n$, dla których Dominik ma strategię wygrywającą.

*Rozwiązanie:*

Pokażemy, że gra kończy się wtedy i tylko wtedy, gdy na szachownicy nie ma żadnego kamienia. Załóżmy przeciwnie, że gra jest zakończona i na pewnym polu $(a, b)$ (pole w $a-$tym wierszu i $b-tej$ kolumnie) jest kamień. To oznacza, że pewne pola $(a, c), (b, d)$ są puste. Niech $w_i, k_i$ oznaczają liczbę wyborów odpowiednio $i-$tego wiersza oraz $i-$tej kolumny. Mamy wtedy $w_a + k_b < 99$ oraz $w_a + k_c = w_d + k_b = 99$. Po dodaniu dwóch ostatnich równań i wykorzystaniu powyższej nierówności dostajemy $w_d + k_c > 99$, co jest niemożliwe, gdyż na polu $(d, c)$ było 99 kamieni. Widzimy teraz, że aby zakończyć grę, zawsze musimy zabrać wszystkie kamienie z szachownicy, czyli wykonać $99n$ ruchów. To oznacza, że Dominik wygra gdy $2 \nmid 99n$, czyli dla nieparzystych $n$. $\square$

**10.** Dany jest trójkąt $ABC$. Punkty $I$ i $J$ są środkami okręgów wpisanego i dopisanego do boku $BC$ w tym trójkącie. Dwusieczna kąta $BAC$ przecina okrąg opisany na trójkącie $ABC$ po raz drugi w punkcie $M$. Punkt $L$ jest środkiem łuku $ABM$. Proste $NJ$ i $NI$ przecinają okrąg opisany na trójkącie $ABC$ odpowiednio w punktach $S$ i $T$, różnych od $N$. Wykazać, że proste $ST$, $BC$ i $IJ$ przecinają się w jednym punkcie.

*Rozwiązanie:*

Zauważmy, że $\sphericalangle NMA = \sphericalangle NAM = \sphericalangle NTM$, skąd dostajemy podobieństwo trójkątów $NIM$ i $NMT$. Na mocy tego podobieństwa dostajemy równość:

$$\frac{NI}{NM} = \frac{NM}{NT},$$

czyli $NM^2 = NI \cdot NT$. Podobnie pokazujemy, że $NM^2 = NJ \cdot NS$.

Na podstawie tych dwóch równości i twierdzenia o potędze punktu otrzymujemy, że punkty $I, T, S$ i $J$ leżą na jednym okręgu. Korzystając teraz z twierdzenia o trzech osiach potęgowych dla okręgów opisanych na czworokątach: $ABMC$, $ITJS$, $BICJ$ dostajemy tezę zadania. $\square$

**11.** Okrąg $\omega$ jest wpisany w trójkąt $ABC$. Punkty $D$ i $E$ są punktami styczności okręgu $\omega$ odpowiednio z bokami $BC$ i $CA$. Okrąg $\tau$ przechodzi przez punkty $B$ i $C$ i jest styczny do $\omega$ w punkcie $X$. Niech $M$ będzie środkiem odcinka $DE$. Wykazać, że punkty $B$, $X$, $M$ i $D$ leżą na jednym okręgu.

*Rozwiązanie:*

Niech $C$ i $P$ będą punktami przecięcia okręgu opisanego na $BXC$ i $AC$, natomiast $S$ i $T$ będą środkami odpowiednio łuków $PC$ i $BC$ okręgu opisanego na $BXC$. Punkty $X, D, T$ leżą na jednej prostej, zatem

$$\sphericalangle BXD = \sphericalangle BXT = \frac{1}{2}\sphericalangle BXC.$$

Z kolei z twierdzenia o symedianie mamy $\sphericalangle DXM = \sphericalangle CXE$. Punkty $X, E, S$ leżą na jednej prostej, zatem

