Obóz przygotowawczy do Olimpiady Matematycznej

Kołkówka, 9 kwietnia – 13 kwietnia 2018

Obóz Przygotowawczy do Olimpiady Matematycznej
Kołkówka, 9 kwietnia – 13 kwietnia 2018

Dom wczasów dziecięcych "Bajkolas" w Kołkówce

Skład tekstu:

Dominik Burek

Treści zadań

Zawody indywidualne

1. Wyznaczyć wszystkie trójki dodatnich liczb rzeczywistych (a, b, c) spełniające układ równań

$$\begin{cases} a\sqrt{b} - c = a \\ b\sqrt{c} - a = b \\ c\sqrt{a} - b = c \end{cases}$$

2. Dla każdej liczby całkowitej dodatniej n znaleźć liczbę takich permutacji $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ciągu $(1, 2, \ldots, n)$, dla których liczba $2(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)$ jest podzielna przez k dla $k = 1, 2, \ldots, n$.

3. Dany jest ostrosłup czworokątny $PABCD$, którego podstawą jest równoległobok $ABCD$. Dowieść, że jeżeli istnieje sfera styczna do krawędzi PA, PB, PC, PD, to $PA + PC = PB + PD$.

4. Firma w kształcie kwadratowej tablicy o boku $2^{2018} + 1$ w każdym polu 1×1 chce wybudować pokój. Kierownictwo chce również zainwestować w drzwi, które mogą znajdować się między sąsiednimi pokojami (na wspólnym boku dwóch pól 1×1). Czy można zamontować drzwi tak aby każdy pokój miał ich dokładnie dwie sztuki?

5. Czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem. Okrąg leżący wewnątrz czworokąta jest styczny do prostych AB i AD oraz przecina prostą BD w punktach E i F. Pokazać, że istnieje okrąg przechodzący przez punkty E i F oraz styczny do prostych CB i CD.

6. Wyznaczyć wszystkie skończone zbiory $\mathcal{A}$ różnych liczb rzeczywistych nieujemnych, które spełniają warunki

- $\mathcal{A}$ zawiera co najmniej 4 liczby,
- jeśli różne liczby $a, b, c, d \in \mathcal{A}$, to $ab + cd \in \mathcal{A}$.

7. Wysokości trójkąta ABC przecinają się w punkcie H. Punkt K jest taki, że okręgi opisane na trójkątach BHK i CHK są styczne do prostej BC. Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu B na prostą AC. Pokazać, że punkt A jest równoodległy od prostych KB i KD.

8. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite, które można zapisać w postaci

$$\frac{(x+y+z)^2}{xyz},$$

gdzie x, y i z są liczbami całkowitymi dodatnimi.

9. Niech $n \geqslant 3$ będzie nieparzystą liczbą całkowitą. Niech $P_1, P_2, \ldots, P_m$, gdzie $m \geqslant n^2 - n + 1$, będzie ciągiem wielokątów takich, że

- P_1 jest n-kątem foremnym,
- dla $k > 1$, P_k jest wielokątem foremnym o wierzchołkach w środkach boków wielokąta P_{k-1}.

Wyznaczyć największą możliwą liczbę kolorów, aby dla dowolnego pokolorowania wierzchołków wielokątów istniały cztery wierzchołki A, B, C i D tego samego koloru takie, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem równoramiennym, być może zdegenerowanym lecz nie leżącym na prostej przechodzącej przez środek P_1.

10. Dla liczby całkowitej $n \geqslant 2$ niech $f(n)$ oznacza $\mathrm{NWW}(1, 2, \ldots, n)$. Pokazać, że dla dowolnej liczby całkowitej $k \geqslant 2$ istnieje liczba całkowita $a \geqslant 2$, że

$$f(a) = f(a+1) = \ldots = f(a+k-1).$$

11. Wysokości trójkąta ABC przecinają się w punkcie H. Punkt K jest taki, że okręgi opisane na trójkątach BHK i CHK są styczne do prostej BC. Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu B na prostą AC. Pokazać, że punkt A jest równoodległy od prostych KB i KD.

12. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ takie, że

$$f(x)f(y) = 2f(x + yf(x))$$

dla dowolnych $x, y > 0$.

Zadania dodatkowe

1. Wyznaczyć miejsce geometryczne wszystkich punktów D leżących wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC dla których spełniona jest następująca równość

$$DA \cdot DB \cdot AB + DB \cdot DC \cdot BC + DC \cdot DA \cdot CA = AB \cdot BC \cdot CA.$$

2. Danych jest $n \geqslant 4$ punktów na płaszczyźnie takich, że odległość między dowolnymi dwoma z nich jest całkowita. Pokazać, że co najmniej $\frac{1}{6}$ wszystkich tych odległości jest podzielna przez 3.

3. Trójkąty ABC i PQR są takie, że punkty A i P są środkami odcinków QR i BC, odpowiednio. Ponadto proste QR i BC są dwusiecznymi kątów wewnętrznych BAC i QPR. Pokazać, że $AB + AC = PQ + PR$.

4. Niech $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem funkcji $f_i \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pokazać, że istnieją takie funkcje $\phi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz $\psi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że każdą funkcję f_i można otrzymać przez składanie ϕ i ψ.

7. Dane są liczby całkowite dodatnie k i m. Różne liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_k$ oraz $b_1, b_2, \ldots, b_m$ są większe od 1. Dla dowolnego $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ liczba a_i jest iloczynem parzystej liczby liczb pierwszych (niekoniecznie różnych). Dla dowolnego $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ liczba b_j jest iloczynem nieparzystej liczby liczb pierwszych (niekoniecznie różnych). Na ile sposobów można wybrać liczby spośród danych $k + m$ liczb aby dla dowolnego $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ liczba b_j miała parzystą liczbę dzielników spośród wybranych liczb?

8. Dane są liczby rzeczywiste $a < b$ oraz $c, d \in (0, 1)$. Pokazać, że istnieje taki wielomian P o współczynnikach całkowitych, że $P(x) \in [a, b]$ dla dowolnego $x \in [c, d]$.

Mecz matematyczny

1. Niech k będzie taką dodatnią liczbą całkowitą, że liczba $p = 4k + 3$ jest pierwsza. Dowieść, że spośród wierzchołków p-kąta foremnego można wybrać $2k+1$ wierzchołków w taki sposób, że wśród wzajemnych odległości wybranych wierzchołków żadna nie powtarza się więcej niż k razy.

2. Pokazać, że dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 3$, istnieją liczby całkowite dodatnie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tworzące ciąg arytmetyczny oraz liczby całkowite dodatnie $b_1, b_2, \ldots, b_n$ tworzące ciąg geometryczny takie, że

$$b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < \ldots < b_n < a_n.$$

3. Rozstrzygnąć, czy istnieje skończony zbiór liczb pierwszych $\mathcal{T}$, taki, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje $p \in \mathcal{T}$ i liczba naturalna k, że $v_p(k!) = n$.

4. Załóżmy, że $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ są liczbami rzeczywistymi. Pokazać, że

$$a_1a_2^4 + a_2a_3^4 + \ldots + a_na_1^4 \geqslant a_2a_1^4 + a_3a_2^4 + \ldots + a_1a_n^4.$$

5. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $P(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, które dla dowolnego rzeczywistego x spełniają równość

$$P(x)P(2x^2 + 1) = P(x^2)(P(2x + 1) - 4x).$$

6. Każdy z uczestników obozu w Kołkówce jest dobrym graczem w bilarda lub też nie. Każdy dobry gracz wysyła dokładnie jedną wiadomość do gracza niedoświadczonego z propozycją pojedynku. Każdy słaby gracz wysyłał dokładnie jedną wiadomość do doświadczonego gracza z odpowiedzią. Jednakże co najmniej jeden dobry gracz nie otrzymał wiadomości. Pokazać, że istnieje grupa S dobrych graczy i grupa T słabych graczy, które spełniają warunki:

- osoby z S wysłały wiadomości tylko do tych graczy, które nie należą do T,
- osoby z T wysłały wiadomość tylko do tych graczy, które nie należą do S.

7. Szachownicę $n \times n$ pokryto trójkątami o wierzchołkach w punktach kratowych i o polu równym $\frac{1}{2}$. Dowieść, że co najmniej $2n$ z tych trójkątów jest prostokątnych.

8. Niech P będzie punktem przecięcia przekątnych AC i BD czworokąta wypukłego $ABCD$ w którym $AB = AC = BD$. Punkty O i I są odpowiednio środkiem okręgu opisanego i wpisanego w trójkąt ABP. Pokazać, że jeśli $O \neq I$, to OI i CD są prostopadłe.

9. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku A. Punkty M, N leżą na bokach AB i AC, odpowiednio a punkty P, Q leżą na boku BC. Wiadomo, że punkty M, N, P i Q są kolejnymi wierzchołkami prostokąta. Proste BN i MQ przecinają się w punkcie E, natomiast proste CM i NP przecinają się w punkcie F. Pokazać, że $\sphericalangle BAE = \sphericalangle CAF$.

10. W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E, a proste AD i BC przecinają się w punkcie F. Punkt P różny od E leży wewnątrz czworokąta, przy czym kąty APB i CPD są proste. Wykazać, że także kąt EPF jest prosty.

11. Niech d będzie najmniejszą z odległości pomiędzy przeciwległymi krawędziami czworościanu, natomiast niech h będzie najmniejszą z wysokości tego czworościanu. Udowodnić, że $2d > h$.

Rozwiązania

Zawody indywidualne

1. Wyznaczyć wszystkie trójki dodatnich liczb rzeczywistych (a, b, c) spełniające układ równań

$$\begin{cases} a\sqrt{b} - c = a \\ b\sqrt{c} - a = b \\ c\sqrt{a} - b = c \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Nie ograniczając ogólności rozumowania przyjmijmy, że a jest największą spośród trzech niewiadomych.

