# Obóz przygotowawczy do Olimpiady Matematycznej

Jodłówka Tuchowska

24 - 26 października 2014r.

# Wyniki

| | | | 25 października | | | | 26 października | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Σ |
| 1. | Artur | Zubilewicz | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 48 |
| 2. | Jakub | Węgrecki | 6 | 6 | 6 | 5 | 6 | 0 | 0 | 6 | 35 |
| 3. | Jan | Boruch | 6 | 6 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 20 |
| 4. | Katarzyna | Wodzińska | 6 | 6 | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 | 2 | 20 |

| | | | 25 października | | | | 26 października | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Σ |
| 1. | Mikołaj | Sikora | 2 | 6 | 6 | 0 | 6 | 6 | 5 | 0 | 31 |
| 2. | Edyta | Garbarz | 2 | 2 | 0 | 0 | 6 | 6 | 5 | 2 | 23 |
| 3. | Krzysztof | Pióro | 5 | 2 | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 | 2 | 15 |
| 4. | Maciej | Płachta | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 6 | 0 | 2 | 14 |
| 5. | Michał | Panek | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 | 11 |
| 6. | Kamil | Poniewierski | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 2 | 7 |
| 7. | Magdalena | Karaś | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

# Zawody indywidualne

**1.** Każdemu wierzchołkowi 2014−kąta foremnego trzeba przyporządkować pewną dodatnią liczbę rzeczywistą. Czy możliwe jest takie przyporządkowanie, w którym każda liczba jest równa wartości bezwzględnej różnicy liczb, które z nią sąsiadują? Odpowiedź uzasadnij.

**2.** Punkt $P$ leży wewnątrz trójkąta $ABC$ i spełnia warunki:

$$\angle PAB = \angle PCA \quad \text{oraz} \quad \angle PAC = \angle PBA.$$

Punkt $O$ jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $ABC$. Dowieść, że jeżeli $O \neq P$, to kąt $APO$ jest prosty.

**3** Dana jest liczba pierwsza $p > 3$ oraz takie liczby całkowite dodatnie $a$, $b$, $c$, że $a + b + c = p + 1$ oraz liczba $a^3 + b^3 + c^3 - 1$ jest podzielna przez $p$. Udowodnić, że co najmniej jedna z liczb $a$, $b$, $c$ jest równa 1.

**4.** Znaleźć wszystkie funkcje $f$ określone na zbiorze liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste takie, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x$ i $y$ spełniona jest równość:

$$f(xf(y) + x) = xy + f(x).$$

**5.** Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończony ciąg liczb naturalnych taki, że żaden wyraz tego ciągu i żadna suma dowolnej liczby wyrazów tego ciągu nie jest potęgą liczby naturalnej o wykładniku całkowitym większym od 1.

**6.** Punkt $M$ jest środkiem boku $AB$ trójkąta ostrokątnego $ABC$. Punkt $P$ leży na odcinku $AB$, a punkty $S_1$ i $S_2$ są środkami okręgów opisanych odpowiednio na trójkątach $APC$ i $BPC$. Wykazać, że środek odcinka $S_1S_2$ leży na symetralnej odcinka $CM$.

**7.** Dana jest tablica rozmiaru $2n \times 2n$, w której $3n$ pól pomalowano na czarno. Wykazać, że można tak wybrać $n$ kolumn oraz $n$ wierszy, by każde czarne pole znalazło się w pewnym wybranym wierszu lub w pewnej wybranej kolumnie.

**8.** Znaleźć wszystkie funkcje $f$ określone na zbiorze liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste takie, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x$ i $y$ spełniona jest równość:

$$f(x^2) + f(xy) = f(x)f(y) + yf(x) + xf(x + y).$$

# Dzień drugi grupy młodszej

**1.** Dane są dodatnie liczby całkowite $a$ i $b$. Wykaż, że jeżeli liczba $a^2$ jest podzielna przez liczbę $a+b$, to także liczba $b^2$ jest podzielna przez liczbę $a+b$.

