



III Liceum Ogólnokształcące im. Adama Mickiewicza w Tarnowie

OBÓZ PRZYGOTOWAWCZY DO OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Kołkówka 2019

Obóz Przygotowawczy do Olimpiady Matematycznej
Kołkówka, 27 marca – 31 marca 2019

Skład tekstu:

Dominik Burek
Jan Fornal
Filip Gawron
Jakub Węgrecki

Treści zadań

Zawody indywidualne

1. Na sferze wybrano takie punkty A, B, C, D, E że odcinki AB i CD przecinają się w punkcie F a punkty C, F, A są równoodległe od E . Udowodnić, że proste BD oraz EF są prostopadłe.

2. Pokazać, że każdy unormowany wielomian stopnia n da się zapisać jak średnia arytmetyczna dwóch unormowanych wielomianów stopnia n , które mają n pierwiastków rzeczywistych.

Uwaga: Wielomian nazywamy unormowanym, gdy jego współczynnik przy najwyższej potędze jest równy 1.

3. Znaleźć wszystkie liczby wymierne x, y , które spełniają równanie

$$x^2 = y^3 + y$$

4. Niech S będzie podzbiorem zbioru $\{1, 2, \dots, 2^m \cdot n\}$ (dla pewnych liczb całkowitych dodatnich m, n) takim, że liczba elementów S wynosi $(2^m - 1) \cdot n + 1$. Pokazać, że S zawiera $m + 1$ różnych liczb $a_0, a_1, \dots, a_m$ takich, że a_{k-1} jest dzielnikiem a_k dla $k = 1, 2, \dots, m$.

5. Niech n będzie ustaloną dodatnią liczbą nieparzystą. Wyznaczyć największą możliwą liczbę elementów zbioru złożonego z liczb całkowitych dodatnich, mniejszych od $3n$, w którym każde dwa różne elementy mają i różnicę, i sumę różną od n .

6. Liczbę całkowitą dodatnią k nazwiemy *liczbą Masarni* jeśli dla pewnego trójkąta prostokątnego ABC o bokach całkowitych zachodzi $k = P_{ABC}$. Udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej $n \geq 12$ pomiędzy n a $2n$ istnieje przynajmniej jedna liczba Masarni.

Uwaga: Poprzez P_F oznaczamy pole figury F .

7. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym. Symetralne boków AB oraz CD przecinają się w punkcie Y . Niech punkt X będzie takim punktem wewnątrz $ABCD$, że $\angle ADX = \angle BCX < 90^\circ$ oraz $\angle DAX = \angle CBX < 90^\circ$. Udowodnić, że $\angle AYB = 2 \cdot \angle ADX$.

8. Niech $\mathbb{R}^0$ oznacza zbiór niezerowych liczb rzeczywistych. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R}^0 \rightarrow \mathbb{R}^0$ takie, że dla każdej pary $x, y \in \mathbb{R}^0$ dla której $x^2 + y \neq 0$ zachodzi:

$$f(x^2 + y) = f(x)^2 + \frac{f(xy)}{f(x)}$$

Mecz Matematyczny

1. Znaleźć wszystkie liczby całkowite a, b, c spełniające

$$3a^4 + 4b^4 = 19c^4$$

2. Dla danej liczby całkowitej dodatniej n , przez $f(n)$ oznaczmy moc największego możliwego zbioru S o tej własności, że sumy $a + b$, gdzie $a \neq b \in S$ dają parami różne reszty przy dzieleniu przez n . Pokazać, że istnieje nieskończenie wiele n takich, że $f(n) > \sqrt{n} - 1$.

3. Niech G będzie grafem i $f(G)$ jego liczbą chromatyczną (czyli najmniejszą liczbą kolorów potrzebnych, żeby można było pomalować wierzchołki grafu tak, że żadna krawędź nie łączy dwóch wierzchołków tego samego koloru). Załóżmy, że G został pomalowany na $f(G)$ kolorów. Pokazać, że w G istnieje ścieżka długości $f(G)$ taka, że wszystkie jej wierzchołki są różnego koloru.

4. Danych jest 10^{2019} planet w międzygalaktycznym imperium. Każde dwie planety są połączone dwukierunkową drogą zbudowaną przez jedną z 2019 firm. Władca imperium chce zamknąć k firm, tak by wciąż z każdej planety można było dotrzeć do każdej innej. Znaleźć największe k , dla którego to jest zawsze możliwe.

5. Niech S_0 będzie skończonym zbiorem liczb całkowitych dodatnich. Definiujemy zbiory $S_1, S_2, \dots$ liczb całkowitych dodatnich, takie że: a należy do S_{n+1} wtedy i tylko wtedy gdy dokładnie jedna z liczb $a - 1, a$ należy do S_n . Pokazać, że istnieje nieskończenie wiele N takich, że $S_N = S_0 \cup \{N + a : a \in S_0\}$

6. Dany jest czworościan $PABC$. Niech PH będzie jego wysokością. Niech proste HA', HB', HC' będą prostymi prostopadłymi odpowiednio do prostych PA, PB, PC . Niech płaszczyzny ABC oraz $A'B'C'$ przecinają się w prostej l . Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na ABC . Udowodnić, że l jest prostopadła do OH .

7. Okręgi ω_1 i ω_2 o środkach w punktach O_1, O_2 są styczne zewnętrznie w punkcie D i styczne wewnętrznie do okręgu ω w punktach odpowiednio E, F . Niech l będzie wspólną styczną ω_1 i ω_2 przechodzącą przez D , a AB będzie średnicą ω prostopadłą do l taką, że A, E, O_1 są po tej samej stronie l . Pokazać, że proste AO_1, BO_2, EF, l przecinają się w jednym punkcie.

8. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , gdzie I_A to środek okręgu dopisanego do boku BC w trójkącie ABC . Przez ω oznaczmy okrąg styczny wewnętrznie do okręgu opisanego na trójkącie ABC i styczny do boków AB i AC . Punkt H to rzut punktu A na BC , natomiast E to środek dłuższego łuku BC okręgu opisanego na ABC . Punkty M i N to środki boków AH i BC . Przecięcie MN i AE oznaczmy przez P . Prosta I_AP tnije okrąg ω w dwóch punktach S i T . Pokazać, że któryś z okręgów BSC lub BTC jest styczny do ω

9. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ takie, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}^+$ zachodzi

$$f\left(\frac{y}{f(x+1)}\right) + f\left(\frac{x+1}{xf(y)}\right) = f(y)$$

10. Paweł Masarnia zepsuł kalkulator, w taki sposób, że jedyne przyciski, które działają to: $\sin$, $\cos$, $\tan$, $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ oraz $\tan^{-1}$. Początkowo kalkulator wyświetla 0. Udowodnij, że dla dowolnej wymiernej dodatniej liczby q wciskając pewien skończony ciąg przycisków działających kalkulator zwróci q .

11. Dla danej liczby rzeczywistej nieujemnej a zdefiniujmy ciąg (a_n) następująco: $a_1 = \sqrt{a}$ oraz $a_{n+1} = \sqrt{a + a_n}$. Wyznaczyć wszystkie a o tej własności, że ciąg (a_n) ma nieskończenie wiele elementów będących liczbami wymiernymi.

12. Niech a_n będzie takim ciągiem, że $a_0 = 6$ oraz

$$a_n = a_{n-1} + NWD(n, a_{n-1})$$

Udowodnić, że $NWD(n, a_{n-1})$ jest liczbą pierwszą lub jest równe 1.

Zadania dodatkowe

1. Niech $p > 5$ będzie liczbą pierwszą oraz $A = \{b_1, b_2, \dots, b_{\frac{p-1}{2}}\}$ będzie zbiorem reszt kwadratowych modulo p . Udowodnić, że nie istnieją liczby całkowite dodatnie a, c niepodzielne przez p , takie że zbiór $B = \{ab_1 + c, ab_2 + c, \dots, ab_{\frac{p-1}{2}} + c\}$ oraz zbiór A są rozłączne modulo p .

2. Niech F będzie rodziną podzbiorów zbioru $\{1, \dots, n\}$ taką, że żaden zbiór z F nie zawiera się w innym zbiorze z F . Pokazać, że:

$$\sum_{A \in F} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \leq 1$$

gdzie $|A|$ to moc zbioru A (liczba jego elementów).

3. Dany jest graf, którego wierzchołkami są liczby całkowite dodatnie, w którym wierzchołki a oraz b są połączone wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a + b + 1 | a^2 + b^2 + 1$$

Rozstrzygnąć, czy dany graf jest spójny

4. Niech $p \geq 5$ będzie liczbą pierwszą. Udowodnić, że istnieją liczby całkowite dodatnie m, n takie, że $m + n \leq \frac{p+1}{2}$ oraz p jest dzielnikiem $2^n \cdot 3^m - 1$.

5. Dany jest trójkąt ABC . Na boku AB leży taki punkt X , że $2BX = BA + BC$. Niech Y będzie punktem symetrycznym do środka okręgu wpisanego w ABC względem punktu X . Udowodnić, że proste YJ oraz AB są prostopadłe, gdzie J jest środkiem okręgu dopisanego, stycznego do boku AC .

6. Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg o środku w J . Okrąg α jest styczny do boku BC w punkcie K oraz do przedłużeń boków AB, CD . Okrąg β jest styczny do odcinka DA w punkcie L oraz do przedłużeń boków AB, CD . Proste AB, CD tną się w punkcie O . Udowodnić, że jeśli punkty O, K, L są współliniowe, to środek AD , J oraz środek BC są współliniowe.