$$\sphericalangle CXE = \sphericalangle CXS = \frac{1}{2}\sphericalangle CXP.$$

Ostatecznie

$$\sphericalangle BXM = \sphericalangle BXD + \sphericalangle DXM = \frac{1}{2}(\sphericalangle BXC + \sphericalangle CXP) =$$
$$= \frac{1}{2}\sphericalangle BXP = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle DCE = \sphericalangle EDC = 180^\circ - \sphericalangle BDM,$$

co należało pokazać. □

**12.** Dany jest równoległobok $ABCD$ i punkty $A_1$ i $C_1$ odpowiednio na bokach $AB$ i $BC$. Proste $AC_1$ i $CA_1$ przecinają się w punkcie $P$. Załóżmy, że okręgi opisane na trójkątach $AA_1P$ i $CC_1P$ przecinają się w punkcie $Q \neq P$, leżącym wewnątrz trójkąta $ABD$. Udowodnij, że $\sphericalangle PDA = \sphericalangle QBA$.

*Rozwiązanie:*

Niech okrąg opisany na trójkącie $AA_1P$ przecina bok $DA$ ponownie w punkcie $A_2$, a okrąg opisany na trójkącie $CC_1P$ przecina $CD$ ponownie w punkcie $C_2$. Teraz

$$\sphericalangle CQP = \sphericalangle PC_1B = \sphericalangle PAA_2 = 180^\circ - \sphericalangle A_2QP,$$

zatem punkty $C$, $Q$ i $A_2$ są współliniowe. Analogicznie $A$, $Q$ i $C_2$ są współliniowe. Mamy teraz

$$\sphericalangle CDA_2 = 180^\circ - \sphericalangle DAA_1 = 180^\circ - \sphericalangle A_2PC,$$

czyli na czworokącie $A_2PCD$ da się opisać okrąg. Analogicznie na czworokącie $A_1BCQ$ da się opisać okrąg. Mamy więc

$$\sphericalangle QBA = \sphericalangle QBA_1 = \sphericalangle QCA_1 = \sphericalangle QCP = \sphericalangle A_2CP = \sphericalangle A_2DP = \sphericalangle ADP.$$

□

## Mecz matematyczny grupy $\mathbb{B}$

**1.** Dane są liczby całkowite dodatnie $a$, $b$, $c$, dla których liczba $a^2 - bc$ jest kwadratem liczby całkowitej. Wykazać, że liczba $2a + b + c$ jest złożona.

*Rozwiązanie:*

Niech $a^2 - bc = x^2$ dla pewnej liczby całkowitej $x$ oraz załóżmy, że $2a + b + c = p$ dla pewnej liczby pierwszej $p$. Odejmując $b + c$ od obu stron równości i podnosząc do kwadratu dostajemy zależność

$$4a^2 = (b + c)^2 + 2p(b + c) + p^2.$$

Wykorzystując pierwszą równość otrzymujemy

$$4x^2 + 4bc = (b + c)^2 + 2p(b + c) + p^2,$$

czyli

$$4x^2 = (b - c)^2 + 2p(b + c) + p^2$$

lub ostatecznie

$$(2x - b + c)(2x + b - c) = p(2b + 2c + p).$$

W szczególności $p$ dzieli jeden z czynników występujących po lewej stronie równości. Ze względu na symetrię zadania względem $b$ i $c$ możemy założyć, że $p|2x - b + c$. Zauważmy, że oba czynniki występujące po po prawej stronie równości są dodatnie. Czynniki po lewej stronie są zatem tego samego znaku. Jeżeli jednak $b \geqslant c$, to $2x + b - c > 0$ i podobnie jeżeli $b \leqslant c$, to $2x - b + c > 0$. Obie te liczby są zatem dodatnie. Z podzielności $p|2x - b + c$ wynika więc oszacowanie $p \leqslant 2x - b + c$. Z nierówności $a > x$ dostajemy jednak

$$2a + b + c = p \leqslant 2x - b + c < 2a - b + c < 2a + b + c.$$

Jest to sprzeczność, która kończy rozwiązanie zadania. $\square$

**2.** Udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej $n$ liczba

$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor$$

jest parzysta.