Z nierówności $a \geqslant c$ oraz z pierwszego równania układu wynika, że

$$c = a(\sqrt{b} - 1) \geqslant c(\sqrt{b} - 1),$$

gdyż czynnik $\sqrt{b} - 1$ jest dodatni, jako równy ilorazowi $\frac{c}{a}$. Dzieląc powyższą zależność stronami przez c widzimy, że $1 \geqslant \sqrt{b} - 1$, czyli $b \leqslant 4$. Podobnie drugie równanie układu prowadzi do wniosku, że

$$b(\sqrt{c} - 1) = a \geqslant b,$$

skąd $\sqrt{c} - 1 \geqslant 1$, czyli $c \geqslant 4$.

Na koniec, uwzględniając trzecie równanie oraz uzyskane wyżej zależności dostajemy

$$1 \leqslant \sqrt{c} - 1 \leqslant \sqrt{a} - 1 = \frac{b}{c} \leqslant \frac{4}{c} \leqslant 1.$$

Wszystkie powyższe nierówności są więc równościami i w rezultacie

$$\sqrt{c} = \sqrt{a} = 2$$

oraz $b = c$, czyli $a = b = c = 4$.

Dokonując bezpośredniego sprawdzenia stwierdzamy ostatecznie, że jedynym rozwiązaniem jest $(a, b, c) = (4, 4, 4)$. $\square$

2. Dla każdej liczby całkowitej dodatniej n znaleźć liczbę takich permutacji $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ciągu $(1, 2, \ldots, n)$, dla których liczba $2(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)$ jest podzielna przez k dla $k = 1, 2, \ldots, n$.

Rozwiązanie:

Zauważmy najpierw, że dodanie do wszystkich liczb ai ustalonej liczby całkowitej nie wpływa na podzielność, a więc i na wynik końcowy. Oznaczmy go przez A_n. Łatwo zobaczyć, że $A_1 = 1$, $A_2 = 2$, $A_3 = 6$. Załóżmy, że $n > 3$. Warunek z podzielnością dla $n-1$ wygląda następująco

$$n - 1 | n^2 + n - 2a_n,$$

skąd $a_n = 1$ lub $a_n = n$ lub ewentualnie $a_n = n + 1$, gdy n jest nieparzyste.

Dwa pierwsze przypadki pozostawiają nam na pozostałych miejscach permutację ciągów odpowiednio $(2, 3, \dots, n)$ i $(1, 2, \dots, n-1)$, co daje łącznie $2A_{n-1}$ permutacji na mocy wcześniejszej uwagi. Jeśli $a_n = n + 1$, to musi zachodzić $a_n = \frac{n+1}{2}$ to musi zachodzić

$$n - 2 \mid n^2 - 1 - 2a_{n-1},$$

czyli $a_{n-1} = \frac{n+1}{2} + k(n-2)$, dla pewnego naturalnego k. Ponieważ jednak element $\frac{n+1}{2}$ został już użyty, wiec $k \geqslant 1$ i $a_{n-1} \geqslant \frac{3n-3}{2} > n$, gdyż $n > 3$. Otrzymaliśmy sprzeczność, która dowodzi, że $a_n \neq \frac{n+1}{2}$. W takim razie $A_n = 2A_{n-1}$ i przez prostą indukcję dostajemy, że $A_n = 3 \cdot 2^{n-2}$. $\square$

3. Dany jest ostrosłup czworokątny $PABCD$, którego podstawą jest równoległobok $ABCD$. Dowieść, że jeżeli istnieje sfera styczna do krawędzi PA, PB, PC, PD, to $PA + PC = PB + PD$.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez O środek sfery stycznej do krawędzi PA, PB, PC, PD. Niech ponadto Q będzie takim punktem przestrzeni, że czworokąt $BAPQ$ jest równoległobokiem. Wówczas czworokąt $CDPQ$ jest również równoległobokiem.

Rozpatrzmy płaszczyznę π prostopadłą do prostej OP i przecinającą odcinki PA, PB, PC, PD, odpowiednio w punktach K, L, M, N oraz przecinającą proste QB, QC odpowiednio w punktach X, Y. Przypuśćmy ponadto, że płaszczyzna π przecina prostą PQ w punkcie R (gdy $PQ \parallel \pi$, poniższe rozumowanie jest analogiczne). Wówczas $PK = PL = PM = PN$. Stąd oraz z faktu, że czworokąty $BAPQ$ i $CDPQ$ są równoległobokami otrzymujemy $BL = BX$ oraz $CM = CY$.

Jednokładność o środku R przeprowadzająca punkt P na punkt Q przekształca punkty K i N odpowiednio na X i Y. Stąd $QX = QY$. Zatem

$$QB + PC = PB + QC,$$

czyli $PA + PC = PB + PD$. $\square$

4. Firma w kształcie kwadratowej tablicy o boku $2^{2018} + 1$ w każdym polu 1×1 chce wybudować pokój. Kierownictwo chce również zainwestować w drzwi, które mogą znajdować się między sąsiednimi pokojami (na wspólnym boku dwóch pól 1×1). Czy można zamontować drzwi tak aby każdy pokój miał ich dokładnie dwie sztuki?

Rozwiązanie:

Rozpatrzmy graf G, którego wierzchołkami są pokoje a krawędź grafu łączy dwa pokoje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją drzwi między tymi pokojami. Z założenia zadania w tym grafie każdy wierzchołek ma stopień 2, więc G jest sumą rozłącznych cykli (znany fakt). Zauważmy jednak, że dowolny cykl ma parzystą długość, gdyż "obchodząc" ten cykl dookoła w każdym momencie musimy pokonać tyle samo stopniu aby wejść co wyjść. Stąd liczba wierzchołków w grafie musi być parzysta — sprzeczność, gdyż $2^{2018} + 1$ jest liczbą nieparzystą.

5. Czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem. Okrąg leżący wewnątrz czworokąta jest styczny do prostych AB i AD oraz przecina prostą BD w punktach E i F. Pokazać, że istnieje okrąg przechodzący przez punkty E i F oraz styczny do prostych CB i CD.

Rozwiązanie:

Niech k_1 będzie danym okręgiem z treści zadania, P jego środkiem a T_1, T_2 punktami styczności k_1 z AB i AD, odpowiednio. Niech $a = AB = CD$, $b = BC = DA$, $x = AT_1 = AT_2$.

Niech T_3 będzie punktem na półprostej CB takim, że $BT_3 = BT_1$ (T_3 nie leży na odcinku CB). Oznaczmy przez Q punkt przecięcia prostej prostopadłej do BC i przechodzącej przez T_3 z dwusieczną kąta BCD. Pokażemy, że okrąg k_2 o środku w punkcie Q i promieniu QT_3 spełnia warunki tezy zadania.

Oczywiście k_2 jest styczny do prostych CB i CD, więc potrzeba jedynie wykazać, że przecina prostą BD w punktach E i F. Niech T_4 będzie punktem styczności k_2 i CD. Wówczas

$$BT_3 = BT_1 = AB - AT_1 = a - x$$

oraz

$$CT_4 = CT_3 = CB + BT_3 = b + a - x.$$

Ponieważ $a > x$, to $CT_4 > CD$ i D leży na odcinku CT_4. Wtedy

$$DT_4 = CT_4 - CD = b + a - x - a = b - x = DT_2.$$

Wobec tego $BT_1 = BT_3$ oraz $DT_2 = DT_4$. Ponieważ BT_1 i BT_3 są stycznymi do k_1 i k_2, to B ma równą potęgę względem tych okręgów. Podobną własność ma punkt D, więc BD jest osią potęgową k_1 i k_2, skąd ponieważ k_1 przecina BD w E i F, to k_2 również. □

6. Wyznaczyć wszystkie skończone zbiory $\mathcal{A}$ różnych liczb rzeczywistych nieujemnych, które spełniają warunki

- $\mathcal{A}$ zawiera co najmniej 4 liczby,
- jeśli różne liczby $a, b, c, d \in \mathcal{A}$, to $ab + cd \in \mathcal{A}$.

Rozwiązanie:

Pokażemy, że jedynymi zbiorami spełniającymi warunki zadania są zbiory postaci $\{x, 1, 1/x, 0\}$, dla pewnej liczby nieujemnej $x > 1$.

Pokażemy najpierw, że jeśli dla zbioru $\mathcal{A}$ z warunków zadania każdy jego element jest mniejszy od 1, to $\mathcal{A}$ jest nieskończony.

Załóżmy, że $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, gdzie $1 > a_1 > a_2 > \ldots > a_n \geqslant 0$ i $n \geqslant 4$. Wtedy $a_n \neq 0$. Istotnie, jeśli $a_n = 0$, to

$$a_{n-1}a_{n-2} = a_1 a_n + a_{n-1}a_{n-2} \in \mathcal{A}.$$

Jednakże $a_{n-1}a_{n-2} < a_{n-1}$, więc dostajemy element $\mathcal{A}$ leżący między a_{n-1} i a_n — sprzeczność. Zatem $a_n \neq 0$.

Niech teraz

$$a = a_1a_2 + a_3a_4, \quad b = a_1a_3 + a_2a_4, \quad c = a_1a_4 + a_2a_3.$$

Wtedy $a, b, c \in \mathcal{A}$ i $a > b > c$. Jeśli $c > a_4$, to $a = a_1$, $b = a_2$, $c = a_3$. Pierwsza i trzecia równość daje związki $a_1(1 - a_2) = a_3a_4$ oraz $a_3(1 - a_2) = a_1a_4$. Mnożąc je dostajemy, że

$$a_1a_3(1 - a_2)^2 = a_3a_1a_4^2.$$

Ponieważ $a_1, a_3 \neq 0$, to dzieląc powyższą równość przez a_1a_3 mamy $1 - a_2 = a_4$. Jednakże wtedy $a_1 = a_3$, gdyż $a_4 \neq 0$ — sprzeczność. Wobec tego $c \leqslant a_4$ czyli $a_4(1 - a_1) \geqslant a_2a_3$. Nierówność $a_3 > a_4$ implikuje, że $a_3(1 - a_1) \geqslant a_2a_3$, czyli $1 - a_1 \geqslant a_2$, skąd $a_1 + a_2 \leqslant 1$. W szczególności $a_2 < \frac{1}{2}$ i

$$a = a_1a_2 + a_3a_4 < \frac{a_1}{2} + \frac{a_3}{2} < a_1.$$

Jeśli $c = a_4$, to $a = a_2$, $b = b_3$, $c = a_4$. Druga i trzecia daje związki

$$a_3(1 - a_1) = a_4a_2$$

oraz

$$a_4(1 - a_1) = a_2a_3.$$

Używając podobnych argumentów co wyżej, dostajemy $1 - a_1 = a_2 = 0$ – sprzeczność. Zatem $c < a_4$ i a_5 istnieje. Jeśli zastosujemy powyższy argument do (a_2, a_3, a_4, a_5) pokażemy istnienie a_6 itd. Zatem $\mathcal{A}$ jest zbiorem nieskończonym.