**2.** Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $AD+BC=CD$. Dwusieczne kątów $BCD$ i $CDA$ przecinają się w punkcie $S$. Udowodnij, że $AS=BS$.

**3.** Na płaszczyźnie zaznaczono $n$ punktów ($n \geqslant 3$), z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Każdy z tych punktów pomalowano na jeden z trzech kolorów, przy czym każdego koloru użyto przynajmniej raz. Udowodnij, że istnieje taki trójkąt o wierzchołkach w zaznaczonych punktach, którego każde dwa wierzchołki mają różne kolory i do wnętrza którego nie należy żaden zaznaczony punkt.

**4.** Znaleźć wszystkie funkcje $f$ określone na zbiorze liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste takie, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x$ i $y$ spełniona jest równość:

$$f(x^2+y)=f(x)+f(y^2)$$

# Rozwiązania

Zawody indywidualne

**1.** Każdemu wierzchołkowi 2014−kąta foremnego trzeba przyporządkować pewną dodatnią liczbę rzeczywistą. Czy możliwe jest takie przyporządkowanie, w którym każda liczba jest równa wartości bezwzględnej różnicy liczb, które z nią sąsiadują? Odpowiedź uzasadnij.

*Rozwiązanie:*

Przypuśćmy, że takie przyporządkowanie istnieje oraz niech $a$ będzie największą spośród wszystkich przyporządkowanych liczb. Oznaczmy ponadto przez $b$ i $c$ liczby sąsiadujące z liczbą $a$ oraz przyjmijmy, że $b \geqslant c$. Skoro liczba $a$ jest największa spośród rozpatrywanych liczb, więc $b \leqslant a$. Z drugiej strony, ponieważ $c > 0$, więc $b > b - c = |b - c| = a$. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że opisane w treści zadania przyporządkowanie nie istnieje.

**2.** Punkt $P$ leży wewnątrz trójkąta $ABC$ i spełnia warunki:

$$\angle PAB = \angle PCA \quad \text{oraz} \quad \angle PAC = \angle PBA.$$

Punkt $O$ jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $ABC$. Dowieść, że jeżeli $O \neq P$, to kąt $APO$ jest prosty.

*Rozwiązanie:*

Oznaczmy przez $K$, $L$, $M$ odpowiednio punkty przecięcia prostych $AP$, $BP$, $CP$ z okręgiem opisanym na trójkącie $ABC$. Na mocy równości $\angle BAK = \angle ACM$ długości łuków $BK$ i $AM$ są równe. Analogicznie, długości łuków $KC$ i $LA$ są równe. Odcinki $LC$, $AK$, $MB$ są więc równoległe oraz mają wspólną symetralną, przechodzącą przez punkt $O$. Na tej symetralnej leży również punkt $P$, jako punkt przecięcia przekątnych $MC$ i $BL$ trapezu równoramiennego $MBCL$. Zatem w szczególności $\angle APO = 90°$.

**3** Dana jest liczba pierwsza $p > 3$ oraz takie liczby całkowite dodatnie $a$, $b$, $c$, że $a + b + c = p + 1$ oraz liczba $a^3 + b^3 + c^3 - 1$ jest podzielna przez $p$. Udowodnić, że co najmniej jedna z liczb $a$, $b$, $c$ jest równa 1.

*Rozwiązanie:*

Zauważmy, że:

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + b^2a + b^2c + c^2b + c^2a + a^2c + 2abc) = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a).$$

Zgodnie z warunkami zadania liczby $a+b+c$ oraz $a^3+b^3+c^3$ dają z dzielenia przez $p$ resztę 1, a więc na mocy powyższej tożsamości liczba $3(a+b)(b+c)(c+a)$ jest podzielna przez $p$.