*Rozwiązanie:*

Niech $d(n)$ oznacza liczbę dodatnich dzielników liczby całkowitej $n > 0$. Wykażemy, że dla dowolnej liczby całkowitej $n$ zachodzi równość

$$d(1) + d(2) + \ldots + d(n) = \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor .$$

Istotnie, lewa strona równania zlicza dzielniki kolejnych liczb od 1 do $n$. Prawa strona natomiast dla każdej liczby $i = 1, 2, \ldots, n$ zlicza dla ilu liczb od 1 do $n$ jest ona jej dzielnikiem – $i$ jest bowiem dzielnikiem każdej z liczb $i, 2i, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \cdot i$, czyli jest dzielnikiem dokładnie $\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$ z tych liczb liczb. Obie strony równości zliczają więc łączną liczbę dzielników liczb od 1 do $n$.

Zauważmy dalej, że liczba $d(i)$ jest nieparzysta wtedy i tylko wtedy, gdy $i$ jest kwadratem liczby całkowitej. Istotnie, wszystkie dzielniki liczby $i$ można pogrupować w pary postaci $\{d, \frac{i}{d}\}$. Nieparzystość liczby dzielników jest zatem równoważna temu, że w pewnej parze znajdzie się dwa razy ta sama liczba, co oznacza, że $i = d^2$. Korzystając z tej obserwacji oraz udowodnionej wcześniej równości otrzymujemy

$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor = d(1) + d(2) + \ldots + d(n) \equiv m \pmod 2,$$

gdzie $m$ oznacza liczbę kwadratów liczb całkowitych w przedziale od 1 do $n$. Nietrudno jednak zauważyć, że $m = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Stąd już wynika parzystość sumy danej w zadaniu. $\square$

**3.** Wyznaczyć wszystkie ciągi arytmetyczne $a_1, a_2, \ldots$ dla których istnieje liczba naturalna $N > 1$ taka, że dla dowolnej liczby naturalnej $k$ zachodzi podzielność

$$a_1 a_2 \ldots a_k \mid a_{N+1} a_{N+2} \ldots a_{N+k}.$$

*Rozwiązanie:*

Niech $a_n = a_0 + nd$. Jeśli $a_0 = 0$ lub $d = 0$, to $\{a_n\}_{n \geqslant 0}$ spełnia postulowane warunki. Bez szkody możemy więc założyć, że , $a_0 \cdot d \neq 0$ oraz $\mathrm{NWD}(a_0, d) = 1$.

Zauważmy, że dla $k > N$ mamy

$$M := a_1 \cdot a_2 \cdots a_N \mid a_{k+1} \cdot a_{k+2} \cdots a_{k+N} =: R.$$

Ponieważ $M > N!$, to istnieje liczba pierwsza $p$ taka, że $v_p(M) > v_p(N!)$, gdzie $v_p(n)$ oznacza największy wykładnik potęgi $p$, która dzieli $n$.

Wobec tego biorąc $k$ takie, że $p^{v_p(M)} \mid M \mid a_0 + dk$, to

$$R \equiv d^N N! \pmod{p^{v_p(M)}}$$

co jest niemożliwe, gdyż $\mathrm{NWD}(p, d) = 1$.