Wróćmy teraz do zadania używając tych samych oznaczeń jak wyżej. Skoro $\mathcal{A}$ jest skończony to na podstawie powyższych faktów $a_1 \geqslant 1$. Wtedy $c > a_4$ i $a = a_1$, $b = a_2$, $c = a_3$. Analogicznie jak wyżej dostajemy, że $1 - a_2 = a_4 = 0$, skąd $a_2 = 1$ i $a_4 = 0$. Zatem $b = a_1a_3 = a_2 = 1$. Zatem $\mathcal{A} = \{a_1, 1, 1/a_1, 0\}$. $\square$

7. Wysokości trójkąta ABC przecinają się w punkcie H. Punkt K jest taki, że okręgi opisane na trójkątach BHK i CHK są styczne do prostej BC. Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu B na prostą AC. Pokazać, że punkt A jest równoodległy od prostych KB i KD.

Rozwiązanie:

Wszystkie kąty rozpatrujemy modulo $180°$. Niech E będzie spodkiem wysokości z punktu C. Ponieważ $\sphericalangle AEH = \sphericalangle ADH = 90°$, to $ADHE$ jest czworokątem wpisanym w okrąg. Ponieważ BC jest prostą styczną do okręgu opisanego na HKB, to $\sphericalangle HKB = \sphericalangle HBC$. Analogicznie $\sphericalangle HKC = \sphericalangle HCB$. Zatem

$$\begin{aligned}\sphericalangle CKB = \sphericalangle CKH + \sphericalangle HKB = \sphericalangle BCH + \sphericalangle HBC = \\ = \sphericalangle BCH = \sphericalangle DHE = \sphericalangle DAE = \sphericalangle CAB.\end{aligned}$$

Z ostatniego rachunku wynika, że $ABCK$ jest cykliczny i $\sphericalangle AKB = \sphericalangle ACB$. Ponadto

$$\begin{aligned}\sphericalangle ACB + \sphericalangle HKA = \sphericalangle AKB + \sphericalangle HKA = \sphericalangle HKB = \\ = \sphericalangle HBC = \sphericalangle DBC = \sphericalangle DCB + \sphericalangle BDC = \sphericalangle ACB + 90°,\end{aligned}$$

więc $\sphericalangle HKA = 90°$ i pięciokąt $AKDHE$ jest cykliczny. Niech F będzie spodkiem wysokości z punktu A. Widzimy, że

$$\begin{aligned}\sphericalangle DKA = \sphericalangle DHA = \sphericalangle DAH + \sphericalangle HDA = \sphericalangle CAF + \sphericalangle AFC = \\ = \sphericalangle ACF = \sphericalangle ACB = \sphericalangle AKB.\end{aligned}$$

Wobec tego prosta KA połowi odcinki KB i KD, czyli A jest równoodległy od KB i KD. □

$$\frac{1}{h} = \frac{AB'}{AB''} > \frac{100}{99} > 1.01.$$

Wobec tego rozpatrując teraz jednokładność o skali $1/h$ przeprowadzającą $A'B''C''D''$ na $A'B'C'D'$ widzimy, że sfera S będąca obrazem sfery S_1 w tej jednokładności ma średnicę większą niż 1.01 i jest wpisana w $A'B'C'D'$. □

8. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite, które można zapisać w postaci

$$\frac{(x+y+z)^2}{xyz},$$

gdzie x, y i z są liczbami całkowitymi dodatnimi.

Rozwiązanie:

Pokażemy na początku, że jeśli liczba całkowita dodatnia n może być przedstawiona w postaci

$$\frac{(x+y+z)^2}{xyz},$$

to może być również zapisana jako

$$\frac{(x'+y'+z')^2}{x'y'z'},$$

gdzie $x' \leqslant y'+z'$, $y' \leqslant x'+z'$ i $z' \leqslant x'+y'$.

Istotnie, wybierzmy takie przedstawienie n aby $x+y+z$ było najmniejsze z możliwych. Ponieważ $x \mid (y+z)^2$, to iloraz $(y+z)^2/x$ oznaczmy przez x'. Wówczas

$$\frac{(x'+y+z)^2}{x'yz} = \frac{(y+z)^2(\frac{y+z}{x}+1)}{\frac{(y+z)^2}{x}yz} = \frac{(x+y+z)^2}{xyz} = n.$$

Ponieważ $x+y+z$ jest minimalne, to $x+y+z \leqslant x'+y+z$, więc $x \leqslant (y+z)^2/x$, czyli $x \leqslant y+z$. Analogicznie pokazujemy pozostałe nierówności.

Przypuśćmy teraz, że $n = \frac{(x+y+z)^2}{xyz}$ oraz $y+z \geqslant x \geqslant y \geqslant z$ (możemy tak założyć na podstawie wyżej pokazanego faktu). Dostajemy trzy przypadki:

- $x = y \geqslant z = 1$. Wtedy
$$n = \frac{(2x+1)^2}{x^2},$$
czyli $x \mid 2x+1$, skąd $x = 1$, więc $n = 9$.

- $x = y+1 > z = 1$. Wtedy
$$n = \frac{(2x)^2}{x(x-1)} = \frac{4x}{x-1},$$
czyli $x-1 \mid 4x$, skąd $x \in \{2,3,5\}$ i odpowiednio $n \in \{8,6,5\}$.

- $y+z \geqslant x \geqslant y \geqslant z > 1$. Wtedy $yz-(y+z) = (y-1)(z-1)-1 \geqslant 0$, więc $yz \geqslant y+z \geqslant x$. Ponieważ $x \geqslant y \geqslant z$, to $xy \geqslant z$ i $xz \geqslant y$, skąd
$$n = \frac{(x+y+z)^2}{xyz} = 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{x}{yz}+\frac{y}{xz}+\frac{z}{xz} \leqslant 2\cdot\frac{3}{2}+1+1+1 = 6.$$

Łatwo sprawdzić, że liczby 1,2,3, 4, 5, 6, 8, 9:

$$1 = \frac{(9+9+9)^2}{9\cdot 9\cdot 9},\quad 2 = \frac{(4+4+8)^2}{4\cdot 4\cdot 8},\quad 3 = \frac{(3+3+3)^2}{3\cdot 3\cdot 3},\quad 4 = \frac{(2+2+4)^2}{2\cdot 2\cdot 4},$$

$$5 = \frac{(1+4+5)^2}{1\cdot 4\cdot 5}, \quad 6 = \frac{(1+2+3)^2}{1\cdot 2\cdot 3}, \quad 8 = \frac{(1+1+2)^2}{1\cdot 1\cdot 2}, \quad 9 = \frac{(1+1+1)^2}{1\cdot 1\cdot 1}.$$

$\square$

9. Niech $n \geqslant 3$ będzie nieparzystą liczbą całkowitą. Niech $P_1, P_2, \ldots, P_m$, gdzie $m \geqslant n^2 - n + 1$, będzie ciągiem wielokątów takich, że

- P_1 jest n-kątem foremnym,
- dla $k > 1$, P_k jest wielokątem foremnym o wierzchołkach w środkach boków wielokąta P_{k-1}.

Wyznaczyć największą możliwą liczbę kolorów, aby dla dowolnego pokolorowania wierzchołków wielokątów istniały cztery wierzchołki A, B, C i D tego samego koloru takie, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem równoramiennym, być może zdegenerowanym lecz nie leżącym na prostej przechodzącej przez środek P_1.

Rozwiązanie:

Niech $V_1, V_2, \ldots, V_n$ będą wierzchołkami P_1 w kolejności przeciwnej do ruchu wskazówek zegara. Pokażemy, że szukana maksymalna liczba kolorów jest mniejsza niż n. Istotnie, niech O będzie środkiem wszystkich wielokątów P_i. Ponieważ n jest liczbą nieparzystą, to dowolny wierzchołek V_i leży na jednej prostej OV_i. Mając $n' \geqslant n$ kolorów, niech $c_1, c_2, \ldots, c_n$ będzie n z nich. Pokolorujmy dowolny wierzchołek na prostej OV_i kolorem c_i. Łatwo zauważyć, że dowolne cztery wierzchołki tego samego koloru leżą na prostej przechodzącej przez O, skąd warunki zadania nie są spełnione.

Pokażemy teraz, że liczba $n-1$ spełnia tezę. Rozpatrzmy n prostych przechodzących przez V_1. Pierwsza z nich l_1 jest styczna do okręgu opisanego na P_1 w punkcie V_1. Pozostałe proste l_i przechodzą przez V_1 i V_i dla $2 \leqslant i \leqslant n$. Dowolna prosta zawierająca bok lub przekątną V_iV_j wielokąta P_1 jest równoległa do którejś z rozważanych prostych, mianowicie do prostej l_{i+j-1}.