Skoro $p$ jest liczbą pierwszą różną od 3, to któryś z czynników $a+b$, $b+c$ lub $c+a$ jest podzielny przez $p$. Przyjmijmy, bez straty ogólności, że $p$ dzieli liczbę $a+b$. Liczby $a$, $b$, $c$ są całkowite dodatnie, więc $0 < a+b < a+b+c = p+1$. Stąd wynika, że $a+b = p$, czyli $c = 1$.

**4.** Znaleźć wszystkie funkcje $f$ określone na zbiorze liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste takie, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x$ i $y$ spełniona jest równość:

$$f(xf(y) + x) = xy + f(x).$$

*Rozwiązanie:*

W powyższej równości podstawmy $x := 1$, uzyskujemy równość:

$$f(f(y) + 1) = y + f(1), \quad \text{dla } y \in \mathbb{R}$$

z której wnioskujemy, że $f$ jest surjekcją. W szczególności istnieje liczba rzeczywista $a$ taka, że $f(a) = -1$. Przyjmując $y := a$ otrzymujemy:

$$f(0) = f(xf(a) + x) = xa + f(x),$$

zatem $f$ jest funkcją liniową, czyli istnieje $b \in \mathbb{R}$ takie, że $f(x) = ax + b$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

Podstawiając otrzymaną funkcję $f$ do wyjściowego równania widzimy, że $f$ jest jedną z dwóch funkcji $f(x) = x$ lub $f(x) = -x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

**5.** Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończony ciąg liczb naturalnych taki, że żaden wyraz tego ciągu i żadna suma dowolnej liczby wyrazów tego ciągu nie jest potęgą liczby naturalnej o wykładniku całkowitym większym od 1.

*Rozwiązanie:*

Rozważmy następujący ciąg

$$2,\ \ 2^2 \cdot 3,\ \ 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5,\ \ 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7,\ \ \ldots\ \ 2^2 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot p_{n-1}^2 \cdot p_n, \ldots$$

gdzie $p_n$ oznacza $n$ - tą z kolei liczbę pierwszą. Zauważmy, że suma dowolnej liczby wyrazów powyższego ciągu jest podzielna przez $q$ ale nie jest podzielna przez $q^2$, gdzie $q$ jest jest największą liczbą pierwszą dzielącą najmniejszą wybraną liczbę z naszego ciągu.

Suma ta oczywiście nie może być potęgą liczby naturalnej, stąd skonstruowany ciąg spełnia warunki zadania.

**6.** Punkt $M$ jest środkiem boku $AB$ trójkąta ostrokątnego $ABC$. Punkt $P$ leży na odcinku $AB$, a punkty $S_1$ i $S_2$ są środkami okręgów opisanych odpowiednio na trójkątach $APC$ i $BPC$. Wykazać, że środek odcinka $S_1S_2$ leży na symetralnej odcinka $CM$.

*Rozwiązanie:*

W przypadku gdy $P = M$ wystarczy zauważyć, że prosta $S_1S_2$ jest symetralną odcinka $CM$. Przeprowadzimy rozumowanie w przypadku, gdy $P \neq M$.

Bez straty ogólności przyjmijmy, że punkt $P$ leży na odcinku $AM$. Niech punkt $S$ będzie środkiem odcinka $S_1S_2$, punkt $K$ – środkiem odcinka $AP$, a punkt $L$ – środkiem odcinka $BP$. Zauważmy, że proste $S_1S_2$, $S_1K$ oraz $S_2L$ są symetralnymi odpowiednio odcinków $CP$, $AP$ i $BP$.

Oznaczmy przez $X$ rzut prostokątny punktu $S$ na prostą $AB$. Punkt $X$ jest wówczas środkiem odcinka $KL$, a zatem

$$AX = AK + KX = \frac{1}{2}AP + \frac{1}{2}KL = \frac{1}{2}AP + \frac{1}{4}AB.$$

Oznaczmy przez $Y$ środek odcinka $PM$. Wówczas

$$AY = AP + PY = AP + \frac{1}{2}PM = AP + \frac{1}{2}(AMAP) = \frac{1}{2}AP + \frac{1}{2}AM = \frac{1}{2}AP + \frac{1}{4}AB.$$

Wobec tego $AX = AY$, czyli $X = Y$. Stąd wynika, że prosta $SY$ jest symetralną odcinka $PM$. Ponieważ punkt $S$ leży również na symetralnej odcinka $CP$, więc punkt $S$ jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $CPM$, a zatem leży także na symetralnej odcinka $CM$.