Ostatecznie szukane ciągi odpowiadają ciągom takim, że $a_0 = 0$ lub $d = 0$ tzn. $a_n = nd$ lub $a_n = \mathrm{const}$. $\square$

**4.** Udowodnić, że dla liczb dodatnich $a, b, c, d > 0$ prawdziwa jest nierówność

$$(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)(1+\sqrt[4]{abcd})^4 \geqslant 16abcd(1+a)(1+b)(1+c)(1+d).$$

*Rozwiązanie:*
Wykażemy następujący

**Lemat.** *Dla dowolnych liczb dodatnich $x$, $y$ prawdziwa jest nierówność*

$$\frac{x+y}{(1+x)(1+y)} \geqslant \frac{2\sqrt{xy}}{(1+\sqrt{xy})^2}.$$

*Dowód lematu.* Po przemnożeniu przez mianowniki i uproszczeniu wyrazów podobnych dana nierówność sprowadza się do postaci

$$x^2y + xy^2 + x + y \geqslant 2\sqrt{x^3y^3} + 2\sqrt{xy}.$$

Pozostaje zauważyć, że na mocy nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną prawdziwe są zależności

$$x^2y + xy^2 \geqslant 2\sqrt{x^2y \cdot xy^2} = 2\sqrt{x^3y^3} \quad \text{oraz} \quad x+y \geqslant 2\sqrt{xy}.$$

Dowodzi to lematu.

Przechodzimy do głównej części rozwiązania. Korzystając z lematu otrzymujemy

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)}{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)} = \frac{a+b}{(1+a)(1+b)}\frac{c+d}{(1+c)(1+d)}(b+c)(a+d)$$

$$\geqslant \frac{2\sqrt{ab}}{(1+\sqrt{ab})^2} \cdot \frac{2\sqrt{cd}}{(1+\sqrt{cd})^2} \cdot (b+c)(a+d) = \frac{4\sqrt{abcd}(b+c)(a+d)}{(1+\sqrt{ab})^2(1+\sqrt{cd})^2}.$$

Z nierówności Cauchyego-Schwarza wynika oszacowanie $(b+c)(a+d) \geqslant (\sqrt{ab}+\sqrt{cd})^2$. Łącząc je z udowodnionym przez nas lematem dla $x = \sqrt{ab}$ oraz $y = \sqrt{cd}$ dostajemy

$$\frac{4\sqrt{abcd}(b+c)(a+d)}{(1+\sqrt{ab})^2(1+\sqrt{cd})^2} \geqslant \frac{4\sqrt{abcd}(\sqrt{ab}+\sqrt{cd})^2}{(1+\sqrt{ab})^2(1+\sqrt{cd})^2} \geqslant \frac{(4\sqrt{abcd}) \cdot (2\sqrt{ab}) \cdot (2\sqrt{cd})}{(1+\sqrt[4]{abcd})^4}$$

$$= \frac{16abcd}{(1+\sqrt[4]{abcd})^4}.$$

Wykazaliśmy w ten sposób, że

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)}{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)} \geqslant \frac{16abcd}{(1+\sqrt[4]{abcd})^4},$$

co jest równoważne tezie zadania. $\square$

**5.** Dany jest ciąg liczb całkowitych $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ taki, że $a_0 = 1, a_1 = 3$ oraz

$$a_{n+2} = 1 + \left\lfloor \frac{a_{n+1}^2}{a_n} \right\rfloor \quad \text{dla } n \geqslant 0.$$

W zależności od $n$, obliczyć wartość wyrażenia $a_n \cdot a_{n+2} - a_{n+1}^2$.

*Rozwiązanie:*

Pokażemy, że dla dowolnej liczby naturalnej $n$ zachodzi równość

$$a_n \cdot a_{n+2} - a_{n+1}^2 = 2^n.$$

W tym celu rozpatrzmy ciąg $\{b_n\}_{n\geqslant 0}$ zdefiniowany następująco: $b_0 = a_0 = 1$, $b_1 = a_1 = 3$ oraz

$$b_{n+2} = 4b_{n+1} - 2b_n.$$

Wówczas łatwo pokazać stosując indukcję względem $n$, że dla dowolnej liczby naturalnej $n$ zachodzi równość

$$b_{n+2}b_n - b_{n+1}^2 = 2^n.$$

Ponadto widzimy, że $b_{n+1} > 2b_n$, więc $b_n > 2^n$ dla dowolnego naturalnego $n$. Wobec tego

$$\left\lfloor b_{n+2} - \frac{b_{n+1}^2}{b_n} \right\rfloor = 0,$$

a ponieważ ciąg $\{b_n\}_{n\geqslant 0}$ jest ciągiem liczb całkowitych, to $b_{n+2} = 1 + \left\lfloor \frac{b_{n+1}^2}{b_n} \right\rfloor$, skąd oczywiście mamy, że $b_n = a_n$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. $\square$