7. Niech S będzie zbiorem zawierającym $n^2 + 1$ liczb całkowitych dodatnich takim, że wśród dowolnych $n + 1$ liczb istnieją dwie liczby a, b , że $a|b$ lub $b|a$. Pokazać, że istnieją $a_1, \dots, a_{n+1}$ należące do S , że $a_i | a_{i+1}$ dla $1 \leq i \leq n$

8. Niech S będzie zbiorem odcinków na osi rzeczywistej takim, że wśród dowolnych $k + 1$ odcinków istnieją dwa które mają punkt wspólny. Udowodnić, że na osi można wybrać k punktów takich, że dowolny odcinek z S zawiera przynajmniej jeden z wybranych punktów.

9. Danych jest 1001 prostokątów mających wartości długości boków leżące w przedziale $\{1, \dots, 1000\}$. Pokazać, że istnieją trzy prostokąty A, B, C , że A można wsadzić w B i B w C (można obracać i przyjmujemy, że jeśli prostokąt X jest taki sam jak Y to X można wsadzić w Y).

10. Wykazać, że

$$\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = 4^n$$

11. Masarnia ma 77 dni na przygotowanie się do konkursu jedzenia hot-dogów na czas. Wiadomo, że zjada on co najmniej jednego hot-doga dziennie i wiadomo też, że w ciągu całego tego czasu nie zjadł więcej niż 132 hot-dogi. Udowodnić, że istnieje seria dni podczas której zjadł w sumie dokładnie 21 hot-dogów.

12. Wykazać, że dla ustalonych a, b całkowitych dodatnich istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n , takich że

$$n \nmid a^{2^n} + b^{3^n}$$

13. Udowodnić, że istnieje nieskończony ciąg parami względnie pierwszych liczb taki, że żaden wyraz ciągu nie dzieli liczby postaci

$$2^m + 2^n + 1$$

dla m, n naturalnych.

Rozwiązania

Zawody indywidualne

1. Na sferze wybrano takie punkty A, B, C, D, E że odcinki AB i CD przecinają się w punkcie F a punkty C, F, A są równoodległe od E . Udowodnić, że proste BD oraz EF są prostopadłe.

Rozwiązanie:

$ABCD$ z warunków zadania tworzą płaszczyznę. Rzutowujemy na tę płaszczyznę E i ten rzut to E' . Widzimy, że $E'A = E'F = E'C$. Niech $\sphericalangle CAF = y$ oraz $\sphericalangle E'AC = x$. Wtedy $\sphericalangle FE'A = 180 - 2x - 2y$ oraz $\sphericalangle E'CA = x$, więc $\sphericalangle CE'F = 2y$, czyli $\sphericalangle WFD = 90 - y$ gdzie W jest przecięciem BD oraz $E'C$. Ponadto $\sphericalangle DCB = \sphericalangle CAB = y$, więc $E'F$ jest prostopadła do BD . Z tw. o trzech prostych prostopadłych mamy tezę.

2. Pokazać, że każdy unormowany wielomian stopnia n da się zapisać jak średnia arytmetyczna dwóch unormowanych wielomianów stopnia n , które mają n pierwiastków rzeczywistych.

Uwaga: Wielomian nazywamy unormowanym, gdy jego współczynnik przy najwyższej potędze jest równy 1.

Rozwiązanie:

Niech $f(x)$ będzie wielomianem unormowanym stopnia n . Niech $M > 1000 \max_{t=1, \dots, n} |f(t)| + 1000$. Wtedy istnieją takie $a_1, \dots, a_n$ i $b_1, \dots, b_n$ że dla $1 \leq k \leq n$

$$a_k + b_k = 2f(k)$$

$$(-1)^k a_k > M$$

$$(-1)^{k+1} b_k > M$$

Niech g, h będą takimi wielomianami, że $g(k) = a_k$, $h(k) = b_k$. Z interpolacji Lagrange'a wiemy, że takie wielomiany istnieją. Poza tym mamy zadanych n punktów a wielomiany g, h mają mieć stopień n więc możemy sobie wybrać jeszcze jeden punkt. Otóż wybieramy wartości $g(n+1) = a_{n+1}$ tak by g był unormowany, oraz $h(n+1) = b_{n+1}$ tak by $a_{n+1} + b_{n+1} = 2f(n+1)$ Wtedy równość $f(x) = \frac{g(x)+h(x)}{2}$ zachodzi w $n+1$ punktach a wielomiany f, g, h są stopnia n , więc wielomiany $f(x)$ i $\frac{1}{2}(g(x)+h(x))$ są równe. Z porównania współczynników dostajemy, że g też musi być unormowany. Pozostaje udowodnić, że g, h mają n pierwiastków rzeczywistych. Otóż dla $1 \leq k \leq n-1$ liczby a_k, a_{k+1} są różnych znaków więc z własności Darboux na przedziale $(k, k+1)$ wielomian g ma pierwiastek rzeczywisty. Takich przedziałów mamy $n-1$ więc g ma $n-1$

pierwiastków rzeczywistych. Ale wielomian nie może mieć nieparzystej ilości pierwiastków zespolonych (bo jeśli z jest pierwiastkiem to jego sprzężenie też jest pierwiastkiem) więc g ma n pierwiastków rzeczywistych. Analogicznie h , co kończy dowód.

3. Znaleźć wszystkie liczby wymierne x, y , które spełniają równanie

$$x^2 = y^3 + y$$

Rozwiązanie:

Niech $x = \frac{a}{b}$ oraz $y = \frac{c}{d}$, gdzie $NWD(a, b) = NWD(c, d) = 1$. wówczas szukamy rozwiązań równania

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{c^3 + cd^2}{d^3}$$

Zauważmy, że $NWD(a^2, b^2) = NWD(c(c^2 + d^2), d^3) = 1$, więc $a^2 = c(c^2 + d^2)$ oraz $d^3 = b^2$, co prowadzi do tego, że $d = k^2$ oraz $c = l^2$ oraz $c^2 + d^2 = n^2$, czyli $k^4 + l^4 = n^2$. Równanie to jest spełnione w liczbach całkowitych tylko gdy jedna z nich jest 0, co jest dobrze znanym twierdzeniem (równaniem Fermata). Gdy jedna z liczb jest zero, wtedy $x = y = 0$, co jest jedynym rozwiązaniem równania.

4. Niech S będzie podzbiorem zbioru $\{1, 2, \dots, 2^m \cdot n\}$ (dla pewnych liczb całkowitych dodatnich m, n) takim, że liczba elementów S wynosi $(2^m - 1) \cdot n + 1$. Pokazać, że S zawiera $m + 1$ różnych liczb $a_0, a_1, \dots, a_m$ takich, że a_{k-1} jest dzielnikiem a_k dla $k = 1, 2, \dots, m$.

Rozwiązanie:

Tezę możemy przeformułować następująco:

Usuając ze zbioru $n - 1$ liczb, znajdziemy w nim łańcuch spełniający założenia z tezy. Weźmy sobie zbiory:

$$A_{2i+1} = \{2^0(2i+1), 2^1(2i+1), \dots, 2^m(2i+1)\}$$

dla $2i + 1 \leq n$. Dla tak wybranych zbiorów zachodzi:

- (1) Każdy element takiego zbioru dzieli wszystkie większe od niego z tego zbioru
- (2) Zbiory te są parami rozłączne.

Niech $k = 2^a(2b+1)$ będzie liczbą parzystą z przedziału $[1, n]$. Wtedy dorzucmy k do zbioru A_{2b+1} . Widać, że po takiej operacji właściwości (1), (2). Zostaną zachowane. Zauważmy, że żeby w zbiorze S nie było łańcucha podzielności, długości $m+1$ to z każdego z naszych zbiorów musimy wyrzucić tyle elementów

by jego moc była mniejsza od $m+1$ (ze względu na (1)). Przed wyrzuceniem wszystkich liczb w naszych zbiorach jest:

$$\begin{aligned} & (\text{ilosc zbiorow}) * ("Ich podstawowa moc") + (\text{to co dorzucamy}) = \\ & = (\text{ilosc liczb nieparzystych} \leq n) * (m+1) + (\text{ilosc liczb parzystych} \leq n) \\ & = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil (m+1) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \end{aligned}$$

Po wyrzucaniu mamy w sumie $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil m$ liczb czyli wyrzuciliśmy

$$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = n$$

To więcej niż n . Sprzeczność.

5. Niech n będzie ustaloną dodatnią liczbą nieparzystą. Wyznaczyć największą możliwą licznosc zbioru złożonego z liczb całkowitych dodatnich, mniejszych od $3n$, w którym każde dwa różne elementy mają i różnicę, i sumę różną od n .

Rozwiązanie:

Liczba n jest nieparzysta, zatem zbiór wszystkich liczb parzystych, mniejszych od $3n$, ma własność, o którą chodzi. Jest ich $\frac{(3n-1)}{2}$. Wykażemy, że jest to największa możliwa licznosc. Rozbijamy zbiór $S = \{1, \dots, 3n-1\} = A \cup B$ na rozłączne pary:

$$A = \left\{ \{1, n-1\}, \{2, n-2\}, \dots, \left\{ \frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2} \right\}, \{n, 2n\}, \{n+1, 2n+1\}, \right\}$$

$$B = \left\{ \{n + (n-1), 2n + (n-1)\} \right\}$$

Mamy razem $\frac{(3n-1)}{2}$ par liczb. Zbiór o większej liczności musi zawierać jedną z wymienionych par. Ale w każdej parze albo suma, albo różnica elementów jest równa n . Stąd nasza teza.

6. Liczbę całkowitą dodatnią k nazwiemy *liczbą Masarni* jeśli dla pewnego trójkąta prostokątnego ABC o bokach całkowitych zachodzi $k = P_{ABC}$. Udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej $n \geq 12$ pomiędzy n a $2n$ istnieje przynajmniej jedna liczba Masarni.

Uwaga: Poprzez P_F oznaczamy pole figury F .