**7.** Dana jest tablica rozmiaru $2n \times 2n$, w której $3n$ pól pomalowano na czarno. Wykazać, że można tak wybrać $n$ kolumn oraz $n$ wierszy, by każde czarne pole znalazło się w pewnym wybranym wierszu lub w pewnej wybranej kolumnie.

*Rozwiązanie:*

Rozpatrzmy wszystkie możliwe wybory $n$ wierszy tablicy. Liczba takich wyborów jest skończona. Wobec tego możemy spośród wszystkich tych wyborów nich wziąć pod uwagę ten wybór, dla którego liczba czarnych pól w wybranych wierszach jest największa. Udowodnimy, że wówczas w wybranych wierszach znajduje się co najmniej $2n$ czarnych pól.

Rzeczywiście, gdyby w wybranych $n$ wierszach było najwyżej $2n1$ czarnych pól, to jeden z wybranych wierszy zawierałby najwyżej jedno czarne pole. Natomiast w pozostałych $n$ wierszach znajduje się co najmniej $n+1$ czarnych pól, więc jeden z niewybranych wierszy zawiera co najmniej dwa czarne pola. To prowadzi jednak do sprzeczności ze sposobem wyboru $n$ wierszy. Tak więc możemy wybrać $n$ wierszy, w których znajduje się co najmniej $2n$ czarnych pól. Pozostałych czarnych pól jest najwyżej $n$, więc bez problemu możemy wybrać $n$ kolumn tak, by wszystkie czarne pola znalazly się w wybranych wierszach i kolumnach.

**8.** Znaleźć wszystkie funkcje $f$ określone na zbiorze liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste takie, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x$ i $y$ spełniona jest równość:

$$f(x^2) + f(xy) = f(x)f(y) + yf(x) + xf(x+y).$$

*Rozwiązanie:*

Oznaczmy wyjściowe równanie przez $(\diamondsuit)$. Podstawiając $x := 0$ do $(\diamondsuit)$ uzyskujemy równość:

$$f(0)(f(y) + y - 2) = 0,$$

stąd jeśli $f(0) \neq 0$ to $f(x) = 2 - x$ jest jednym z rozwiązań.

Przyjmijmy teraz, że $f(0) = 0$. Wówczas dla $y := 0$ otrzymujemy równość $f(x^2) = xf(x)$, z której łatwo dostajemy, że $f$ jest funkcją nieparzystą.

Połużmy w $(\diamondsuit)$ $y := -x$, widzimy, że $f(x)(f(x) + x) = 0$ a to oznacza, że dla każdej liczby rzeczywistej $x$, $f(x) = 0$ lub $f(x) = -x$.

Załużmy, że istnieją niezerowe liczby rzeczywiste $u$ i $v$ takie, że $f(u) = 0$ oraz $f(v) = -v$. Przyjmijmy w $(\diamondsuit)$ $x := u$ oraz $y := v$, wtedy $f(uv) = uf(u+v)$, stąd $f(uv) = f(u+v) = 0$ $(\heartsuit)$, gdyż w przeciwnym wypadku uzyskalibyśmy równość - $-uv = u(-(u+v))$ a stąd $u = 0$.

Podstawiając teraz w $(\diamondsuit)$ $x := v$ oraz $y := u$, otrzymujemy równość $-v^2 + f(uv) = -uv + vf(u+v)$ co w połączeniu z $(\heartsuit)$ daje nam równość $u = v$.