**6.** Wyznaczyć wszystkie pary wielomianów $(P(x), Q(x))$ o współczynnikach rzeczywistych, które dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ spełniają warunek

$$P(x)Q(x+1) - P(x+1)Q(x) = 1.$$

*Rozwiązanie:*

Załóżmy najpierw, że stopień wielomianów $P$ i $Q$ nie przekracza 1, tzn. że można je zapisać w postaci $P(x) = ax + b$ oraz $Q(x) = cx + d$ dla pewnych liczb rzeczywistych $a,\ b,\ c,\ d$. Dane równanie przybiera wówczas postać

$$(ax+b)(cx+c+d) - (ax+a+b)(cx+d) = bc - ad = 1.$$

Równość $bc - ad = 1$ jest zatem równoważna danemu warunkowi dla wielomianów rozważanej postaci. Udowodnimy, że są to wszystkie rozwiązania zadania również w przypadku ogólnym.

Załóżmy, że $P(x)$ jest wielomianem stopnia $n$ o współczynniku wiodącym $a_n$, zaś $Q(x)$ jest wielomianem stopnia $m$ o współczynniku wiodącym $b_m$. Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona łatwo zweryfikować, iż współczynnik przy $x^{n-1}$ w wielomianie $P$ jest równy $na_n$. Analogicznie, współczynnik przy $x^{m-1}$ w wielomianie $Q$ jest równy $ma_m$. Wynika stąd, że współczynnik przy $x^{m+n-1}$ w wielomianie $P(x)Q(x+1) - P(x+1)Q(x)$ jest równy $a_nb_m(n-m)$. Z równości danej w zadaniu wynika, że jeżeli tylko $m+n-1 > 0$, to współczynnik ten jest równy 0, czyli $m = n$. W przypadku $m+n-1 = 0$ dochodzimy do sytuacji rozważanej w poprzednim fragmencie rozumowania. Jeżeli istnieje więc para wielomianów $(P, Q)$, która spełnia dany warunek i z których co najmniej jeden posiada stopień większy niż 1, to $\deg P = \deg Q = n \geqslant 2$. Rozważmy teraz wielomian $Q_0(x) = Q(x) - \frac{b_n}{a_n}P(x)$. Zauważmy, że

$$P(x)Q_0(x+1) - P(x+1)Q_0(x)$$

$$= P(x)Q(x+1) - \frac{b_n}{a_n}P(x)P(x+1) - P(x+1)Q(x) + \frac{b_n}{a_n}P(x)P(x+1)$$

$$= P(x)Q(x+1) - P(x+1)Q(x) = 1.$$

Wynika stąd, że para wielomianów $(P, Q_0)$ również spełnia warunek dany w zadaniu. Co więcej, łatwo sprawdzić, że stopień $Q_0$ jest mniejszy od $n$, a jednocześnie założyliśmy, że $n \geqslant 2$. Para wielomianów $(P, Q_0)$ o różnych stopniach spełnia więc dany warunek i $\deg P \geqslant 2$. Jest to sprzeczność z poprzednim fragmentem rozumowania. Wielomiany postaci $P(x) = ax+b$, $Q(x) = cx+d$, gdzie $bc - ad = 1$ stanowią więc jedyne rozwiązanie zadania. □

**7.** Dany jest skończony zbiór osób $\mathcal{S}$ o następującej własności: dowolne dwie osoby o tej samej liczbie znajomych w $\mathcal{S}$ nie mają wspólnych znajomych w $\mathcal{S}$. Udowodnić, że jeżeli w $\mathcal{S}$ istnieje osoba, która ma przynajmniej jednego znajomego, to w $\mathcal{S}$ istnieje również osoba, która posiada dokładnie jednego znajomego.