Rozpatrzmy teraz krawędź bądź przekątną wielokąta P_2 łączącą środek W_1 odcinka V_iV_{i+1} ze środkiem W_2 odcinka V_jV_{j+1}. Wtedy proste W_1W_2, V_iV_{j+1} oraz $V_{i+1}V_j$ są równoległe, więc W_1W_2 jest równoległe do pewnej prostej l_i. W każdym wielokącie P_j istnieje bok lub przekątna tego samego koloru (gdyż $n > n-1$). We wszystkich wielokątach znajdziemy łącznie co najmniej $m \geqslant n^2 - n + 1 > n(n-1)$ jednokolorowych odcinków. Na podstawie zasady szufladkowej Dirichleta jedna z prostych l_i jest równoległa do więcej niż n jednokolorowych odcinków, każdy z innego wielokąta P_j. Korzystając z zasady szufladkowej ponownie, dwa z tych n odcinków — AB i CD mają ten sam kolor. Zatem czworokąt $ABCD$ lub $ABDC$ jest równoramiennym trapezem (może zdegenerowanym). Ponieważ wyjściowych m wielokątów jest wpisanych w koncentryczne okręgi, to AB i CD nie mogą być ich średnicami, więc A, B, C i D nie mogą leżeć na prostej przechodzącej przez środek P_1. □

10. Dla liczby całkowitej $n \geqslant 2$ niech $f(n)$ oznacza $\mathrm{NWW}(1, 2, \ldots, n)$. Pokazać, że dla dowolnej liczby całkowitej $k \geqslant 2$ istnieje liczba całkowita $a \geqslant 2$, że

$$f(a) = f(a+1) = \ldots = f(a+k-1).$$

Rozwiązanie:

Pokażemy, że $f(n) < f(n+1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n+1$ jest potęgą liczby pierwszej. Istotnie, jeśli $n+1 = p^k$, to nierówność jest oczywista. Odwrotnie, jeśli $n+1 = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{r_s}$ $(s \geqslant 2, r_i \geqslant 1)$, to $p_i^{r_i} \geqslant (n+1)/2 \geqslant n$ i $p_i^{r_i} \mid f(n)$. Zatem $n+1$ dzieli $f(n)$, skąd $f(n+1) = f(n)$.

Na mocy powyższego faktu wystarczy pokazać, że dla dowolnego $k \geqslant 2$ istnieje k kolejnych liczb całkowitych z których żadna nie jest potęgą liczby pierwszej. Jeśli p_1, p_2, …, p_k, q_1, q_2, …, q_k są różnymi liczbami pierwszymi, to układ kongruencji

$$\begin{cases} x \equiv -1 \pmod{p_1 q_1} \\ x \equiv -1 \pmod{p_2 q_2} \\ \quad\vdots \\ x \equiv -1 \pmod{p_k q_k} \end{cases}$$

ma rozwiązanie na mocy Chińskiego twierdzenia o resztach. Łatwo zauważyć, że $x+1, x+2, \ldots, x+k$ są poszukiwanymi liczbami. □

11. Wysokości trójkąta ABC przecinają się w punkcie H. Punkt K jest taki, że okręgi opisane na trójkątach BHK i CHK są styczne do prostej BC. Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu B na prostą AC. Pokazać, że punkt A jest równoodległy od prostych KB i KD.

Rozwiązanie:

Wszystkie kąty rozpatrujemy modulo $180°$. Niech E będzie spodkiem wysokości z punktu C. Ponieważ $\sphericalangle AEH = \sphericalangle ADH = 90°$, to $ADHE$ jest czworokątem wpisanym w okrąg. Ponieważ BC jest prostą styczną do okręgu opisanego na HKB, to $\sphericalangle HKB = \sphericalangle HBC$. Analogicznie $\sphericalangle HKC = \sphericalangle HCB$. Zatem

$$\begin{aligned} \sphericalangle CKB &= \sphericalangle CKH + \sphericalangle HKB = \sphericalangle BCH + \sphericalangle HBC = \\ &= \sphericalangle BCH = \sphericalangle DHE = \sphericalangle DAE = \sphericalangle CAB. \end{aligned}$$

Z ostatniego rachunku wynika, że $ABCK$ jest cykliczny i $\sphericalangle AKB = \sphericalangle ACB$. Ponadto

$$\begin{aligned}\sphericalangle ACB + \sphericalangle HKA = \sphericalangle AKB + \sphericalangle HKA = \sphericalangle HKB = \\ = \sphericalangle HBC = \sphericalangle DBC = \sphericalangle DCB + \sphericalangle BDC = \sphericalangle ACB + 90^\circ,\end{aligned}$$

więc $\sphericalangle HKA = 90^\circ$ i pięciokąt $AKDHE$ jest cykliczny. Niech F będzie spodkiem wysokości z punktu A. Widzimy, że

$$\begin{aligned}\sphericalangle DKA = \sphericalangle DHA = \sphericalangle DAH + \sphericalangle HDA = \sphericalangle CAF + \sphericalangle AFC = \\ = \sphericalangle ACF = \sphericalangle ACB = \sphericalangle AKB.\end{aligned}$$

Wobec tego prosta KA połowi odcinki KB i KD, czyli A jest równoodległy od KB i KD. □

12. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ takie, że

$$f(x)f(y) = 2f(x + yf(x))$$

dla dowolnych $x, y > 0$.

Rozwiązanie:

Na początku pokażemy, że f jest funkcją rosnącą. Przypuśćmy, że $f(x) < f(z)$ dla pewnych $x > z > 0$. Wówczas kładąc $y := (x - z)(f(x) - f(z)) > 0$, to dostajemy związek

$$x + yf(x) = z + yf(z).$$

Wtedy

$$f(x)f(y) = 2f(x + yf(x)) = 2f(z + yf(z)) = f(z)f(x),$$

czyli $f(x) = f(z)$ — sprzeczność.

Załóżmy teraz, że f nie jest ściśle rosnącą, tzn. $f(x) = f(z)$ dla pewnych $x > z > 0$. Jeśli $y \in \left(0, \dfrac{x - z}{f(x)}\right]$, to $z < z + yf(z) \leqslant x$, więc

$$f(z) \leqslant f(z + yf(z)) \leqslant f(x) = f(z),$$

czyli $f(z + yf(x)) = f(x)$. Wobec tego

$$f(z)f(y) = 2f(z + yf(z)) = 2f(x) = 2f(z),$$

co oznacza że $f(y) = 2$ dla dowolnego $y \in \left(0, \dfrac{x - z}{f(x)}\right]$.

Jeśli $f(y_0) = 2$ dla pewnego $y_0 > 0$, to

$$4 = f^2(y_0) = 2f(y_0 + y_0 f(y_0)) = 2f(3y_0),$$

więc $f(3y_0) = 2$. Indukcyjnie pokazujemy, że dla dowolnej liczby naturalnej n mamy $f(3^n y_0) = 2$. Jednakże f jest funkcją rosnącą, więc $f \equiv 2$. Oczywiście taka funkcja spełnia warunki zadania.

Załóżmy teraz, że f jest ściśle rosnącą funkcją. Wtedy

$$f(x)f(y) = 2f(x + yf(x)) > 2f(x),$$

więc $f(y) > 2$ dla dowolnego $y > 0$. Ponadto

$$2f(x + f(x)) = f(x)f(1) = f(1)f(x) = 2f(1 + xf(1)),$$

więc z injektywności f mamy, że $x + f(x) = 1 + xf(1)$, czyli $f(x) = x(f(1) - 1) + 1$ dla dowolnego $x > 0$. Biorąc x odpowiednio mały dostajemy sprzeczność z nierównością $f(x) < 2$.

Ostatecznie, jedyną funkcją spełniającą warunki zadania jest funkcja stała równa 2. $\square$

Zawody dodatkowe

1. Wyznaczyć miejsce geometryczne wszystkich punktów D leżących wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC dla których spełniona jest następująca równość

$$DA \cdot DB \cdot AB + DB \cdot DC \cdot BC + DC \cdot DA \cdot CA = AB \cdot BC \cdot CA.$$

Rozwiązanie:

Pokażemy, że dla dowolnego punktu D wewnątrz trójkąta ABC zachodzi nierówność

$$DA \cdot DB \cdot AB + DB \cdot DC \cdot BC + DC \cdot DA \cdot CA \geqslant AB \cdot BC \cdot CA,$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy D jest ortocentrum trójkąta ABC. Niech E i F będą takimi punktami, że czworokąty $BCDE$ i $BCAF$ są równoległobokami. Wtedy $EDAF$ również jest równoległobokiem oraz $AF = ED = BC$, $EF = AD$, $EB = CD$, $BF = AC$. Z nierówności Ptolemeusza dla czworokątów $ABEF$ i $AEBD$ dostajemy, że

$$AB \cdot AD + BC \cdot CD = AB \cdot EF + AF \cdot BE \geqslant AE \cdot BF = AE \cdot AC,$$

oraz

$$BD \cdot AE + AD \cdot CD = BD \cdot AE + AD \cdot BE \geqslant AB \cdot ED = AB \cdot BC.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned}
&DA \cdot DB \cdot AB + DB \cdot DC \cdot BC + DC \cdot DA \cdot CA = \\
&= DB(AB \cdot AD + BC \cdot CD) + DC \cdot DA \cdot CA \geqslant \\
&\geqslant DB \cdot AE \cdot AC + DC \cdot DA \cdot CA \geqslant \\
&\geqslant AC(BD \cdot AE + AD \cdot CD) \geqslant AC \cdot AB \cdot BC.
\end{aligned}$$

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy czworokąty $ABEF$ i $AEBD$ są cykliczne. Wobec tego $AFED$ jest prostokątem, skąd $AD \perp ED$. Ponieważ $BCDE$ jest równoległobokiem, to $ED \parallel BC$ i $AD \perp BC$. Ponieważ $AEBD$ jest cykliczny, to $\sphericalangle ABE = \sphericalangle ADE$, czyli $BE \perp AB$. Podobnie dostajemy, że $CD \parallel EB$, skąd $AD \perp AB$. Wobec tego D jest ortocentrum trójkąta ABC. $\square$

2. Danych jest $n \geqslant 4$ punktów na płaszczyźnie takich, że odległość między dowolnymi dwoma z nich jest całkowita. Pokazać, że co najmniej $\frac{1}{6}$ wszystkich tych odległości jest podzielna przez 3.