Ostatecznie jedynymi funkcjami $f$ spełniającymi warunki zadania są funkcje 0, $2 - x$ oraz $-x$.

# Rozwiązania

Dzień drugi grupy młodszej

**1.** Dane są dodatnie liczby całkowite $a$ i $b$. Wykaż, że jeżeli liczba $a^2$ jest podzielna przez liczbę $a+b$, to także liczba $b^2$ jest podzielna przez liczbę $a+b$.

*Rozwiązanie:*

Ponieważ $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$, więc $b^2 = (b-a)(a+b) + a^2$. Prawa strona ostatniej równości jest podzielna przez liczbę $a+b$, a zatem liczba $b^2$ jest także podzielna przez liczbę $a+b$.

**2.** Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $AD + BC = CD$. Dwusieczne kątów $BCD$ i $CDA$ przecinają się w punkcie $S$. Udowodnij, że $AS = BS$.

*Rozwiązanie:*

Niech $E$ będzie takim punktem na odcinku $CD$, że $DE = AD$. Wówczas $CE = BC$. Trójkąty $ADS$ i $EDS$ są przystające (cecha bok-kąt-bok), a zatem $AS = ES$. Analogicznie z przystawania trójkątów $BCS$ i $ECS$ wynika, że $BS = ES$. Łącząc dwie ostatnie równości, uzyskujemy tezę.

**3.** Na płaszczyźnie zaznaczono $n$ punktów ($n \geqslant 3$), z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Każdy z tych punktów pomalowano na jeden z trzech kolorów, przy czym każdego koloru użyto przynajmniej raz. Udowodnij, że istnieje taki trójkąt o wierzchołkach w zaznaczonych punktach, którego każde dwa wierzchołki mają różne kolory i do wnętrza którego nie należy żaden zaznaczony punkt.

*Rozwiązanie:*

Ponieważ każdy z trzech kolorów został użyty, więc istnieje przynajmniej jeden trójkąt o wierzchołkach różnych kolorów. Spośród wszystkich takich trójkątów wybierzmy ten, który ma najmniejsze pole (jeśli trójkątów o najmniejszym polu jest więcej niż jeden, wybieramy dowolny z nich). Nazwijmy ten trójkąt $ABC$. Wykażemy, że trójkąt $ABC$ spełnia warunki zadania. Przypuśćmy, że do wnętrza trójkąta $ABC$ należy pewien zaznaczony punkt $P$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że punkt $P$ jest tego samego koloru, co punkt $A$. To oznacza, że każde dwa wierzchołki trójkąta $BCP$ mają różne kolory. Jednak pole tego trójkąta jest mniejsze od pola trójkąta $ABC$. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że do wnętrza trójkąta $ABC$ nie należy żaden zaznaczony punkt.

**4.** Znaleźć wszystkie funkcje $f$ określone na zbiorze liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste takie, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x$ i $y$ spełniona jest równość:

$$f(x^2 + y) = f(x) + f(y^2)$$

*Rozwiązanie:*

Oznaczmy wyjściowe równanie przez ($\diamondsuit$). Podstawiając w ($\diamondsuit$) $y := 0$ widzimy, że $f(x^2) - f(x) = f(0)$ ($\clubsuit$) dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}$ Połużmy teraz w ($\diamondsuit$) $x := 0$, dostajemy $f(y^2) - f(y) = -f(0)$ ($\heartsuit$) dla dowolnej liczby $y \in \mathbb{R}$.

Łącząc ($\clubsuit$) oraz ($\heartsuit$) uzyskujemy zależność $f(0) = -f(0)$, stąd $f(0) = 0$ a zatem $f(x) = f(x^2)$ oraz $f(x^2) = f(x^4)$ $\spadesuit$ dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}$.

W ($\diamondsuit$) połużmy teraz $y := -x^2$, dostajemy równość $f(x^4) = -f(x)$ co w połączeniu z $\spadesuit$ daje rozwiązanie $f(x) = 0$ dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}$.