Rozwiązanie:

Trójkąt o bokach $3k, 4k, 5k$ jest prostokątny, więc każda liczba postaci $6k^2$ jest liczbą masarni. Zauważmy, że

$$6k^2 \leq n < 6(k+1)^2 < 12k^2 \leq 2n$$

Biorąc największe k takie, że $6k^2 \leq n$ dostajemy, że $6(k+1)^2$ spełnia warunki zadania. Jednakże nierówności są prawdziwe dla $k > 3$, więc dla $n \geq 54$. Zauważmy, że pozostałe przypadki są załatwione poprzez 30, 60, które są odpowiednio polami 5, 12, 13 oraz 8, 15, 17.

7. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym. Symetralne boków AB oraz CD przecinają się w punkcie Y . Niech punkt X będzie takim punktem wewnątrz $ABCD$, że $\sphericalangle ADX = \sphericalangle BCX < 90^\circ$ oraz $\sphericalangle DAX = \sphericalangle CBX < 90^\circ$. Udowodnić, że $\sphericalangle AYB = 2 \cdot \sphericalangle ADX$.

Rozwiązanie:

Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym oraz AB będzie nierównoległe do CD . Niech X będzie punktem wewnątrz $ABCD$ takim, że

$$\sphericalangle ADX = \sphericalangle BCX < \pi/2, \quad \sphericalangle DAX = \sphericalangle CBX < \pi/2$$

Niech symetralne AB i CD przecinają się w punkcie Y . Pokazać, że

$$\sphericalangle AYB = 2\sphericalangle ADX$$

Niech M, N będą takimi punktami na symetralnej AB , że trójkąt A, D, X będzie spiralnie podobny do A, M, N . Wtedy z lematu o podobieństwie spiralnym trójkąt A, D, M jest spiralnie podobny do A, X, N skąd dostajemy:

$$\frac{AD}{AX} = \frac{DM}{XN} \quad (1)$$

Trójkąt B, M, N jest odbiciem symetrycznym trójkąta A, M, N . Jest on też spiralnie podobny do trójkąta B, C, X . Analogicznie jak wcześniej dostajemy

$$\frac{BC}{BX} = \frac{CM}{XN} \quad (2)$$

Ale trójkąty A, D, X i B, C, X są podobne czyli z (1) i (2) dostajemy $CM = DM$ czyli punkt Y leży na symetralnej CD czyli $M = Y$. Stąd od razu otrzymujemy tezę.

8. Niech $\mathbb{R}^0$ oznacza zbiór niezerowych liczb rzeczywistych. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R}^0 \rightarrow \mathbb{R}^0$ takie, że dla każdej pary $x, y \in \mathbb{R}^0$ dla której $x^2 + y \neq 0$ zachodzi:

$$f(x^2 + y) = f(x)^2 + \frac{f(xy)}{f(x)}$$

Rozwiązanie:

Niech $P(x, y)$ oznacza podstawienie x, y do wyjściowego równania.

(1) $f(1) = 1$. Dowód:

$$\begin{aligned}
 & \bullet P(1, 1) \implies f(2) = k^2 + 1 \\
 & \bullet P(2, 1) \implies f(5) = f(2)^2 + 1 = k^4 + 2k^2 + 2 \\
 & \bullet P(1, 2) \implies f(3) = k^2 + \frac{f(2)}{k} = k^2 + k + \frac{1}{k} \\
 & \bullet P(1, 3) \implies f(4) = k^2 + \frac{f(3)}{k} = k^2 + k + 1 + \frac{1}{k^2} \\
 & \bullet P(1, 4) \implies f(5) = k^2 + \frac{f(4)}{k} = k^2 + k + 1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^3} \\
 & \implies k^2 + k + 1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^3} = f(5) = k^4 + 2k^2 + 2 \\
 & \iff \frac{k^7 + k^5 - k^4 + k^3 - k^2 - 1}{k^3} = \frac{(k-1)(k^2 - k + 1)(k^2 + k + 1)^2}{k^3} = 0 \\
 & \implies f(1) = k = 1
 \end{aligned}$$

(2) $f(x + n) = f(x) + n \ \forall x \in \mathbb{R}^\times$ and $n \in \mathbb{N}$. Dowód:

- $P(1, x) \implies f(1 + x) = k^2 + \frac{f(x)}{k} = f(x) + 1$.
- teza dzięki indukcji matematycznej i temu, że $f(1) = 1$.

(3) $f(n) = n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Dowód: jest to konsekwencja (2) oraz (1).

(4) $f(n) = n \ \forall n \in \mathbb{Z}^0$. Dowód:

- $f(x + n) = f(x) + n \ \forall n \in \mathbb{N}$
- Podstawiamy za $x = 1 - n$. Wówczas $1 = f(1) = f(1 - n) + n$.
- $f(1 - n) = 1 - n$.

(5) $f(nx) = nf(x) \ \forall x \in \mathbb{R}^0, n \in \mathbb{Q}^0$. Dowód:

- $f(x + n) = f(x) + n \ \forall x \in \mathbb{R}^0, n \in \mathbb{N}$
- zatem $f(x + n^2) = f(x) + n^2 \ \forall x \in \mathbb{R}^0, n^2 \in \mathbb{N}$
- $P(n, x), x \in \mathbb{R}^0, n \in \mathbb{N} \implies f(x + n^2) = f(n)^2 + \frac{f(nx)}{f(n)} = n^2 + \frac{f(nx)}{n}$
- zatem $n^2 + f(x) = n^2 + \frac{f(nx)}{n} \implies nf(x) = f(nx) \ \forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}^0$

(6) $f(x) = -f(-x) \ \forall x \in \mathbb{R}$. Dowód:

- $P(-n, x), n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}^0 \implies f(n^2 + x) = f(-n)^2 + \frac{f(-nx)}{f(-n)} = (-n)^2 + \frac{nf(-x)}{-n}$

- zatem $n^2 + \frac{nf(x)}{n} = f(n^2 + x) = (-n)^2 + \frac{nf(-x)}{-n} \implies -f(x) = f(-x)$

(7) $f(x) = x \ \forall x \in \mathbb{Q}^0$. Dowód:

- $nf(x) = f(nx) \ \forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}^0$
- podstawiamy $x = \frac{1}{n}$. Wówczas $nf\left(\frac{1}{n}\right) = f(1) = 1 \implies f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}$
- Niech $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^0$. Wówczas $f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(p\frac{1}{q}\right) = pf\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{p}{q} \implies f(x) = x \ \forall x \in \mathbb{Q}^*$

(8) $f(x^2) = f(x)^2 \ \forall x \in \mathbb{R}^0$. Dowód:

- $f(x^2 + 1) = f(x)^2 + 1$
- $f(x + 1) = f(x) + 1 \implies f(x^2 + 1) = f(x^2) + 1$
- Zatem $f(x^2) = f(x)^2$, co w konsekwencji daje, że dla $t \geq 0$ mamy $f(t) = f((\sqrt{t})^2) = f(\sqrt{t})^2 \geq 0$

(9) $f(x^3) = f(x)^3 \ \forall x \in \mathbb{R}^0$. Dowód:

- $2f(x)^2 = 2f(x^2) = f(2x^2)$
- $P(x, x^2) \implies f(x^2 + x^2) = f(x)^2 + \frac{f(x^3)}{f(x)} \implies f(x^3) = f(x)^3$
- zatem $2f(x)^2 = f(x^2 + x^2) = f(x)^2 + \frac{f(x^3)}{f(x)} \implies f(x^3) = f(x)^3$

(10) Funkcja f jest monotonicznie rosnąca. Dowód:

- Niech $x^2 > y > 0 \implies x^3 > xy > 0$.
- $P(x^2, -y) \implies f(x^2 - y) = f(x)^2 + \frac{f(-xy)}{f(x)} = f(x)^2 - \frac{f(xy)}{f(x)} > 0$ ponieważ $x^2 - y > 0$
- $\implies f(x^3) = f(x)^3 > f(xy) \implies f(x) > f(y) \ \forall x > y > 0$ ponieważ $f(x) = -f(-x), f(x) < f(y) \ \forall 0 < x < y$.
- zatem $f(x) > f(y) \ \forall x > y \in \mathbb{R}^0$.

(11) Wykażemy ostatecznie, że $f(x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}^0$. Dowód:

- Niech ciągi $a_n, b_n \in \mathbb{Q}^0$ będą takie, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x$, przy czym a_n jest rosnący oraz b_n jest malejący. Oczywiście takie ciągi istnieją.
- Z monotoniczności f wynika, że $a_n = f(a_n) \leq f(x) \leq f(b_n) = b_n$. Z twierdzenia o trzech ciągach dla ciągu stałego $c_n = f(x)$ wynika, że $f(x) = x$.