*Rozwiązanie:*

Rozważmy osobę $A$ ze zbioru $S$, która posiada maksymalną możliwą liczbę $n$ znajomych. Z założenia zadania wynika, że $n > 0$. Oznaczmy znajomych $A$ jako $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ i zauważmy, że dla dowolnych $1 \leqslant i < j \leqslant n$ osoby $A_i$, $A_j$ posiadają różne liczby znajomych – $A$ jest bowiem ich wspólnym znajomym. Oczywiście, każda osoba $A_i$ posiada niezerową liczbę znajomych, gdyż $A$ jest jej znajomym. Co więcej, żadna z osób $A_i$ nie posiada więcej niż $n$ znajomych, gdyż przeczyłoby to wyborowi $A$. Skoro liczba znajomych każdej z $n$ osób $A_i$ należy do zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ i żadne dwie osoby nie posiadają tej samej liczby znajomych, to istnieje osoba $A_i$, która posiada dokładnie 1 znajomego. Kończy to dowód. □

**8.** W wierzchołkach grafu skończonego bez pętli i krawędzi wielokrotnych umieszczono lampy. Ruch polega na tym, że wybieramy lampę, a następnie zmieniamy stan tej lampy oraz wszystkich lamp sąsiednich, tj. zapalamy zgaszone i gasimy zapalone. Na początku wszystkie lampy są zgaszone. Rozstrzygnąć w zależności od grafu, czy można je wszystkie zapalić za pomocą skończonej liczby ruchów.

*Rozwiązanie:*

Udowodnimy nie wprost, że dla każdego grafu taka operacja jest możliwa. Przypuśćmy zatem, że $G$ jest grafem, dla którego nie da się tego zrobić i spośród takich grafów ma najmniej wierzchołków. Rozważmy graf $G$ z usuniętym jednym wierzchołkiem. Z założenia wiemy, że w tym mniejszym grafie istnieje sekwencja ruchów zapalająca wszystkie lampy tego grafu. Gdyby ta sama sekwencja w grafie $G$ zapalała również lampę w pozostałym wierzchołku, mielibyśmy sprzeczność. Powtarzając to rozumowanie dla wszystkich wierzchołków grafu $G$ widzimy, że istnieje sekwencja ruchów zmieniająca stan wszystkich wierzchołków poza jednym dowolnie wybranym. Wykonując dwie takie sekwencje dla dwóch różnych wierzchołków spowodujemy zmianę stanu tylko tych dwóch, resztę pozostawiając bez zmian. To oznacza, że gdyby w pewnym momencie liczba lamp zgaszonych była parzysta, to zapalając po dwie uzyskalibyśmy sprzeczność. W takim razie graf $G$ ma nieparzystą liczbę wierzchołków, a każdy ruch powoduje zmianę stanu parzystej liczby lamp, co oznacza, że każdy wierzchołek ma nieparzystą liczbę sąsiadów. Zatem suma liczb sąsiadów wszystkich wierzchołków jest nieparzysta, co jest jednak niemożliwe, bo suma tych liczb to podwojona liczba krawędzi. Sprzeczność kończy dowód. □

**9.** Dany jest zbiór $n \geqslant 3$ punktów płaszczyzny $\mathcal{F}$, z których żadne dwa nie są współliniowe. Wykazać, że istnieje taki zbiór $\mathcal{T}$ składający się z $2n-5$ punktów płaszczyzny, że każdy trójkąt wyznaczony przez 3 różne punkty zbioru $\mathcal{F}$ zawiera punkt ze zbioru $\mathcal{T}$.

*Rozwiązanie:*

Niech $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots ,(x_n, y_n)$ będą punktami płaszczyzny zbioru $\mathcal{F}$,, przy czym załóżmy, że $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ — możemy tak założyć, gdyż bez straty ogólności możemy obrócić płaszczyznę tak aby liczby $x_i$ były różne, a potem przenumerować punkty. Rozważamy odległość punktu $(x_i, y_i)$ do prostej przechodzącej przez punkty $(x_j, y_j)$, $(x_k, y_k)$ dla $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$ oraz $i \neq j \neq k \neq i$. Spośród wszystkich takich odległości wybierzmy najmniejszą i oznaczmy przez $d$ jej połowę.

Zdefiniujmy zbiór $\mathcal{T}$ składający się z $2n-4$ punktów jako

$$\mathcal{T} = (x_i, y_i - d), (x_i, y_i + d) \colon i = 2, 3, \ldots, n-1.$$

Rozważmy dowolny trójkąt składający się z punktów zbioru $\mathcal{F}$ i załóżmy, że odpowiadające im indeksy to $k < l < m$. Łatwo zauważyć, że wówczas jeden z punktów $(x_l, y_l - d)$, $(x_l, y_l + d)$ znajduje się wewnątrz tego trójkąta — wynika to stąd, że prosta równoległa do osi $OY$ przechodząca przez punkt $(x_l, y_l)$ przecina odcinek łączący punkty $(x_k, y_k)$, $(x_m, y_m)$ gdyż $x_k < x_l < x_m$. A zatem $\mathcal{T}$ jest zbiorem $2n-4$ punktów spełniających dany warunek. Zauważmy jednak, że jeden punkt ze zbioru $\mathcal{T}$ jest niepotrzebny. Istotnie, otoczka wypukła zbioru $\mathcal{F}$ jest wielokątem wypukłym o wierzchołkach w zbiorze $\mathcal{F}$. Jako, że otoczka zawiera co najmniej 3 wierzchołki możemy wybrać wierzchołek $(x_i, y_i)$ taki, że $1 < i < n$. Jasne jest, że wówczas jeden z punktów $(x_i, y_i - d), (x_i, y_i + d)$ leży po za otoczka wypukła zbioru $\mathcal{F}$, czyli nie leży we wnętrzu żadnego trójkąta wyznaczonego przez trzy różne punkty zbioru $\mathcal{F}$. A zatem usuwając go otrzymujemy zbiór $2n-5$ punktów, który spełnia żądany warunek. $\square$

**10.** Niech $E$ będzie sumą mnogościową pewnej skończonej liczby kół otwartych na płaszczyźnie. Udowodnić, że wśród tych kół istnieją parami rozłączne koła $K_1, K_2, \ldots, K_n$ takie, że

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{n} 3K_i,$$

gdzie dla koła $K$ otwartego o środku $S$ i promieniu $r$, przez $3K$ oznaczamy koło otwarte o środku $S$ i promieniu $3r$.

*Rozwiązanie:*

Niech $K_1$ będzie kołem o maksymalnym promieniu z danej rodziny kół. Niech $K_2$ będzie kołem o maksymalnym promieniu, które jest rozłączne z $K_1$. Podobnie, niech $K_3$ będzie kołem o maksymalnym promieniu, które jest rozłączne z $K_1$ i $K_2$. Kontynuując w ten sposób dopóki jest to możliwe otrzymujemy ciąg parami rozłącznych kół $K_1,\ K_2,\ \ldots,\ K_n$. Wykażemy, że posiada on żądaną własność.

Rozważmy dowolny element $x \in E$ i udowodnijmy, że $x \in \bigcup_{i=1}^{n} 3K_i$. Istnieje takie koło $K$, że $x \in K$. Jeżeli $K = K_i$ dla pewnego $1 \leqslant i \leqslant n$, to nie ma czego dowodzić. W przeciwnym wypadku, z konstrukcji kół $K_1,\ K_2,\ \ldots,\ K_n$ wynika, że istnieje takie koło $K_i$, którego promień jest nie mniejszy niż promień $K$ oraz $K_i \cap K \neq \emptyset$. Wówczas oczywiście $K \subset 3K_i$, a więc $x \in 3K_i$. Kończy to rozwiązanie zadania. $\square$

**11.** Punkty $M$ i $N$ leżą na boku $BC$ trójkąta $ABC$, przy czym punkt $M$ leży na odcinku $BN$ tak, że $BM = CN$. Punkty $P$ i $Q$ leżą na odcinkach $AN$ i

$AM$, odpowiednio, oraz spełnione są równości $\sphericalangle PMC = \sphericalangle MAB$ i $\sphericalangle QNB = \sphericalangle NAC$. Pokazać, że $\sphericalangle QBC = \sphericalangle PCB$.

*Rozwiązanie:*

Niech okrąg opisany na trójkącie $PMC$ przecina prostą $AN$ w punkcie $S$. Podobnie załóżmy, że okrąg opisany na trójkącie $BQN$ przecina prostą $AM$ w punkcie $T$.

Pokażemy, że punkty $M$, $N$ , $S$ i $T$ leżą na okręgu, co po łatwym rachunku na kątach implikuję tezę zadania. Ponieważ $\sphericalangle ATB = \sphericalangle QNB = \sphericalangle PAC$ oraz $\sphericalangle CSA = \sphericalangle CMP = \sphericalangle BAT$, to trójkąty $ACS$ i $TBA$ są podobne. Wobec tego

$$\frac{AS}{AT} = \frac{AC}{BT} = \frac{AC}{CN} \cdot \frac{BM}{BT} = \frac{\sin \sphericalangle ANM}{\sin \sphericalangle CAS} \cdot \frac{\sin \sphericalangle BTM}{\sin \sphericalangle AMN} = \frac{\sin \sphericalangle ANM}{\sin \sphericalangle AMN} = \frac{AM}{AN}.$$

Zatem $AS \cdot AN = AM \cdot AT$, czyli punkty $N$, $M$, $S$, $T$ leżą na jednym okręgu.

**12.** Punkt $M$ jest środkiem odcinka boku $BC$ trójkąta $ABC$ wpisanego w okrąg $\Omega$. Punkty $E$ i $F$ leżą na bokach $CA$ i $AB$, odpowiednio, przy czym $ME = MF$. Styczne w punktach $E$ i $F$ do okręgu $\Gamma$ opisanego na trójkącie $AEF$ przecinają się w punkcie $S$. Okręgi $\Omega$ i $\Gamma$ przecinają się w punkcie $G \neq A$. Pokazać, że $\sphericalangle AGS = 90°$.

*Rozwiązanie:*

Niech $N$ będzie środkiem odcinka $EF$. Wówczas punkty $M, N$ i $S$ leżą na jednej prostej. Przyjmijmy, że styczne w punktach $B$ i $C$ do $\Omega$ przecinają się w punkcie $T$.

Podobieństwo spiralne o środku w punkcie $G$ przekształca punkty $N, E, F, S$ na punkty odpowiednio $M, B, C, T$. Zatem

$$\sphericalangle GST = \sphericalangle GNM = \sphericalangle GMT,$$

więc $GSMT$ jest czworokątem na którym można opisać okrąg. Wykorzystując twierdzenie o symedianie dostajemy ciąg równości

$$\begin{aligned} &\sphericalangle BGT = \sphericalangle MGC = \sphericalangle BMG - \sphericalangle MCG = \sphericalangle BMN - \sphericalangle GMN - \sphericalangle MCG = \\ &= \sphericalangle BMN - \sphericalangle GCE - \sphericalangle MCG = \sphericalangle TMN - 90° - \sphericalangle BCA = \\ &= 180° - \sphericalangle SGT - 90° - (180° - \sphericalangle BGA) = \sphericalangle BGT + \sphericalangle SGA - 90°. \end{aligned}$$

Wobec tego $\sphericalangle AGS = 90°$. □

# Spis treści