Rozwiązanie:

Pokażemy najpierw tezę dla $n = 4$, tzn. co najmniej jedna odległość jest podzielna przez 3. Oznaczmy punkty przez A, B, C i D i załóżmy, że odległości AB, BC, CD, DA, AC, BD nie są podzielne przez 3.

Bez szkody załóżmy, że $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAD$. Niech $\sphericalangle BAC = x$, $\sphericalangle CAD = y$. Ponadto niech $a = 2BC \cdot AC \cdot \cos x$, $b = 2AD \cdot AC \cos y$, $c = 2AB \cdot AD \cdot \cos(x + y)$. Z twierdzenia cosinusów dla trójkątów ABC, ACD, ABD mamy, że

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - a, \;\; CD^2 = AD^2 + AC^2 - b \;\; BD^2 = AB^2 + AD^2 - c.$$

Ponieważ kwadrat dowolnej liczby daje resztę 1 z dzielenia przez 3, to a, b i c są również liczbami równymi $1 \pmod 3$. Ponadto

$$2AC^2 c = 4AC^2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos x + y = ab - 4AC^2 \cdot AD \cdot AB \cdot \sin x \sin y,$$

więc

$$4AC^2 \cdot AD \cdot AB \cdot \sin x \sin y$$

jest liczbą całkowitą dającą resztę 2 z dzielenia przez 3. Wobec tego

$$\sin x \sin y = \sqrt{(1 - \cos x^2)(1 - \cos y^2)}$$

jest liczbą wymierną, która w liczniku (zapisana jako ułamek nieskracalny) ma liczbę nie podzielną przez 3.

Niech $p = 2AB \cdot AC$ i $q = 2AD \cdot AC$, więc $\cos x = \frac{a}{p}$ i $\cos y = \frac{b}{q}$. Ponieważ

$$\sin x \sin y = \frac{\sqrt{(p^2 - a^2)(q^2 - b^2)}}{pq}$$

jest liczbą wymierną, to licznik prawej strony musi być liczbą całkowitą. Jednakże $p^2 \equiv a^2 \equiv 1 \pmod 3$ a mianownik pq nie jest podzielny przez 3, więc otrzymaliśmy sprzeczność z konkluzją poprzedniego akapitu. Wobec tego zadanie dla $n = 4$ zostało pokazane.

Załóżmy teraz, że $n \geqslant 4$. Ze zbioru n punktów istnieje $\binom{n}{4}$ 4-elementowych podzbiorów $\{A, B, C, D\}$. Co najmniej dwa punkty każdego podzbioru są odległe od siebie o całkowitą liczbę podzielną przez 3 i każda odległość jest liczona co najwyżej w $\binom{n-2}{2}$ podzbiorach. Zatem co najmniej

$$\frac{\binom{n}{4}}{\binom{n-2}{2}} = \frac{\binom{n}{2}}{6}$$

odległości ma długość podzielną przez 3. □

3. Trójkąty ABC i PQR są takie, że punkty A i P są środkami odcinków QR i BC, odpowiednio. Ponadto proste QR i BC są dwusiecznymi kątów wewnętrznych BAC i QPR. Pokazać, że $AB + AC = PQ + PR$.

Rozwiązanie:

Niech X będzie punktem przecięcia BC i QR a okrąg opisany na trójkącie PQR przecina BC w puncie D. Podobnie, niech okrąg opisany na trójkącie ABC przecina QR w punkcie S. Wtedy D jest środkiem łuku QR i S jest środkiem łuku BC, więc $DA \perp QR$ i $SP \perp BC$. Zatem czworokąt $PADS$ jest cykliczny. Mamy

$$QX \cdot XR = PX \cdot XD = AX \cdot XS = BX \cdot XC,$$

więc $BQCR$ jest cykliczny. Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie $BQCR$, wtedy O leży na AD i PS a ponieważ $OP \perp PD$, to $OPQDR$ jest wpisany w okrąg o średnicy OD. Podobnie $OACSB$ jest wielokątem cyklicznym. Jednakże

$$\sphericalangle OBC' = \sphericalangle OSA = \sphericalangle ODP = \sphericalangle ORQ',$$

więc $BC' = RQ'$. Oznacza to, że

$$BA + AC = BA + AC' = BC' = RQ' = RP + PQ' = RP + PQ.$$

□

4. Niech $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem funkcji $f_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pokazać, że istnieją takie funkcje $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że każdą funkcję f_i można otrzymać przez składanie ϕ i ψ.

Rozwiązanie:

Niech $J\colon \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dowolną bijekcją oraz

$$\phi\colon \mathbb{R} \ni x \to J(0, x) \in \mathbb{R}.$$

Dla $u \in \mathbb{R}$ istnieją jednoznacznie wyznaczone $m \in \mathbb{N}$ oraz $y \in \mathbb{R}$. Jeśli $m = 0$, to $u = J(0, y) = \phi(y) = \phi(J(n, x))$ dla pewnych, jednoznacznie wyznaczonych $n \in \mathbb{N}$ oraz $x \in \mathbb{R}$. Niech

$$\psi(u) = \begin{cases} J(n+1, x) & \text{jeśli } u = J(0, y) = \phi(J(n, x)); \\ f_n(x) & \text{jeśli } u = J(n+1, x). \end{cases}$$

Tezę zadania dostajemy składając ϕ oraz ψ następująco:

$$\psi(\psi\phi)^{n+1}\phi(x) = \psi(\psi\phi)^{n+1}J(0,x) = \psi(\psi\phi)^n\psi(\phi(J(0,x))) = \psi(\psi\phi)^n J(1,x) =$$
$$= \psi(\psi\phi)^{n-1}\psi(\phi(J(1,x))) = \psi(\psi\phi)^{n-1}J(2,x) = \ldots = \psi(J(n+1,x)) = f_n(x).$$

$\square$

7. Dane są liczby całkowite dodatnie k i m. Różne liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_k$ oraz $b_1, b_2, \ldots, b_m$ są większe od 1. Dla dowolnego $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ liczba a_i jest iloczynem parzystej liczby liczb pierwszych (niekoniecznie różnych). Dla dowolnego $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ liczba b_j jest iloczynem nieparzystej liczby liczb pierwszych (niekoniecznie różnych). Na ile sposobów można wybrać liczby spośród danych $k+m$ liczb aby dla dowolnego $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ liczba b_j miała parzystą liczbę dzielników spośród wybranych liczb?

Rozwiązanie:

Odpowiedzią jest liczba 2^k. Pokażemy, że dla dowolnego podzbioru $T \subseteq \{a_1, \ldots, a_k\}$, istnieje dokładnie jeden podzbiór $S \subseteq \{b_1, \ldots, b_m\}$ że dowolny b_i ma parzystą liczbę dzielników w zbiorze $T \cup S$.

Ustalmy podzbiór T. Bez szkody zakładamy, że $b_i < b_j$ dla $i < j$. Zatem, $b_j \nmid b_i$ dla $i < j$. Wobec tego, dla dowolnego S takiego, że zbiór $T \cup S$ spełnia warunki zadania mamy, że dla dowolnego $b_i \in T \cup S$ zachodzi $b_i \in T \cup \{b_j : j \leqslant i\}$. Ponieważ a_i i b_i są różne, więc $b_i \notin \{b_j : j < i\}$ i $b_i \notin T$. Ponadto, $b_i \mid b_i$, więc jeśli T i $S \cap \{b_j : j < i\}$ zostały wybrane, to dokładnie jeden wybór $b_i \in S$ lub $b_i \notin S$ daje nam, że b_i ma parzystą liczbę dzielników w $S \cup T$. Zatem, dla $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, każdy wybór między $b_i \in S$ a $b_i \notin S$ jest wymuszany, więc konstruując S w taki sposób dostaniemy że każdy b_i będzie miał parzystą liczbę dzielników w $S \cup T$.

Zatem dla ustalonego T, istnieje dokładnie jeden zbiór S, który spełnia warunki stwierdzenia. Ponieważ dla każdego a_i mamy $a_i \in T$ lub $a_i \notin T$, to istnieje 2^k możliwych wyborów zbioru T. Zatem 2^k zbiorów $T \cup S$ spełniają warunki zadania. $\square$

8. Dane są liczby rzeczywiste $a < b$ oraz $c, d \in (0, 1)$. Pokazać, że istnieje taki wielomian P o współczynnikach całkowitych, że $P(x) \in [a, b]$ dla dowolnego $x \in [c, d]$.

Rozwiązanie:

Pokażemy, że dla pewnej liczby całkowite m i liczby pierwszej n, wielomian

$$P(x) = \frac{m}{n}\left(1 - x^n - (1-x)^n\right)$$

spełnia warunki zadania. Zauważmy, że rozwijając powyższy wielomian ze wzoru dwumianowego widzimy, że jego współczynniki są całkowite, gdyż z pierwszości n liczby $\binom{n}{i}$ dla $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ są podzielne przez n.

Niech $\delta = \min c, 1-d$. Wtedy $[c, d] \subseteq [\delta, 1-\delta]$. Dla dowolnej liczby $r \in (0, 1)$ mamy $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$, więc istnieje liczba pierwsza $n > 2$ dla której

$$\frac{1}{n} > \frac{b-a}{4} \quad \text{oraz } (1-\delta)^n < \frac{b-a}{8 \cdot \max |a|, |b|}.$$

Istnieje ponadto taka liczba całkowita m, że

$$\left|\frac{m}{n} - \frac{a+b}{2}\right| < \frac{b-a}{4}.$$

Wówczas dla $x \in [\delta, 1-\delta]$ otrzymujemy, że

$$\left|P(x) - \frac{m}{n}\right| = \left|\frac{m}{n}\right| \cdot \left|-x^d - (1-x)^d\right| \leqslant \left|\frac{m}{n}\right| \cdot 2(1-\delta)^n < \frac{\left|\frac{m}{n}\right|}{\max |a|, |b|} \cdot \frac{b-a}{4} < \frac{b-a}{4},$$

co w połączeniu z poprzednią nierównością daje

$$\left|P(x) - \frac{a+b}{2}\right| < \frac{b-a}{2},$$

skąd $P(x) \in [a, b]$. $\square$

Mecz matematyczny

1. Niech k będzie taką dodatnią liczbą całkowitą, że liczba $p = 4k + 3$ jest pierwsza. Dowieść, że spośród wierzchołków p-kąta foremnego można wybrać $2k+1$ wierzchołków w taki sposób, że wśród wzajemnych odległości wybranych wierzchołków żadna nie powtarza się więcej niż k razy.