Mecz Matematyczny

1. Znaleźć wszystkie liczby całkowite a, b, c spełniające

$$3a^4 + 4b^4 = 19c^4$$

Rozwiązanie:

Rozważmy najpierw równanie

$$3x^2 + 4y^2 = 19z^2$$

Dzieląc przez z dostajemy:

$$3\left(\frac{x}{z}\right)^2 + 4\left(\frac{y}{z}\right)^2 = 19$$

$$3x_1^2 + 4y_1^2 = 19 \quad (*)$$

Para $(1, 2)$ jest rozwiązaniem ostatniego równania. Teraz zauważmy, że równanie $(*)$ wyznacza nam pewien zbiór L punktów na płaszczyźnie. Wiemy, że $P = (1, 2) \in L$. Scharakteryzujemy teraz wszystkie punkty L o współrzędnych wymiernych czyli wszystkie wymierne rozwiązania $(*)$. W tym celu rozważmy proste $y = tx + s$ dla t, s wymiernych, przechodzące przez punkt P . Jeśli Q oznaczamy punkt przecięcia tej prostej z L to Q ma współrzędne wymierne i oczywiście należy do L . Z drugiej strony jeśli jakiś punkt R należy do L i ma współrzędne wymierne to równanie prostej PR ma współczynniki wymierne. Czyli wszystkie punkty wymierne L możemy otrzymać przez wszystkie proste PQ . Obliczmy teraz współrzędne punktu Q . Prosta przechodzi przez punkt P więc:

$$2 = t + s \Rightarrow s = -t + 2 \Rightarrow y = tx + (2 - t)$$

Wkładając to do $(*)$ otrzymujemy

$$3x^2 + 4(tx + (2 - t))^2 = 19 \Rightarrow (3 + 4t^2)x^2 + 8t(2 - t)x + (4(2 - t)^2 - 19) = 0$$

Otrzymane równanie to równanie współrzędnej x -owej punktu wspólnego L i naszej prostej. Pamiętajmy, że z definicji jednym z tych punktów wspólnych jest P więc $x = 1$ jest jednym pierwiastkiem tego równania. Drugi pierwiastek wyliczmy z wzorów Vieta.

$$x = \frac{4(2 - t)^2 - 19}{3 + 4t^2} = \frac{4t^2 - 16t - 3}{4t^2 + 3}$$

$$y = tx + (2 - t) = \frac{(4t^3 - 16t^2 - 3t) + (8t^2 + 6 - 4t^3 - 3t)}{4t^2 + 3} =$$

$$= \frac{-8t^2 - 6t + 6}{4t^2 + 3}$$

Podstawiając $t = \frac{m}{n}$ i mnożąc licznik i mianownik przez n^2 dostajemy:

$$x = \frac{4m^2 - 16mn - 3n^2}{4m^2 + 3n^2}$$

$$y = \frac{-8m^2 - 6mn + 6n^2}{4m^2 + 3n^2}$$

Podkładając teraz $x_1 = \frac{x}{z}$, $y_1 = \frac{y}{z}$:

$$x = 4m^2 - 16mn - 3n^2$$

$$y = -8m^2 - 6mn + 6n^2$$

$$z = 4m^2 + 3n^2$$

Uzyskane wzory to pełna charakteryzacja rozwiązań równania (*). Teraz wróćmy do równania $3a^4 + 4b^4 = 19z^4$. Dostajemy:

$$a^2 = 4m^2 - 16mn - 3n^2$$

$$b^2 = -8m^2 - 6mn + 6n^2$$

$$c^2 = 4m^2 + 3n^2$$

Mając te równania możemy wyliczyć za pomocą a, b, c liczby m^2, n^2, mn . Dostajemy:

$$m^2 = \frac{19c^2 - 8b^2 + 3a^2}{8 \cdot 19}$$

$$n^2 = \frac{19c^2 + 8b^2 - 3a^2}{6 \cdot 19}$$

$$mn = \frac{b^2 + 2a^2}{(-2) \cdot 19}$$

Wiemy też, że $(mn)^2 = m^2n^2$. Zapisując tę równość za pomocą a, b, c i upraszczając dostajemy:

$$12(b^2 + 2a^2)^2 = (19c^2 + 8b^2 - 3a^2)(19c^2 - 8b^2 + 3a^2)(**)$$

$$12A^2 = BC$$

Szukamy teraz rozwiązania (**). Znale rozumowanie pozwala nam przyjąć, że a, b, c są parami względnie pierwsze. Widzimy, że lewa strona dzieli się przez 8 czyli $8|BC$. Liczby c i a są względnie pierwsze czyli oba muszą być nieparzyste (żeby $8|BC$). Kwadrat liczby nieparzystej daje resztę 1 modulo 8 więc C daje resztę 2 modulo 8 i B daje resztę 0 modulo 8. Czyli prawa strona dzieli się

przez 16 czyli $2|A \Rightarrow 2|b$. Skoro b jest parzyste i a nieparzyste to 4 nie dzieli A więc lewa strona jest podzielna przez 16 i nie jest podzielna przez 32. Niech p będzie liczbą pierwszą.

$$p|(b^2 + 2a^2) \Rightarrow \left(\frac{-2}{p}\right) = 1 \Rightarrow p \equiv 1, 3 \pmod{8} (***)$$

Zależność (***) spełnia też trójka, która jest dzielnikiem 12 więc wszystkie dzielniki nieparzyste lewej strony spełniają (***) więc tak samo będzie z prawą stroną. Rozważmy, resztę $C/2$ modulo 8. Łatwo sprawdzić, że wszystkie nieparzyste kwadraty dają resztę 1 lub 9 modulo 16, czyli żeby $C/2$ dawało resztę 1 lub 3 modulo 8 to $a^2 \equiv c^2 \pmod{16}$, ale wtedy $16|B$ czyli $32|BC \Rightarrow 32|12A^2$ sprzeczność c.k.d.

2. Dla danej liczby całkowitej dodatniej n , przez $f(n)$ oznaczmy moc największego możliwego zbioru S o tej własności, że sumy $a + b$, gdzie $a \neq b \in S$ dają parami różne reszty przy dzieleniu przez n . Pokazać, że istnieje nieskończenie wiele n takich, że $f(n) > \sqrt{n} - 1$.

Rozwiązanie:

Niech $n = p(p-1)$ gdzie p jest pewną liczbą pierwszą nieparzystą, również niech g będzie generatorem modulo ta liczba pierwsza. Zauważmy, że dla każdego $t \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ istnieje liczba x , dla której spełnione są kongruencje: $x \equiv g^t \pmod{p}$ oraz $x \equiv t \pmod{p-1}$ (jest to konsekwencja chińskiego twierdzenia o resztach). Zatem mamy $p-1$ różnych reszt modulo $p(p-1)$, niech one tworzą nasz zbiór S . Pokażemy że taki zbiór S spełnia warunek o różnowartościowości różnych sum. Powiedzmy, że mamy $x, y, z, t \in S$, dla których $x + y \equiv z + t \pmod{p(p-1)}$. Jasne jest, że $x + y \equiv z + t \pmod{p-1}$ w takim razie. Jeżeli $x \equiv g^a \pmod{p}, y \equiv g^b \pmod{p}, z \equiv g^c \pmod{p}$ i $t \equiv g^d \pmod{p}$, to wtedy z definicji elementów x, y, z i t $g^{a+b} \equiv g^{c+d} \pmod{p}$, więc też $xy \equiv zt \pmod{p}$. Ponieważ zachodzi też $x + y \equiv z + t \pmod{p}$, to wielomian $P(k) = k^2 - (x+y)k + xy$ może mieć za pierwiastki zarówno x i y jak i z i t . Ponieważ ten wielomian ma co najwyżej dwa pierwiastki modulo p , to stąd dostajemy, że liczby x i y dają takie same reszty przy dzieleniu przez p co liczby z i t . Powiedzmy bez straty ogólności, że $x \equiv z \pmod{p}$ oraz $y \equiv t \pmod{p}$. Ponieważ wszystkie liczby w S dają różne reszty przy dzieleniu przez p , to wnioskujemy, że $x = z$ oraz $y = t$. W związku z tym $f(p(p-1)) \geq p-1 > \sqrt{p(p-1)} - 1$, ponieważ liczb pierwszych jest nieskończenie wiele, to dostajemy tezę zadania.

3. Niech G będzie grafem i $f(G)$ jego liczbą chromatyczną (czyli najmniejszą liczbą kolorów potrzebnych, żeby można było pomalować wierzchołki grafu tak, że żadna krawędź nie łączy dwóch wierzchołków tego samego koloru). Załóżmy,

że G został pomalowany na $f(G)$ kolorów. Pokazać, że w G istnieje ścieżka długości $f(G)$ taka, że wszystkie jej wierzchołki są różnego koloru.

Rozwiązanie:

Ponumerujemy kolory liczbami od 1 do $f(G)$. Wtedy jeśli v, w to wierzchołki to $v \leq w$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje ścieżka $v_1 = v, v_2, \dots, v_k = w$ z v do w taka, że wartość koloru v_{i+1} jest większa lub równa wartości koloru v_i dla $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Sprawdzamy, że tak wprowadzona relacja na grafie, jest częściowym porządkiem. Załóżmy nie wprost, że nie istnieje ścieżka z tezy zadania, o długości $f(G)$. Oznacza to, że w szczególności nie istnieje łańcuch długości $f(G)$ więc z twierdzenia Dilworth'e'a możemy sobie podzielić graf na $f(G) - 1$ antyłańcuchów. Zauważmy, że jeśli dwa dowolne wierzchołki v, w w antyłańcuchu są połączone krawędzią to musi zachodzić jedna z relacji $v \leq w$; $w \leq v$. Teraz jeśli wszystkie wierzchołki w jednym antyłańcuchu pokolorujemy na jakiś kolor, przy czym użyjemy różnych kolorów dla różnych łańcuchów, to otrzymamy graf pokolorowany na $f(G) - 1$ kolorów, taki że żadna krawędź nie łączy punktów o tym samym kolorze. Otrzymujemy sprzeczność z minimalnością liczby $f(G)$.

4. Danych jest 10^{2019} planet w międzygalaktycznym imperium. Każde dwie planety są połączone dwukierunkową drogą zbudowaną przez jedną z 2019 firm. Władca imperium chce zamknąć k firm, tak by wciąż z każdej planety można było dotrzeć do każdej innej. Znaleźć największe k , dla którego to jest zawsze możliwe.

Rozwiązanie:

$k = 1009$. Umieścićmy m zamiast 2019. Udowodnimy, że maksymalna wartość k wynosi $\lfloor m/2 \rfloor$. Zatem mamy graf pełny z $n = 10^m$ wierzchołkami; jego krawędzie są pokolorowane na m kolorów, i chcemy znaleźć maksymalną wartość k , taką że zawsze możemy usunąć pewne k kolorów, tak by graf pozostał spójny.

Wybermy dowolne k kolorów. Niech G_1 będzie grafem składającym się z krawędzi pokolorowanych na jeden z tych k kolorów oraz G_2 będzie grafem składającym się z krawędzi pokolorowanych na pozostałe $m - k$ kolorów. Zatem G_2 jest dopełnieniem G_1 . Łatwo sprawdzić, że jeśli jeden z G_1, G_2 nie jest spójny, to drugi musi być. Przypuśćmy bez straty ogólności, że G_1 jest niespójny oraz niech $C_1, C_2, \dots, C_r$, $r > 1$ będą spójnymi składowymi G_1 . Wtedy dowolna krawędź uv gdzie $u \in C_i$, $v \in C_j$, $i \neq j$ musi należeć do G_2 gdyż G_2 jest spójny. Z tego wynika, że zawsze można usunąć przynajmniej $\lfloor m/2 \rfloor$ kolorów i wciąż uzyskać graf spójny.

Wystarczy wykazać, że to maksymalna liczba jaką można uzyskać. Skonstruujemy więc kolorowanie na m kolorów grafu kompletnego, takiego że usunięcie dowolnych $\lfloor m/2 \rfloor + 1$ kolorów rozspójni nasz graf.

Niech V_1 będzie zbiorem $k := \lfloor m/2 \rfloor + 1$ wierzchołków i V_2 zbiorem $\binom{m}{k}$ wierzchołków. Rozpatrzmy graf pełny G na zbiorze $V := V_1 \cup V_2$.

Sparujemy każdy zbiór S , który zawiera k różnych kolorów, spośród danych m , z wierzchołkiem $v \in V_2$ i pokolorujemy krawędzie pomiędzy v i wierzchołkami z V_1 używając każdego koloru w S dokładnie raz. Krawędzie między wierzchołkami w V_1 kolorujemy dowolnie. Pozostaje pokolorować krawędzie w V_2 . Wybierzmy $u, v \in V_2$ i niech $C(u)$ oraz $C(v)$ będą zbiorami kolorów krawędzi, które łączą u z V_1 , oraz v z V_1 . Skoro $|C(u)| + |C(v)| = k + k > m$ to $C(u) \cap C(v) \neq \emptyset$. Pokolorujemy uv na kolor, który jest obecny w obu $C(u)$ i $C(v)$. Postępując w ten sposób otrzymamy pożądaną graf. atwo zauważyć, że jeśli usuniemy dowolne k kolorów, będzie istniał wierzchołek odizolowany. Liczba wierzchołków G to $k + \binom{m}{k} < \lfloor m/2 \rfloor + 1 + 2^m < 10^m$.

Uwaga: Konstruowany graf G ma mniej niż 10^m wierzchołków, ale oczywiście możemy dodać wierzchołki "które nic nie wnoszą" i pokolorować dodatkowe krawędzie tak, by zachować wszystkie potrzebne własności.

5. Niech S_0 będzie skończonym zbiorem liczb całkowitych dodatnich. Definiujemy zbiory $S_1, S_2, \dots$ liczb całkowitych dodatnich, takie że: a należy do S_{n+1} wtedy i tylko wtedy gdy dokładnie jedna z liczb $a - 1, a$ należy do S_n . Pokazać, że istnieje nieskończenie wiele N takich, że $S_N = S_0 \cup \{N + a : a \in S_0\}$

Rozwiązanie:

Będziemy działać w ciele F_2 czyli wszystko będzie modulo 2 (np. $x + x = 2x = 0$). Zdefiniujemy ciąg szeregów $(C_k(x))_{k \geq 1}$ taki, że:

$$C_j = \sum_{a \in S_j} x^a$$

Zauważmy, że warunek z tezy zadania jest równoważny:

$$S_{n+1}(x) = (1 + x)S_n(x)$$

czyli

$$S_n(x) = (1 + x)^n S_0(x)$$

My chcemy mieć

$$S_N = S_0 \cup \{N + S_0\}$$

co jest równoważne

$$S_N(x) = (1 + x^N)S_0(x) \Rightarrow (1 + x)^N = (1 + x^N)$$

a to zachodzi dla $N = 2^k > \max(S_0)$

Jako że nasze szeregi mają współczynniki zero lub jeden (jesteśmy w ciele F_2) to całe to rozumowanie jest odwracalne.

6. Dany jest czworoscian $PABC$. Niech PH będzie jego wysokością. Niech proste HA' , HB' , HC' będą prostymi prostopadłymi odpowiednio do prostych PA , PB , PC . Niech płaszczyzny ABC oraz $A'B'C'$ przecinają się w prostej l . Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na ABC . Udowodnić, że l jest prostopadła do OH .

Rozwiązanie:

Dla sfery Ω i punktu P , zdefiniujmy potęgę P względem Ω by $\mathcal{P}(P, \Omega) = PO^2 - R^2$, gdzie O jest środkiem Ω i R jest promieniem.

Niech Ω_1, Ω_2 będą sferami. Niech $f(X) = \mathcal{P}(X, \Omega_1) - \mathcal{P}(X, \Omega_2)$. Wówczas f jest liniowa. Zatem: jeśli P, Q, R są niewspółliniowymi punktami, takimi że $f(P) = f(Q) = f(R) = C$, to dla wszystkich punktów X na płaszczyźnie PQR , $f(X) = C$.

Niech $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ nędą następującymi sferami: Λ_1 o środku w O i o promieniu $AO = BO = CO$. Λ_2 jest sferą opisaną na $PABC$. Λ_3 o środku w P o promieniu równym PH .

Wtedy, skoro A, B, C mają równe potęgi względem Λ_1, Λ_2 , to wszystkie punkty na ℓ mają równe potęgi względem tych dwóch sfer. Zauważmy, że

$$\mathcal{P}(A', \Lambda_2) = -A'A \cdot A'P = -A'H^2 = PA'^2 - PH^2 = \mathcal{P}(A', \Lambda_3).$$

Skoro analogiczne równości zachodzą dla B', C' , to A', B', C' mają równą potęgę w zględem Λ_2, Λ_3 . Zatem wszystkie punkty na ℓ mają równą potęgę w stosunku do $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$. Weźmy X leżącego na ℓ . Skoro $\mathcal{P}(X, \Lambda_1) - \mathcal{P}(X, \Lambda_3)$ jest stały, to $XO^2 - XP^2$ jest stały. Więc,

$$XO^2 - XP^2 = XO^2 - (XP^2 - PH^2) = XO^2 - XP^2 + PH^2$$

jest stały, więc $\ell \perp OH$

7. Okręgi ω_1 i ω_2 o środkach w punktach O_1, O_2 są stycznie zewnętrznie w punkcie D i stycznie wewnętrznie do okręgu ω w punktach odpowiednio E, F . Niech l będzie wspólną styczną ω_1 i ω_2 przechodzącą przez D , a AB będzie średnicą ω prostopadłą do l taką, że A, E, O_1 są po tej samej stronie l . Pokazać, że proste AO_1, BO_2, EF, l przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie:

Niech O to środek okręgu ω . Zauważmy, że E to środek jednokładności J przerzucający O_1 na ω . $O_1D \perp l$ więc $OJ(D) \perp l$ no i oczywiście $J(D) \in \omega$. Czyli $J(D) = B$. Skoro $J(D) = B$ to E, D, B są współliniowe. Analogicznie współliniowe są F, D, A . Niech prosta EF przecina prostą l i prostą AB w punktach odpowiednio P, Q . Wtedy ze znanego lematu P leży na biegunowej punktu Q . Poza tym l przechodzi przez Q i jest prostopadła do OP więc l jest biegunową punktu Q . W takim razie $(P, Q; E, F) = 1$. Niech $G = J^{-1}(E)$. Wtedy GD jest średnicą, więc O_1 to środek GD . Prosta O_1, O_2 jest równoległa do AB

więc AG, AO_1, AD, AB to pęk harmoniczny. Przecinając ten pęk z prostą EF dostajemy punkty E, Q', F, P które tworzą czwórkę harmoniczną więc $Q' = Q$. Analogicznie dla drugiej prostej. Pokazać, że proste AO_1, BO_2, EF, l przecinają się w jednym punkcie.

8. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , gdzie I_A to środek okręgu dopisanego do boku BC w trójkącie ABC . Przez ω oznaczmy okrąg styczny wewnętrznie do okręgu opisanego na trójkącie ABC i styczny do boków AB i AC . Punkt H to rzut punktu A na BC , natomiast E to środek dłuższego łuku BC okręgu opisanego na ABC . Punkty M i N to środki boków AH i BC . Przecięcie MN i AE oznaczmy przez P . Prosta I_AP tnie okrąg ω w dwóch punktach S i T . Pokazać, że któryś z okręgów BSC lub BTC jest styczny do ω

Rozwiązanie:

Przedefiniujmy punkt S : niech on będzie taki, że okrąg opisany na BSC będzie styczny do ω , ponadto S będzie znajdował się po tej samej stronie prostej BC co punkt A . Wykażemy, że punkty P, S i I_A leżą na jednej prostej. Niech V będzie punktem styczności okręgu ω z okręgiem opisanym na trójkącie ABC , J oznaczmy jako punkt styczności okręgu dopisanego z bokiem BC . Oznaczmy również jako D punkt przecięcia prostej EI z bokiem BC . Wykażemy najpierw kilka lematów:

Lemat 1: Punkty E, I i V leżą na jednej prostej.

Dowód: Bierzymy następujące przekształcenie: złożenie inwersji o środku w punkcie A i promieniu $\sqrt{AB \cdot AC}$ z odbiciem względem dwusiecznej kąta BAC . Wówczas okrąg ω przejdzie na okrąg dopisany do boku BC w trójkącie ABC , czyli też V przejdzie na J . Zauważmy, że trójkąty ABI i AJC są podobne, więc też $AB \cdot AC = AI \cdot AJ$, w związku z tym I przejdzie na I_A . Z kolei obraz punktu E będzie leżał na dwusiecznej kąta zewnętrznego BAC oraz na prostej BC (przecięcie tych prostych oznaczmy przez F). Naszym celem jest teraz wykazanie, że A, F, J, I_A leżą na jednej prostej (trzy punkty będą współliniowe, jeśli ich obrazy po inwersji będą leżały na jednym okręgu wraz ze środkiem inwersyjnym). Tymczasem $\sphericalangle FAI_A = 90^\circ = \sphericalangle FJI_A$, czyli cykliczność tych czterech punktów jest oczywista.

Lemat 2: Punkty N, I i J leżą na jednej prostej.

Dowód: Oznaczmy przez I' punkt leżący na okręgu wpisanym w trójkąt ABC , który jest antypodyczny do punktu styczności okręgu wpisanego z bokiem BC . Biorąc jednokładność w środku w punkcie A , która przekształca okrąg wpisany na dopisany, widzimy, że punkt I' przechodzi na punkt J , zatem A, I' i J leżą na jednej prostej. Teraz rozpatrzmy powinowactwo osiowe względem prostej BC i skali $\frac{1}{2}$. Wówczas punkty A i I' przejdą na odpowiednio N i I , czyli prosta $AI'J$ przejdzie na NIJ .

Lemat 3: Punkt I_A leży na dwusiecznej kąta BSC .

Dowód: Niech G i H będą punktami styczności okręgu ω z prostymi AB i AC . Będziemy chcieli pokazać, że punkty B, G, S i I_A leżą na jednym okręgu, podobnie z punktami C, H, S i I_A . Wówczas $\sphericalangle BSI_A = \sphericalangle BGI_A = \sphericalangle CHI_A = \sphericalangle CSI_A$, przy czym druga równość wynika z symetrii. Aby wykazać, że punkty B, G, S, I_A leżą na jednym okręgu, rozpatrzmy inwersję o środku w punkcie A i promieniu $\sqrt{AB \cdot AC}$ złożoną z symetrią względem dwusiecznej BAC . Zauważmy, że punkt I_A przechodzi na punkt I (o czym wspomnieliśmy już wcześniej). Okrąg ω przechodzi na okrąg dopisany do boku BC , także G przejdzie na punkt styczności tego okręgu z AC (niech to będzie punkt T). Również B przechodzi na punkt C , ponadto okrąg opisany na trójkącie BSC przejdzie na okrąg styczny do okręgu dopisanego w punkcie S' , oraz S przejdzie na S' . Będziemy chcieli pokazać, że I, C, T i S' leżą na jednym okręgu. Weźmy styczną w S' i przetnijmy ją z prostą BC w punkcie Y . Z kolei przecięcie JS' z I_AY oznaczmy jako W . Zauważmy, że $YB \cdot YC = (YS')^2 = YI_A \cdot YW$, zatem B, C, W i I_A leżą na jednym okręgu. Oczywiście punkty B, C, I i I_A też leżą na okręgu o średnicy II_A , skąd dostajemy, że $\sphericalangle IWI_A = 90^\circ$. W związku z tym punkty I, J, W oraz S' leżą na jednej prostej. Teraz widzimy, że $\sphericalangle IS'T = \sphericalangle JS'T = \sphericalangle JTC = \sphericalangle ICA$, co chcieliśmy pokazać.

Zauważmy, że zachodzą następujące równości:

$$\frac{I_AA}{I_AI} = \frac{JN}{JI} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{dist}(A, BC)}{\text{dist}(E, BC)} \cdot \frac{\text{dist}(E, BC)}{\text{dist}(I, BC)} = \frac{PA}{PE} \cdot \frac{DE}{DI},$$

zatem korzystając z twierdzenia Menelaosa dla trójkąta AIE oraz punktów D, P i I_A , dostajemy, że punkty D, P, I_A są współliniowe. Poprowadźmy styczne z punktów S i V do okręgu ω . Widzimy, że z twierdzenia o trzech osiach potęgowych te styczne przecinają się na prostej BC (bierzemy okręgi opisane na BSC, BAC i okrąg ω). Oznaczmy przecięcie tych prostych jako X . Zauważmy, że V jest spodkiem dwusiecznej poprowadzonej z V w trójkącie BVC , zatem $XD = XV$. Zatem okrąg opisany na SDV ma środek w punkcie X . Zauważmy, że z twierdzenia o dwusiecznej $\frac{BV}{VC} = \frac{BD}{DC}$, a ponieważ środek okręgu opisanego na SDV leży na prostej BC , to ten okrąg jest okręgiem Apoloniusza dla punktów B i C . W związku z tym $\frac{BS}{SC} = \frac{BD}{DC}$, czyli SD jest dwusieczną kąta BSC . Korzystając z lematu trzeciego dostajemy tezę zadania.

9. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ takie, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}^+$ zachodzi

$$f\left(\frac{y}{f(x+1)}\right) + f\left(\frac{x+1}{xf(y)}\right) = f(y)$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że $f(x) = \frac{1}{x}$ dla każdego $x > 0$ spełnia warunki zadania. Wystarczy więc wykazać, że to jedyna taka funkcja. Niech $P(x, y)$ oznacza podstawienie do wyjściowego równania.

(1) $\forall x > 0$ zachodzi nierówność $xf(x) \leq 1$. Dowód:

- Niech $y > 0$ będzie takie, że $yf(y) > 1$.
- $P\left(\frac{1}{yf(y)-1}, y\right) \implies f\left(\frac{y}{f(1+\frac{1}{yf(y)-1})}\right) = 0$
- jest to sprzeczne z założeniem, że $f(x) > 0$ dla każdego x .

(2) Jeśli $a > 1$, to $f(a) = \frac{1}{a}$. Dowód:

- Niech $x, z > 0$ oraz $y = 1 + z > 1$.
- Korzystając z (2) oraz podstawienia $P(x, y)$ dostajemy nierówność $\frac{f(x+1)}{y} + \frac{xf(y)}{x+1} \geq f\left(\frac{y}{f(x+1)}\right) + f\left(\frac{x+1}{xf(y)}\right) = f(y)$
- zatem $(x+1)f(x+1) \geq (1+z)f(1+z)$
- analogicznie postępujemy dla podstawienia $P(y, x)$. Otrzymamy wtedy $(1+z)f(1+z) \geq (1+x)f(1+x)$
- Zatem jeśli $a > 1$, to $af(a) = c \geq 1$ dla pewnej stałej c .
- Zatem $f\left(\frac{y}{f(x+1)}\right) = \frac{f(x+1)}{y} \implies \frac{c^2}{y(1+x)} = \frac{c}{(1+x)y} \implies c = 1$

(3) f jest ściśle malejąca. Dowód:

- Skorzystajmy z (2). Wówczas $P(x, y) \implies f(y(1+x)) + f\left(\frac{x+1}{xf(y)}\right) = f(y)$
- Dla dowolnego $z > y$ niech $x = \frac{z-y}{y} > 0$
- To prowadzi do nierówności $f(z) < f(y)$

(4) $f(a) = \frac{1}{a}$ dla każdego $a \geq \frac{1}{2}$. Dowód:

- Dla dowolnego $\epsilon > 0$ mamy $\frac{1}{1+\epsilon} = f(1+\epsilon) < f(1) \leq 1$, więc z twierdzenia o trzech ciągach $f(1) = 1$.
- Niech $\frac{1}{2} < y < 1$, zatem $f(y) > f(1) = 1$
- $y > 1 - y \implies f(y) \leq \frac{1}{y} < \frac{1}{1-y} \implies \left(1 - \frac{1}{y}\right) < \frac{1}{f(y)-1}$
- istnieje zatem dodatnia liczba rzeczywista x , taka że $\left(1 - \frac{1}{y}\right) < x < \frac{1}{f(y)-1} \implies \frac{x+1}{xf(y)} > 1$ oraz $y(1+x) > 1 \implies f(y) = \frac{1}{y}$ dla każdego $y > \frac{1}{2}$, co wynika z (2).

- $\frac{2}{1+2\epsilon} = f\left(\frac{1}{2} + \epsilon\right) < f\left(\frac{1}{2}\right) \leq 2$
- Z twierdzenia o trzech ciągach $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$.

(5) Ostateczny argument: Na mocy indukcji matematycznej, iterując rozumowanie zastosowane w (4) wywnioskować, że dla każdego $y \in \left[\frac{1}{2^n}, \infty\right)$, $f(y) = \frac{1}{y}$. To prowadzi do konkluzji, że $f(x) = \frac{1}{x}$ dla każdego $x > 0$.

10. Paweł Masarnia zepsuł kalkulator, w taki sposób, że jedyne przyciski, które działają to: $\sin$, $\cos$, $\tan$, $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ oraz $\tan^{-1}$. Początkowo kalkulator wyświetla 0. Udowodnij, że dla dowolnej wymiernej dodatniej liczby q wciskając pewien skończony ciąg przycisków działających kalkulator zwróci q .

Rozwiązanie:

Udowodnimy silniejsze twierdzenie: Jeśli m oraz n są względnie pierwszymi nieujemnymi liczbami całkowitymi oraz $n > 0$, wtedy wciskając pewien skończony ciąg przycisków kalkulator wypisze $\sqrt{m/n}$.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na $m + n$. Dla bazy indukcyjnej mamy: $m + n = 1$, więc $n = 1$ i $m = 0$ oraz $\sqrt{m/n} = 0$, co jest początkowo wyświetlane na kalkulatorze. Dla kroku indukcyjnego rozpatrzmy odpowiednio przypadki $m = 0$, $0 < m \leq n$, and $n < m$.

Jeśli $m = 0$, wtedy $n = 1$ i teza jest oczywista.

Jeśli $0 < m \leq n$, to na mocy założenia indukcyjnego, $\sqrt{(n-m)/m}$ może być otrzymane za pomocą skończenia wielu przycisków; więc także

$$\cos \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{(n-m)/m} = \sqrt{m/n}.$$

Jeśli $n < m$, wtedy dzięki poprzedniemu przypadkowi, $\sqrt{n/m}$ może być otrzymana w skończenie wielu krokach. Skoro $\cos \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{n/m} = \sin \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{m/n}$, to

$$\operatorname{tg} \sin^{-1} \cos \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{n/m} = \sqrt{m/n}$$

może być otrzymana w skończenie wielu krokach, co kończy dowód indukcyjny.

11. Dla danej liczby rzeczywistej nieujemnej a zdefiniujemy ciąg (a_n) następująco: $a_1 = \sqrt{a}$ oraz $a_{n+1} = \sqrt{a + a_n}$. Wyznaczyć wszystkie a o tej własności, że ciąg (a_n) ma nieskończenie wiele elementów będących liczbami wymiernymi.

Rozwiązanie:

Rozpatrzmy takie a dodatnie dla którego spełnione są warunki zadania. Udowodnimy najpierw, że ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ściśle rosnący. Udowodnimy indukcyjnie, że $a_{n+1} > a_n$ dla każdego n . Jeśli $n = 1$, to $a_2 = \sqrt{a + a_1} > \sqrt{a} = a_1$. Jeśli mamy $a_{n+1} > a_n$ to zachodzi również $a + a_{n+1} > a + a_n$, czyli dalej $a_{n+2} = \sqrt{a + a_{n+1}} > \sqrt{a + a_n} = a_{n+1}$. Dowód indukcyjny został zakończony. Zauważmy jeszcze, że ten ciąg jest ograniczony. Gdyby $a_n = M$ dla

ogromnego M to wtedy $a_{n+1} = \sqrt{M+a} > M$. Widzimy, że ta nierówność nie zachodzi dla dużych M , w związku z tym ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony. Niech $a_k, a_l \in \mathbb{Q}$ dla pewnych $k > l$. Wiemy, że takie indeksy istnieją, gdyż wymiernych wyrazów tego ciągu istnieje nieskończenie wiele. Zauważmy, że $a_k^2 - a = a_{k-1}$, czyli dalej $(\cdots(((a_k^2 - a)^2 - a)^2 - a)^2 \cdots - a) = a_l$ gdzie w sumie mamy $k - l$ par nawiasów w wyrażeniu. Wielomian $P(x) = (\cdots(((a_k^2 - x)^2 - x)^2 - x)^2 \cdots - x) - a_l$ ma wymierne współczynniki, ponadto a jest jego pierwiastkiem, stąd możemy powiedzieć, że a jest liczbą algebraiczną. Jeżeli M jest iloczynem mianowników wszystkich współczynników $P(x)$, to $MP(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Niech $Q(x) = MP(x) = p_s x^s + p_{s-1} x^{s-1} + \cdots + p_0$. Wtedy wielomian $p_s^{s-1} Q(\frac{x}{p_s}) = x^s + p_{s-1} x^{s-1} + p_{s-2} p_s x^{s-2} + \cdots + p_0 p_s^{s-1}$ jest wielomianem o współczynnikach całkowitych, również liczba $b = ap_s$ jest jego pierwiastkiem, zatem $b = ap_s$ jest liczbą algebraiczną całkowitą. Niech $p_s = K$, wykażemy, że wszystkie elementy ciągu $Ka_1, Ka_2, \dots$ są liczbami całkowitymi algebraicznymi. Najpierw zauważmy, że $Ka_1 = K\sqrt{a} = \sqrt{K} \cdot \sqrt{Ka_1}$. Ponieważ oba czynniki są liczbami algebraicznymi całkowitymi, to ich iloczyn również posiada tę własność. Z równości $a_{n+1} = \sqrt{a + a_n}$ mamy, że $Ka_{n+1} = \sqrt{Ka + Ka_n} \cdot \sqrt{K}$. Jeśli Ka_n jest liczbą algebraiczną całkowitą, to i Ka_{n+1} jest liczbą całkowitą algebraiczną. Weźmy teraz taki nieskończony zbiór indeksów $i_1 < i_2 < \cdots$, że dla każdego k naturalnego mamy $a_{i_k} \in \mathbb{Q}$. Zauważmy, że Ka_{i_k} jest liczbą algebraiczną całkowitą, ponadto jest to liczba wymierna, zatem $Ka_{i_k} \in \mathbb{Z}$. Ciąg liczb $Ka_{i_1}, Ka_{i_2}, \dots$ jest ściśle rosnący i ma nieskończenie wiele wyrazów. Zatem dla każdego k mamy $Ka_{i_k} \geq k$. Zatem $\{Ka_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$ jest ciągiem nieograniczonym, podobnie jak $\{a_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$, co daje sprzeczność, gdyż jak powiedzieliśmy wcześniej ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony.

12. Niech a_n będzie takim ciągiem, że $a_0 = 6$ oraz

$$a_n = a_{n-1} + NWD(n, a_{n-1})$$

Udowodnić, że $NWD(n, a_{n-1})$ jest liczbą pierwszą lub jest równe 1.

Rozwiązanie:

Niech

$$A = \{n \in \mathbb{N} : NWD(n, a_{n-1}) > 1\}$$

Łatwo zauważyć, że $5 \in A$. Wykażemy następujący lemat, z którego wynika teza.

Lemat: Jeśli $n \in A$, to $a_n = 3n$ oraz $NWD(a_{n-1}, n)$ jest liczbą pierwszą.

Dowód: Zauważmy najpierw, że $a_1 = 7, a_2 = 8, a_3 = 9, a_4 = 10, a_5 = 15$. Załóżmy dla dowodu niewprost przeciwieństwo tezy. Niech $n \in A$ będzie najmniejszą liczbą $n > 5$ taką, że $a_n \neq 3n$ lub $NWD(n, a_{n-1})$ nie jest pierwsze. Niech $k \in A$ będzie największą liczbą całkowitą taką, że $k < A$. Mamy

$$a_{n-1} = a_k + n - k - 1 = 2k + n - 1$$

Zatem $NWD(a_{n-1}, n) = NWD(2n - 2k + 1, 2k - 1)$. Niech p będzie liczbą pierwszą taką, że $p|2n - 2k + 1$ oraz $p|2k - 1$. Przypuśćmy, że $2n - 2k + 1$ nie jest pierwsze. Wtedy $2n - 2k + 1 = pd$ oraz $d > 1$. Możemy zatem wziąć m całkowite dodatnie takie, że $2m - 2k + 1 = p$. Wtedy $p = NWD(2m - 2k + 1, 2k - 1)$ oraz $a_n = a_{n-1} + p = 3n$. Zatem sprzeczność z minimalnością n . Więc $2n - 2k + 1$ jest pierwsza. Ponadto $a_n = a_{n-1} + 2n - 2k + 1 = 3n$, co jest sprzeczne z założeniami.

Zadania dodatkowe

1. Niech $p > 5$ będzie liczbą pierwszą oraz $A = \{b_1, b_2, \dots, b_{\frac{p-1}{2}}\}$ będzie zbiorem reszt kwadratowych modulo p . Udowodnić, że nie istnieją liczby całkowite dodatnie a, c niepodzielne przez p , takie że zbiór $B = \{ab_1 + c, ab_2 + c, \dots, ab_{\frac{p-1}{2}} + c\}$ oraz zbiór A są rozłączne modulo p .

Rozwiązanie:

Przypuśćmy, że takie liczby istnieją. Rozpatrzmy dwa przypadki. Przypuśćmy, że a jest resztą kwadratową modulo p . To znaczy, że $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$, więc dla każdego i zachodzi

$$\left(\frac{ab_i}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \cdot \left(\frac{b_i}{p}\right) = 1$$

Zatem zbiór $S = \{ab_1, ab_2, \dots, ab_{\frac{p-1}{2}}\}$ jest zbiorem wszystkich reszt kwadratowych modulo p . Więc $S = A$. Zauważmy, że równanie $x^2 = c$ oraz $x^2 = -c$ mają maksymalnie po dwa rozwiązania modulo p . Wynika z tego, że skoro $p > 5$, to istnieje r takie, że r^2 jest różne od c oraz $-c$ modulo p . Niech $s = \frac{c}{r}$. Zatem liczba $\left(\frac{r+s}{2}\right)^2 - \left(\frac{r-s}{2}\right)^2 = c$. Wynika z tego, że oba ułamki są resztami kwadratowymi, a więc i elementem zbioru S . Zatem istnieją takie i, j , że $\left(\frac{r+s}{2}\right)^2 = ab_i$ oraz $\left(\frac{r-s}{2}\right)^2 = ab_j$, więc $ab_i = ab_j + c = x$, więc $x \in A$ oraz $x \in B$, zatem sprzeczność.

Przypuśćmy więc, że $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$. Wówczas $S = B$ jest zbiorem wszystkich niereszt kwadratowych. Zauważmy, że reszty $1, 2, \dots, p-1$ są parami różne modulo p . Zatem reszty $c, 2c, \dots, (p-1)c$ również. Jeśli dla pewnego k zachodzi

$$\left(\frac{kc}{p}\right) = -1$$

to musi także zachodzić

$$\left(\frac{(k+1)c}{p}\right) = -1$$

W przeciwnym wypadku bowiem istniałyby następujące i , że $ab_i = kc$ więc $ab_i + c - (k+1)c \in A$, czyli sprzeczność. Zatem jeśli dla pewnego k liczba kc jest nieresztą kwadratową modulo p , to dla każdego n większego od k liczba nc to niereszta kwadratowa. Jednakże reszty $c, 2c, \dots, (p-1)c$ to wszystkie reszty kwadratowe modulo p , więc dokładnie połowa z nich jest nieresztami, więc muszą to być $\frac{p+1}{2} \cdot c, \dots, (p-1)c$. Zatem wszystkie liczby $c, 2c, \dots, \frac{p-1}{2}c$ są resztami kwadratowymi modulo p . Zatem wszystkie liczby $1, 2, \dots, \frac{(p-1)}{2}$ są resztami kwadratowymi modulo p . Jednakże jeśli $\frac{p-1}{2}$ jest resztą kwadratową modulo p

oraz 2 jest nią także, to musi być resztą kwadratową także ich iloczyn, czyli $p-1$, a to prowadzi do sprzeczności. Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

2. Niech F będzie rodziną podzbiorów zbioru $\{1, \dots, n\}$ taką, że żaden zbiór z F nie zawiera się w innym zbiorze z F . Pokazać, że:

$$\sum_{A \in F} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \leq 1$$

gdzie $|A|$ to moc zbioru A (liczba jego elementów).

Rozwiązanie:

Niech S będzie taką rodziną podzbiorów $\{1, 2, \dots, n\}$, że nie istnieją dwa zbiory z S , że jeden z nich zawiera się w drugim. Wybierzmy jakiś zbiór A z rodziny S . Niech moc A wynosi k . Wtedy wszystkich permutacji ciągu $(1, \dots, n)$ takich, że pierwsze k elementów to elementy zbioru A jest dokładnie $k!(n-k)!$. W ten sposób zbiór z rodziny S generuje pewne permutacje. Teraz, jeśli jakaś permutacja jest generowana przez dwa zbiory A, B to jeden z nich musiałby zawierać się w drugim. Czyli żadne dwa zbiory z rodziny S nie generują tej samej permutacji. Cała rodzina S łącznie generuje:

$$\sum_{A \in S} |A|!(n-|A|)!$$

Z drugiej strony wszystkich permutacji jest dokładnie $n!$ więc

$$\sum_{A \in S} |A|!(n-|A|)! \leq n!$$

co po podzieleniu przez prawą stronę i zwinięciu w symbol Newtona daje tezę.

3. Dany jest graf, którego wierzchołkami są liczby całkowite dodatnie, w którym wierzchołki a oraz b są połączone wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a + b + 1 | a^2 + b^2 + 1$$

Rozstrzygnąć, czy dany graf jest spójny

Rozwiązanie:

Dany graf jest spójny. Zauważmy, że dla dowolnej liczby n mamy: n jest połączone z n^2 oraz n^2 jest połączone z $(n+1)^2$. Ponadto $(n+1)^2$ jest połączone z $n+1$, więc dla każdego k istnieje ścieżka z k do $k+1$, więc na mocy indukcji matematycznej dla dowolnych x, y istnieje ścieżka z x do y , zatem graf jest spójny.

4. Niech $p \geq 5$ będzie liczbą pierwszą. Udowodnić, że istnieją liczby całkowite dodatnie m, n takie, że $m + n \leq \frac{p+1}{2}$ oraz p jest dzielnikiem $2^n \cdot 3^m - 1$.

Rozwiązanie:

Dla $p = 5$ teza jest oczywista, więc niech $p > 5$ oraz $h = \frac{p-1}{\text{ord}_p(2)}$. Rozpatrzmy następujące przypadki:

- $h = 1$. Wtedy istnieje $1 < t < p$ takie, że $3 \equiv 2^t \pmod{p}$. Jeśli $t \geq \frac{p-1}{2}$, to $(n, m) = (p - t - 1, 1)$ spełnia warunki zadania. Przypuśćmy, że $p < \frac{p-1}{2}$. Wtedy istnieje $0 \leq i < t - 1$ takie, że $t - 1 \mid \frac{p-3}{2} + i$. Wtedy $(n, m) = (p - tu - 1, u)$ spełnia warunki zadania dla $u = \frac{\frac{p-3}{2} + i}{t-1}$.
- $h = 2$. Wtedy istnieje $t \leq \frac{p-1}{2}$ takie, że $p \mid 3^{2^t} - 1$. Zauważmy, że $t \leq \frac{p-3}{2}$ lub $p < 7$. Drugi przypadek zajść nie może, zatem otrzymujemy parę $(t, 2)$, która spełnia warunki zadania.
- $h \geq 3$. Łatwo sprawdzić, że wtedy $p > 11$. Ponadto $h \leq \frac{p-1}{3}$. Wtedy istnieje $t < \frac{p-1}{h}$, że $p \mid 3^h 2^t - 1$. Łatwo sprawdzić, że $(n, m) = (t, h)$ spełnia warunki zadania.

5. Dany jest trójkąt ABC . Na boku AB leży taki punkt X , że $2BX = BA + BC$. Niech Y będzie punktem symetrycznym do środka okręgu wpisanego w ABC względem punktu X . Udowodnić, że proste YJ oraz AB są prostopadłe, gdzie J jest środkiem okręgu dopisanego, stycznego do boku AC .

Rozwiązanie:

Niech D, D' będą odpowiednio rzutami prostokątnymi I, Y na AB . Niech a, b, c to będą długości boków trójkąta ABC . Wtedy:

$$BD = p - b, BX = \frac{a + c}{2} \implies DX = \frac{b}{2} = XD' \implies DD' = b \implies BD' = p$$

więc D' jest punktem styczności okręgu dopisanego z bokiem AB oraz $JD' \perp AB$, co kończy dowód.

6. Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg o środku w J . Okrąg α jest styczny do boku BC w punkcie K oraz do przedłużeń boków AB, CD . Okrąg β jest styczny do odcinka DA w punkcie L oraz do przedłużeń boków AB, CD . Proste AB, CD tną się w punkcie O . Udowodnić, że jeśli punkty O, K, L są współliniowe, to środek AD, J oraz środek BC są współliniowe.

Rozwiązanie:

Zacznijmy od Lematu. Dany jest okrąg wpisany o środku w I oraz okrąg dopisany styczny do odcinka BC o środku w I_a . Okręgi te są styczne do boku

BC odpowiednio w punktach X, Y . Jeśli M jest środkiem $\overline{BC}$, wtedy $MI \parallel AY$ oraz $MI_a \parallel AX$.

Dowód lematu: A jest środkiem jednokładności $(I) \sim (I_a) \implies AY$ przechodzi przez X' - punkt antypodyczny X względem okręgu (I) . Skoro M jest także środkiem $\overline{XY}$, to MI jest środkową w $\triangle XYX' \implies MI \parallel YX' \equiv AY$. Zatem $MI_a \parallel AX$.

Wróćmy do zadania. Niech M, N będą środkami odpowiednio $\overline{BC}, \overline{AD}$. Bez straty ogólności przyjmijmy, że α jest okręgiem dopisanym do $\triangle OBC$ and β jest okręgiem wpisanym w $\triangle OAD$. Z poprzedniego lematu $JM \parallel OK$ i $JN \parallel OL \implies J, M, N$ leżą na linii równoległej do $\overline{OLK}$.

7. Niech S będzie zbiorem zawierającym $n^2 + 1$ liczb całkowitych dodatnich takim, że wśród dowolnych $n + 1$ liczb istnieją dwie liczby a, b , że $a|b$ lub $b|a$. Pokazać, że istnieją $a_1, \dots, a_{n+1}$ należące do S , że $a_i|a_{i+1}$ dla $1 \leq i \leq n$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że relacja podzielności jest dobrym porządkiem. Z założenia wiemy, że nie istnieje łańcuch długości $n + 1$. Załóżmy nie wprost, że nie istnieje łańcuch długości $n + 1$. Wtedy z twierdzenia Dilworth'e'a $|S| \leq n = n^2 < |S|$ sprzeczność, czyli istnieje łańcuch długości $n + 1$.

8. Niech S będzie zbiorem odcinków na osi rzeczywistej takim, że wśród dowolnych $k + 1$ odcinków istnieją dwa które mają punkt wspólny. Udowodnić, że na osi można wybrać k punktów takich, że dowolny odcinek z S zawiera przynajmniej jeden z wybranych punktów.

Rozwiązanie:

Niech $I_1 = [a, b]; I_2 = [c, d]$ będą przykładowymi odcinkami. Na zbiorze odcinków rozważmy relację: $I_1 \leq I_2$ wtedy i tylko wtedy gdy $b < c$ lub $I_1 = I_2$. Łatwo sprawdzić, że jest to częściowy porządek. Poza tym jeśli dwa różne odcinki są ze sobą w relacji to są one rozłączne. Z założenia dostajemy, że nie istnieje łańcuch długości $k+1$, więc z twierdzenia Dilworth'e'a możemy nasz zbiór podzielić na k łańcuchów. Niech $S = \{[a_1, b_1], \dots, [a_k, b_k]\}$ będzie takim jednym łańcuchem oraz $A = \min(b_1, \dots, b_k)$ Wtedy łatwo sprawdzić, że wszystkie odcinki w S zawierają A . Wybierając takie A z każdego łańcucha dostajemy szukany zbiór.

9. Danych jest 1001 prostokątów mających wartości długości boków leżące w przedziale $\{1, \dots, 1000\}$. Pokazać, że istnieją trzy prostokąty A, B, C , że A można wsadzić w B i B w C (można obracać i przyjmujemy, że jeśli prostokąt X jest taki sam jak Y to X można wsadzić w Y).

Rozwiązanie:

Będziemy pisać $x \leq y$ jeśli prostokąt x możemy wsadzić w y . Łatwo zauważyć, że ta relacja definiuje nam częściowy porządek na zbiorze prostokątów. Załóżmy, że nie zachodzi teza. Czyli maksymalny łańcuch ma długość dwa. W takim razie z twierdzenia Dilwortha istnieje antyłańcuch A długości 501. Zauważmy, że jeśli w A istnieją dwa prostokąty które mają jeden z wymiarów taki sam, to jeden można włożyć w drugi. Więc wszystkie wymiary w naszym A są różne. