
Jagiellońskie Warsztaty Olimpijskie 2022/2023

Spotkanie III

Niezmienniki i Pólniezmienniki

Zadanie 1. Na okręgu rozmieszczono n liczb, $n \geq 4$. Jeśli dla pewnych liczb a, b, c, d następujących bezpośrednio po sobie, wyrażenie $(a - d)(b - c)$ jest ujemne, to liczby b i c zamieniamy miejscami. Udowodnić, że tę operację uda się przeprowadzić jedynie skończoną liczbę razy.

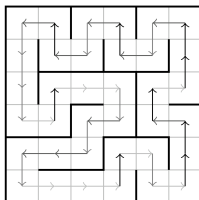
Zadanie 2. Dane są liczby całkowite dodatnie $a_1, a_2, \dots, a_n$. Operacja polega na wyborze dwóch różnych liczb takich, że żadna nie dzieli drugiej i zastąpieniu ich przez ich NWD oraz NWW. Udowodnić, że po pewnym czasie nie będziemy mogli wykonać ruchu.

Zadanie 3. Na stole leży igła. Dozwolone jest obracanie igły o 45° wokół obu jej końców. Czy po kilku takich obrotach jest możliwe, aby igła wróciła na swoje miejsce, ale jednocześnie jej końce zostały zamienione?

Zadanie 4. Na tablicy napisano $n \geq 3$ dodatnich liczb całkowitych. Ruch polega na wybraniu trzech liczb a, b, c napisanych na tablicy takich, że są bokami niezdegenerowanego trójkąta nierównobocznego i zastąpieniu ich liczbami $a + b - c, b + c - a$ i $c + a - b$. Udowodnić, że nie istnieje nieskończony ciąg ruchów.

Zadanie 5. Wykonano nieparzystą ilość obrotów kostką Rubika. Czy można uzyskać konfigurację początkową przy pomocy parzystej liczby obrotów? Za jeden obrót uważamy obrót pewnej ściany o 90° .

Zadanie 6. Rysunek przedstawia *labirynt* (zamkniętą pętlę przechodzącą przez każde pole dokładnie jeden raz) dla kwadratu 6×6 o następującej własności: przemierzając labirynt musimy wykonać tyle samo kroków w 4 kierunkach – góra, dół, lewo, prawo.



Czy można zaprojektować labirynt na kwadracie 8×8 ?

Zadanie 7. Alicja i Bob grają w grę. Na początku Alicja zapisuje na tablicy liczbę całkowitą dodatnią. Bob zastępuje liczbę n na tablicy liczbą postaci $n - a^2$, gdzie a jest liczbą całkowitą dodatnią. Amy natomiast liczbę n na tablicy zastępuje liczbą n^k , gdzie k jest liczbą całkowitą dodatnią. Gracze wykonują ruchy naprzemiennie, Bob zaczyna i wygra jeśli na końcu pojawi się 0. Czy Alicja może powstrzymać Boba przed zwycięstwem?

Zadanie 8. Początkowo na tablicy zapisana jest para liczb $(1, 1)$. Jeżeli jedna z par $(x, y-1)$ i $(x+y, y+1)$ jest zapisana na tablicy dla jakichś x i y , to możemy zapisać na tablicy drugą parę. Podobnie, jeśli na tablicy zapisana jest jedna z par (x, xy) i $(\frac{1}{x}, y)$ to możemy zapisać drugą parę. Udowodnić, że w każdej dodanej parze liczb, pierwsza współrzędna będzie dodatnia.

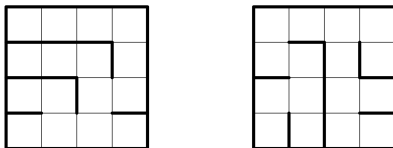
Zadanie 9. Wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych spełnia równości

$$P(-1) = -4, \quad P(-3) = -40 \quad \text{oraz} \quad P(-5) = -156.$$

Jaka jest największa liczba liczb całkowitych x dla których $P(P(x)) = x^2$?

Zadanie 10. Wewnątrz kwadratu zaznaczono kilka punktów i połączono je odcinkami między sobą i z wierzchołkami kwadratu, tak aby odcinki się nie przecinały (poza końcami). W rezultacie kwadrat został podzielony na trójkąty, tak aby wszystkie zaznaczone punkty były wierzchołkami trójkątów, a żaden z nich nie leżał na boku innego trójkąta. Dla każdego zaznaczonego punktu i dla każdego wierzchołka kwadratu obliczono liczbę wychodzących z niego odcinków. Czy to możliwe, aby wszystkie te liczby okazały się równe?

Zadanie 11. *Labirynt* składa się z kwadratowej siatki $n \times n$ podzielonej na kwadraty jednostkowe oraz wyróżnionych odcinków jednostkowych wewnątrz kwadratu tworzących *ściany*, których nie można przekroczyć. Przykładowo:



Rozważmy dwa labirynty, w lewym górnym rogu każdego z nich znajduje się robot. Robot może zakodować listę ruchów we wszystkich kierunkach (góra, dół, prawo, lewo). Roboty będą podążać niezależnie według tej samej listy ruchów. Dla każdego z ruchów, robot przemieszcza się o jeden kwadrat w tym kierunku, lub nie robi nic jeśli napotka ścianę na swojej drodze. Następnie realizuje następny ruch z listy aż do jej końca.

Przypuśćmy, że istnieje taka lista ruchów, która wyśle każdego z robotów niezależnie z lewego górnego kwadratu do prawego dolnego. Udowodnić, że istnieje również lista ruchów według której roboty niezależnie dotrą w swoich labiryntach do prawego dolnego kwadratu w tym samym czasie. W powyższym przykładzie następująca lista ruchów spełnia warunki zadania: ‘prawo’, ‘prawo’, ‘dół’, ‘dół’, ‘dół’, ‘prawo’, ‘dół’, ‘dół’, ‘lewo’, ‘dół’, ‘prawo’.

Zadanie 12. Trzech graczy grają w *kamień-papier-nożyce*. Podczas rundy każdy z graczy pokazuje jeden z trzech kształtów. Zasady są następujące: kamień wygrywa z nożycami, nożyce wygrywają z papierem a papier wygrywa z kamieniem. Jeśli podczas rundy dokładnie dwa różne kształty zostały pokazane (a zatem jeden z nich dwa razy), to przyznaje się po jednym punkcie graczem, którzy pokazali wygrywający kształt, w przeciwnym wypadku brak dodatkowych punktów. Po kilku takich rundach okazało się że każdy z kształtów został pokazany taką samą liczbą razy. Udowodnić, że suma punktów po tych rundach jest podzielna przez 3.