Rozwiązanie:

Ponumerujmy wierzchołki p-kąta liczbami od 0 do $p - 1$ i wybierzmy te wierzchołki, które zostały ponumerowane nieresztami kwadratowymi modulo p. Oznaczmy te niereszty przez $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_{2k+1}$. Niech dla $r = 1, 2, 3, \ldots, p-1$ zapis $N(r)$ oznacza liczbę takich par (i, j), że $1 \leqslant i \leqslant 2k + 1$, $1 \leqslant j \leqslant 2k + 1$, $i \neq j$ oraz $n_i - n_j \equiv r \pmod p$.

Ponieważ zbiór $\{n_1, n_2, n_3, \ldots, n_{2k+1}\}$ jest niezmienniczy na mnożenie modulo p przez reszty kwadratowe, $N(r)$ ma taką samą wartość dla wszystkich reszt kwadratowych r oraz taką samą wartość dla wszystkich niereszt kwadratowych r. Ponadto $N(r) = N(p - r)$, a ponieważ -1 jest nieresztą kwadratową modulo p, liczba $N(r)$ jest taka sama dla każdego r, skąd $N(r) = k$. □

2. Pokazać, że dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 3$, istnieją liczby całkowite dodatnie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tworzące ciąg arytmetyczny oraz liczby całkowite dodatnie $b_1, b_2, \ldots, b_n$ tworzące ciąg geometryczny takie, że

$$b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < \ldots < b_n < a_n.$$

Rozwiązanie:

Wskażemy szukane ciągi takie, że $b_n = a_{n-1} + 1$ oraz $b_{n-1} = a_{n-2} + 1$. Niech $d := a_{n-1} - a_{n-2}$. Wtedy dla $2 \leqslant i, j \leqslant n - 1$ mamy $b_{i+1} - b_i \geqslant b_n - b_{n-1} = d$. Wobec tego

$$b_j = b_n + \sum_{i=j}^{n-1} (b_i - b_{i+1}) > a_{n-1} + (n - j)d = a_{j-1}.$$

Gwarantując ponadto nierówność $b_1 < a_1$, dostajemy, że

$$b_j = b_1 + \sum_{i=1}^{j-1} (b_{i+1} - b_i) \leqslant a_1 + (j - 1)d = a_j$$

dla wszystkich j, więc nierówności z zadania będą spełnione.

Niech teraz $b_1, b_2, \ldots, b_n$ będą równe odpowiednio k^{n-1}, $k^{n-2}(k+1)$, $\ldots$, $k^0(k+1)^{n-1}$, gdzie k będzie podane później. Niech $a_{n-1} := b_n - 1$ i $a_{n-2} := b_{n-1} - 1$. Wówczas

$$d = a_n - a_{n-1} = b_n - b_{n-1} = (k+1)^{n-2}$$

oraz

$$a_1 = (k+1)^{n-2}(k+3-n) - 1.$$

Musimy wybrać k tak aby zachodziła nierówność $a_1 > b_1$, czyli

$$(k+1)^{n-2}(k+3-n) - 1 - k^{n-1} > 0.$$

Patrząc na lewą stronę powyższej nierówności jako wielomian zmiennej k widzimy, że współczynnik przy najwyższej potędze (równej $n-2$) jest równy 1. Wobec tego dla odpowiednio dużej wartości k nierówność zachodzi, tym samym konstrukcja z zadania jest kompletna. $\square$

3. Rozstrzygnąć, czy istnieje skończony zbiór liczb pierwszych $\mathcal{T}$, taki, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje $p \in \mathcal{T}$ i liczba naturalna k, że $v_p(k!) = n$.

Rozwiązanie:

Rozważmy zbiór S_p dla danej liczby pierwszej p jako zbiór liczb postaci $v_p(k!)$, gdzie k przebiega po zbiorze liczb naturalnych. Rozpoczniemy od wykazania następującego lematu:

Dla liczby całkowitej dodatniej a dostatecznie dużego b zależnego od a i p, wśród dowolnych b kolejnych liczb naturalnych istnieje a kolejnych liczb takich, że żadna nie należy do S_p.

Dowód. Niech $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ będą kolejnymi dodatnimi elementami zbioru S_p. Nietrudno zauważyć, że $a_k = v_p((pk)!)$. W związku z tym dla każdego l, które jest podzielne przez p^a różnica $a_{l-1} - a_l$ wynosi co najmniej $a+1$, czyli ciąg liczb $a_{l-1}+1, a_{l-1}+2, \ldots a_l - 1$ jest ciągiem a kolejnych liczb, z których żaden nie jest elementem S_p.

Teraz wystarczy uzasadnić, że taki ciąg możemy znaleźć w każdym dostatecznie długim przedziale. Weźmy przedział długości b, gdzie oszacowanie b będzie wynikała z dowodu. Prawie wszystkie elementy (czyli co najmniej $b-2a+2$) tego przedziału muszą być elementami zbioru $\{a_l, a_l+1, a_l+2, \ldots, a_{l+p^a-1}\}$, dla pewnego l podzielnego przez p^a. Wynika to stąd, że między zbiorami tej postaci są zbiory co najmniej a kolejnych liczb całkowitych z których żaden nie należy do S_p. Tymczasem

$$a_{l+p^a-1} - a_l = p^a - 1 + p^{a-1} - 1 + p^{a-2} + 1 + \ldots p - 1,$$

co wynika z twierdzenia *Legendre'a* o najwyższej potędze p dzielącej silnię liczby naturalnej.

Wobec tego aby przedział b-elementowy nie zawierał a-elementowego przedziału liczb nie należących do S_p, wystarczy by

$$b - 2a + 2 \leqslant 1 + p^a - 1 + p^{a-1} - 1 + p^{a-2} + 1 + \ldots p - 1,$$

skąd b musi być ograniczone, jednakże biorąc odpowiednio duże b dostajemy tezę lematu. □

Teraz powróćmy do rozwiązania zadania. Zbiór $\mathbb{Z}_+$ jest sumą zbiorów $S_{p_1}, S_{p_2}, \ldots$, gdzie $p_1, p_2, \ldots$ to elementy zbioru $\mathcal{T}$. Biorąc dostatecznie długi przedział długości a możemy na mocy lematu znaleźć dowolnie długi przedział długości a_1 taki, że żaden z jego elementów nie należy do S_{p_1}. Następnie z niego możemy wybrać długi przedział długości a_2 taki, że żaden z jego elementów nie należy do S_{p_2}. Powtarzając ten argument aż do wyczerpania wszystkich elementów zbioru $\mathcal{T}$ otrzymujemy liczbę, która nie należy do żadnego z S_p. To pokazuje, że szukany zbiór liczb pierwszych nie istnieje. □

4. Załóżmy, że $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ są liczbami rzeczywistymi. Pokazać, że

$$a_1 a_2^4 + a_2 a_3^4 + \ldots + a_n a_1^4 \geqslant a_2 a_1^4 + a_3 a_2^4 + \ldots + a_1 a_n^4.$$

Rozwiązanie:

Pokażemy tę nierówność indukcyjnie względem n. Dla $n = 2$, obie strony nierówności są równe. Załóżmy prawdziwość nierówności na $n - 1$ tzn.

$$a_1 a_2^4 + a_2 a_3^4 + \ldots + a_{n-1} a_1^4 \geqslant a_2 a_1^4 + a_3 a_2^4 + \ldots + a_1 a_{n-1}^4.$$

Odejmując ją od nierówności, którą chcemy pokazać widzimy, że wystarczy pokazać, że

$$a_{n-1} a_n^4 + a_n a_1^4 - a_{n-1} a_1^4 \geqslant a_n a_{n-1}^4 + a_1 a_n^4 - a_1 a_{n-1}^4.$$

Łatwo zauważyć, że jest to nierówność, którą należy pokazać dla $n = 3$. Dla ułatwienia przepiszmy nierówność w postaci

$$xy^4 + yz^4 + zx^4 \geqslant yx^4 + zy^4 + xz^4,$$

gdzie $x \geqslant y \geqslant z$. Jest ona konsekwencją następującej tożsamości

$$\begin{aligned} &yx^4 + zy^4 + xz^4 - xy^4 + yz^4 + zx^4 = \\ &= \frac{1}{2}(y - x)(z - y)(z - x)\left((x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2\right) \geqslant 0. \end{aligned}$$

□

5. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $P(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, które dla dowolnego rzeczywistego x spełniają równość

$$P(x)P(2x^2+1) = P(x^2)(P(2x+1) - 4x).$$

Rozwiązanie:

Oczywiście $P \equiv 0$ jest rozwiązanie. Załóżmy, że $P \neq 0$, wtedy $P(2x+1) = 2^2P(x) + R(x)$, gdzie $n = \deg P$ oraz $R \equiv 0$ lub $\deg R = m < n$. Na podstawie równanie mamy, że

$$P(x)R(x^2) = P(x^2)(R(x) - 4x). \tag{1}$$

Zatem $R \neq 0$, gdyż w przeciwnym wypadku $P \equiv 0$. Przypuśćmy, że $m \geqslant 2$. Wtedy porównując stopnie prawej i lewej strony dostajemy równanie $n+2m = 2n+m$, więc $m = n$ — sprzeczność. Zatem $m \leqslant 1$ i $1 \geqslant k = \deg(R(x) - 4x)$. Równość $n + 2m = 2n + k$ pokazuje, że $n = 2$, $m = 1$ i $k = 0$, więc P jest trójmianem kwadratowych takim, że

$$P(2x+1) = 4P(x) + 4x + c, \tag{2}$$

dla pewnego $c \in \mathbb{R}$. Wstawiając $x = 1$ do 1 widzimy, że $P(1) = 0$, więc $P(x) = a(x-1)(x-b)$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$. Podstawiając uzyskaną postać do 2 mamy, że $P(x) = x^2 - 1$ i jak łatwo sprawdzić obok rozwiązania $P \equiv 0$ wielomian ten również jest rozwiązaniem. □

6. Każdy z uczestników obozu w Kołkówce jest dobrym graczem w bilarda lub też nie. Każdy dobry gracz wysyła dokładnie jedną wiadomość do gracza niedoświadczonego z propozycją pojedynku. Każdy słaby gracz wysyłał dokładnie jedną wiadomość do doświadczonego gracza z odpowiedzią. Jednakże co najmniej jeden dobry gracz nie otrzymał wiadomości. Pokazać, że istnieje grupa S dobrych graczy i grupa T słabych graczy, które spełniają warunki:

- osoby z S wysłały wiadomości tylko do tych graczy, które nie należą do T,
- osoby z T wysłały wiadomość tylko do tych graczy, które nie należą do S.

Rozwiązanie:

Niech A będzie zbiorem dobrych graczy a B zbiorem słabych. Niech $f\colon A \to B$ i $g\colon B \to A$ będą funkcjami zdefiniowanymi następująco: $f(a)$ jest graczem słabym, który otrzymał wiadomość od a, $g(b)$ jest graczem dobrym, który otrzymał wiadomość od b. Jeżeli takie zbiory S i T miałby istnieć to oznacz to, że $T = B \setminus f(S)$, czyli musimy pokazać, że istnieje podzbiór S zbioru A taki, że $A \setminus S = g(B \setminus f(S))$.

Dla $X \subseteq A$ niech $h(X) = A \backslash g(B \backslash f(x))$. Jeśli $X \subseteq Y$, to $f(x) \subseteq f(Y)$, więc $B \backslash f(Y) \subseteq B \backslash f(X)$, skąd $g(B \backslash f(Y)) \subseteq g(B \backslash f(X))$. Oznacza $A \backslash g(B \backslash f(X)) \subseteq A \setminus g(B \setminus f(Y))$, więc $h(X) \subseteq h(Y)$.

Niech

$$M := \{X \subseteq A \colon h(X) \subseteq X\}.$$

Zbiór M jest niepusty, gdyż $A \in M$. Ponadto g nie jest surjekcją, więc któryś gracz dobry a_0 nie należy do zbiorów $g(B \backslash f(X))$, więc $a_0 \in f(X)$ dla dowolnego $X \subseteq A$. Wobec tego M zawiera a_0, skąd zbiór

$$S := \bigcap_{X \in M} X$$

jest niepusty.

Z definicji S wynika, że $h(S) \subseteq S$. Z monotoniczności h wynika, że $h(h(S)) \subseteq h(S)$, więc $h(S) \in M$ i $S \subset h(S)$. Łącząc to z zawieraniem $h(S) \subseteq S$ dostajemy, że $S = h(S)$, skąd łatwo mamy tezę zadania. $\square$

7. Szachownicę $n \times n$ pokryto trójkątami o wierzchołkach w punktach kratowych i o polu równym $\frac{1}{2}$. Dowieść, że co najmniej $2n$ z tych trójkątów jest prostokątnych.

Rozwiązanie:

Udowodnimy następujący

Jeżeli wierzchołki trójkąta ABC znajdują się w punktach kratowych i jego pole jest równe $\frac{1}{2}$, to trójkąt ABC nie jest ostrokątny.

Dowód lematu. Przyjmijmy, że współrzędne punktów A, B, C, to odpowiednio $(0,0)$, (x,y), (a,b) i załóżmy, że trójkąt ABC jest ostrokątny. Wówczas iloczyn skalarny dowolnej pary boków jest dodatni, co możemy przepisać w postaci nierówności

$$ax + by > 0, \quad -x(a-x) - y(b-y) > 0, \quad -a(x-a) - b(y-b) > 0$$

lub równoważnie

$$ax + by > 0, \quad x^2 + y^2 > ax + by, \quad a^2 + b^2 > ax + by.$$

Ze wzoru na pole trójkąta wiemy ponadto, że $|ay - bx| = 1$. Wykorzystując znaną tożsamość na iloczyn sum kwadratów otrzymujemy

$$(x^2 + y^2)(a^2 + b^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2 = (ax + by)^2 + 1.$$

Skoro wszystkie liczby a, b, x, y są całkowite, to z drugiej strony mamy jednak

$$(ax + by)^2 + 1 \leqslant (x^2 + y^2 - 1)(a^2 + b^2 - 1) + 1$$

$$= (x^2+y^2)(a^2+b^2) + (1-(x^2+y^2)) + (1-(a^2+b^2)) \leqslant (x^2+y^2)(a^2+b^2).$$

Powyższe nierówności są więc w rzeczywistości równościami. W szczególności

$$ax + by = x^2 + y^2 - 1 = a^2 + b^2 - 1 = 0,$$

a to jest niemożliwe, gdyż liczba $ax+by$ jest dodatnia. Otrzymana sprzeczność kończy dowód lematu.

W pierwszym kroku właściwiej części rozwiązania pokażemy jak przekształcić podane pokrycie szachownicy trójkątami w pokrycie o tej samej liczbie trójkątów prostokątnych, a składające się jedynie z dwóch typów trójkątów: prostokątnego o bokach $1, 1, \sqrt{2}$ lub trójkąta o bokach $1, \sqrt{2}, \sqrt{5}$.

Ze wszystkich trójkątów występujących w pokryciu wybierzmy trójkąt ABC, którego jeden z boków posiada maksymalną możliwą długość, niech będzie to bok AB. Oczywiście długość odcinka AB jest większa niż 1, a więc w szczególności jest nie mniejsza niż $\sqrt{2}$ i AB nie jest odcinkiem zawartym w pewnej krawędzi szachownicy. **Wzór Picka** gwarantuje, trójkąt o polu 1 i wierzchołkach w punktach kratowych nie posiada punktów kratowych wewnątrz ani na bokach. Odcinek AB jest zatem bokiem jeszcze jednego trójkąta w rozważanym podziale, niech będzie to trójkąt ABD. Wykażemy, że czworokąt $CADB$ jest równoległobokiem. Wystarczy w tym celu dowieść, że po jednej stronie prostej AB istnieje dokładnie jeden trójkąt o polu $\frac{1}{2}$ którego AB jest najdłuższym bokiem – wierzchołki tych trójkątów leżące po przeciwnych stronach AB są bowiem symetryczne względem środka AB. Załóżmy przeciwnie i niech X, Y będą takimi punktami leżącymi po jednej stronie AB, że $[ABX] = [ABY] = \frac{1}{2}$ oraz $AB \geqslant \max\{AX, BX, AY, BY\}$ (gdzie przez $[W]$ oznaczamy pole wielokąta W). Proste XY i AB są równoległe. Możemy założyć, że w trapezie $ABYX$ odcinki AY, BX są przekątnymi. Wówczas z nierówności trójkąta łatwo wynika nierówność $AB + XY < AY + BX$, a stąd $XY < AB$. Zauważmy teraz, że

$$[ABXY] = \frac{AB + XY}{2} \cdot h < AB \cdot h = 1,$$

gdzie h jest długością wysokości w trójkątach ABX oraz ABY. Czworokąt $ABXY$ jest więc czworokątem o wierzchołkach w punktach kratowych i polu mniejszym niż 1, co daje sprzeczność ze wzorem Picka. Wykazaliśmy w ten sposób, że czworokąt $CADB$ jest równoległobokiem.

Z udowodnionego przez nas lematu wynika, że trójkąt ABC nie jest ostrokątny. Jeżeli $AB \leqslant \sqrt{5}$, to wszystkie trójkąty w podziale są jednego z rozważanych przez nas typów, a zatem w tym wypadku nie ma czego dowodzić. Załóżmy więc, że $AB > \sqrt{5}$. Trójkąt CAD jest wówczas trójkątem rozwartokątnym i $CD < AB$, gdyż kąt rozwarty w równoległoboku $CADB$ znajduje się na przeciwko przekątnej AB, gdyż jest to najdłuższy bok w rozwartokątnym trójkącie ABC. Dzieląc więc równoległobok $CADB$ wzdłuż przekątnej CD otrzymujemy podział na dwa trójkąty, w których najdłuższy bok jest krótszy niż AB.

Ponieważ trójkąty te nie są prostokątne, łączna liczba trójkątów prostokątnych w podziale nie wzrasta. Powtarzając tą operację wielokrotnie dochodzimy do sytuacji, w której nasz podział składa się z trójkątów prostokątnych o bokach $1, 1, \sqrt{2}$ lub równoległoboków o bokach $1, \sqrt{2}$ i przekątnej długości $\sqrt{5}$. Liczba trójkątów prostokątnych jest przy tym taka sama jak na początku.

Rozważmy teraz graf, którego wierzchołki tworzą boki wszystkich n^2 kwadratów występujących na szachownicy, zaś dwa boki połączone są krawędzią, jeżeli tworzą one przyprostokątne pewnego trójkąta prostokątnego, który występuje w pokryciu lub tworzą one przeciwległe boki równoległoboku występującego w pokryciu. Wówczas każdy odcinek, który nie leży na obwodzie szachownicy jest połączony z dokładnie dwoma innymi odcinkami. Z kolei każdy odcinek zawarty w obwodzie szachownicy połączony jest z dokładnie jednym innym bokiem. Nasz graf składa się więc z układu rozłącznych ścieżek i cykli, przy czym ścieżki zaczynają się i kończą na bokach szachownicy. Ze względu na konstrukcję grafu łatwo ponadto zauważyć, że jeżeli ścieżka zaczyna i kończy się na tym boku szachownicy, to znajdują się na niej co najmniej dwa trójkąty prostokątne. Podobnie, jeżeli ścieżka łączy nierównoległe krawędzie szachownicy, to zawiera ona co najmniej jeden trójkąt prostokątny.

Rozważymy dwa przypadki. W pierwszym z nich załóżmy, że istnieje ścieżka łącząca równoległe boki szachownicy. Wówczas nie istnieje ścieżka łącząca pozostałe boki. Rozważmy dowolną spójną składową (czyli ścieżkę lub cykl) naszego grafu, która zaczyna się na jednym z tych dwóch pozostałych boków. Albo łączy ona ten bok z samym sobą i zawiera w tym przypadku co najmniej 2 trójkąty prostokątne, albo zaczyna się na tej krawędzi i kończy na nierównoległej, czyli zawiera przy najmniej 1 trójkąt prostokątny. W obu przypadkach na każdy z $2n$ odcinków leżących na wyróżnionych bokach przypada przy najmniej 1 trójkąt. Łącznie otrzymujemy więc przynajmniej $2n$ trójkątów prostokątnych.

Przyjmijmy teraz, że nie istnieje ścieżka łącząca równoległe boki szachownicy. Nasz graf składa się z co najmniej $2n$ spójnych składowych i każda z nich zawiera wówczas przynajmniej jeden trójkąt prostokątny. A więc i w tym przypadku teza jest dowiedziona. Kończy to rozwiązanie zadania. $\square$

8. Niech P będzie punktem przecięcia przekątnych AC i BD czworokąta wypukłego $ABCD$ w którym $AB = AC = BD$. Punkty O i I są odpowiednio środkiem okręgu opisanego i wpisanego w trójkąt ABP. Pokazać, że jeśli $O \neq I$, to OI i CD są prostopadłe.

Rozwiązanie:

Wykorzystując znany fakt widzimy, że wystarczy pokazać równość

$$DO^2 - CO^2 = DI^2 - CI^2.$$

Niech $AB = AC = BD = p$, $PC = a$ i $PD = b$. Wtedy $AP = p - a$ i $BP = p - b$. Niech R będzie promieniem okręgu opisanego na trójkącie ABP.

Z potęgi punktu dostajemy, że

$$pb = DP \cdot DB = DO^2 - R^2.$$

Podobnie $pa = CO^2 - R^2$, więc $DO^2 - CO^2 = p(b-a)$.

Ponieważ trójkąt ABD jest równoramienny ($BA = BD$) oraz I leży na dwusiecznej kąta ABD, to $ID = IA$. Podobnie $IB = IC$. Niech T będzie punktem styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC z bokiem AB. Wtedy

$$AT = \frac{AB + AP - BP}{2} = \frac{p+b-a}{2} \quad \text{i} \quad BT = \frac{p+a-b}{2}.$$

Ponieważ $IT \perp AB$, to

$$AI^2 - BI^2 = AT^2 - BT^2.$$

Zatem

$$DI^2 - CI^2 = AI^2 - BI^2 = AT^2 - BT^2 = (AT+BT)(AT-BT) = p(b-a).$$

□

9. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku A. Punkty M, N leżą na bokach AB i AC, odpowiednio a punkty P, Q leżą na boku BC. Wiadomo, że punkty M, N, P i Q są kolejnymi wierzchołkami prostokąta. Proste BN i MQ przecinają się w punkcie E, natomiast proste CM i NP przecinają się w punkcie F. Pokazać, że $\sphericalangle BAE = \sphericalangle CAF$.

Rozwiązanie:

Niech X będzie punktem przecięcia BN i CM a Y punktem przecięcia BF i CE. Z lematu o izogonalnym sprzężeniu punkty E i F są sprzężone w kącie BAC wtedy i tylko wtedy, gdy X i Y są. Tymczasem z twierdzenia Cevy wiemy, że X leży na środkowej trójkąta BAC. Skoro BAC jest prostokątny, to X leży na prostej łączącej A ze środkiem okręgu opisanego na BAC. Wystarczy więc pokazać, że Y leży na wysokości opuszczonej z wierzchołka A.

Niech Z będzie rzutem punktu Y na BC. Z twierdzenia Talesa mamy:

$$\frac{BZ}{YZ} = \frac{BP}{FP} \quad \text{oraz} \quad \frac{CZ}{YZ} = \frac{CQ}{EQ}.$$

Dzieląc te równości dostajemy, że

$$\frac{BZ}{CZ} = \frac{BP \cdot EQ}{FP \cdot CQ}.$$

Stosujemy ponownie twierdzenie Talesa mamy, że

$$BP = \frac{BQ \cdot NP}{EQ} \quad \text{i} \quad CQ = \frac{MQ \cdot CP}{FP}.$$

Podstawiając wyliczone wartości BP i CQ do powyższego wzoru dostajemy równość

$$\frac{BZ}{CZ} = \frac{BQ \cdot NP \cdot EQ \cdot FP}{MQ \cdot CP \cdot FP \cdot EQ} = \frac{BQ}{CP}$$

Z podobieństwa trójkątów dostajemy tezę. □

10. W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E, a proste AD i BC przecinają się w punkcie F. Punkt P różny od E leży wewnątrz czworokąta, przy czym kąty APB i CPD są proste. Wykazać, że także kąt EPF jest prosty.

Rozwiązanie:

Z warunków zadania wynika, że punkt P leży na okręgu o_1 o średnicy AB oraz na okręgu o_2 o średnicy CD. Należy natomiast udowodnić, że leży on również na okręgu o o średnicy EF. W tym celu wystarczy wykazać, że okręgi o_1, o_2 i o albo mają dwa różne punkty wspólne, albo są do siebie styczne w jednym punkcie. To zaś będzie konsekwencją stwierdzenia, że istnieje jedna prosta, która jest osią potęgową każdej pary spośród nich.

Aby udowodnić istnienie takiej prostej, oznaczmy przez H punkt przecięcia wysokości trójkąta BCE i niech B', C', E' będą spodkami wysokości tego trójkąta opuszczonych odpowiednio z wierzchołków B, C, E. Wtedy punkty B' i C' leżą na okręgu o średnicy BC, a punkty C' i E' leżą na okręgu o średnicy CE. Stąd otrzymujemy równości

$$HB \cdot HB' = HC \cdot HC' = HE \cdot HE'.$$

Ponadto odcinki BB', CC' i EE' są cięciwami odpowiednio okręgów o_1, o_2 i o, a punkt H leży wewnątrz każdego z tych odcinków, na zewnątrz każdego z nich albo jest ich wspólnym końcem. To wraz z powyższymi zależnościami dowodzi, że punkt H ma jednakowe potęgi względem wszystkich trzech rozważanych okręgów. Analogicznie uzasadniamy, że punkt przecięcia wysokości trójkąta ADE ma jednakowe potęgi względem tych okręgów.

Jeżeli oba punkty przecięcia wysokości nie pokrywają się, to istnieją dwa różne punkty o jednakowych potęgach względem wszystkich trzech rozpatrywanych okręgów. Wynika stąd prawdziwość ostatniego zdania pierwszego akapitu rozwiązania. Przypuśćmy z kolei, że punkt H jest też punktem przecięcia wysokości trójkąta ADE. Gdyby $H \neq E$, to prosta HE, zawierająca wysokości trójkątów BCE i ADE opuszczone z wierzchołka E, byłaby prostopadła do prostych BC i AD, które jednak nie są równoległe. Wobec tego $H = E$, czyli przekątne AC i BD są prostopadłe. Nie tracąc ogólności rozwiązania możemy ponadto przyjąć, że punkty E i F leżą po przeciwnych stronach prostej CD. W tej sytuacji proste AD i BC nie są prostopadłe, gdyż w przeciwnym razie w czworokącie wypukłym $ECFD$ kąty wewnętrzne przy wierzchołkach E i F byłyby proste, a kąty przy wierzchołkach C i D byłyby rozwarte, co nie jest możliwe. Zatem w trójkątach ACF i BDF kąt przy wierzchołku F nie jest prosty. To oznacza, że punkty przecięcia wysokości tych trójkątów są różne od F; punkty te — podobnie jak w czwartym zdaniu tego akapitu — nie mogą się więc pokrywać. Naśladując teraz rozumowanie przeprowadzone w drugim akapicie dowodzimy, że oba punkty przecięcia wysokości mają jednakowe potęgi względem okręgów o_1, o_2 i o, co kończy rozwiązanie. $\square$

11. Niech d będzie najmniejszą z odległości pomiędzy przeciwległymi krawędziami czworościanu, natomiast niech h będzie najmniejszą z wysokości tego czworościanu. Udowodnić, że $2d > h$.

Rozwiązanie:

Niech równoległoboki $ABCD$ i $EFGH$ będą ścianami takiego równoległościanu $\mathcal{R}$, że $ACHF$ jest rozważanym czworościanem $\mathcal{C}$. Przypuśćmy, że trójkąt AFH jest ścianą czworościanu $\mathcal{C}$ o największym polu. Niech pole równoległoboku $ABCD$ będzie równe a, wysokość równoległościanu $\mathcal{R}$ poprowadzona na $ABCD$ równa d_1, pole trójkąta AFH równe b. Wówczas wysokość czworościanu $\mathcal{C}$ poprowadzona na AFH jest równa h. Ponieważ suma pól trójkątów AFH i CFH jest większa od pola równoległoboku $ABCD$, więc $2b > a$. Stąd $2bh > ah$. Ale objętość czworościanu $\mathcal{C}$ jest 3 razy mniejsza od objętości równoległościanu $\mathcal{R}$, więc $bh = ad_1$.

Na koniec wystarczy zauważyć, że d_1 jest odległością prostych AC i FH, więc nie przekracza odległości odcinków AC i FH. $\square$

Spis treści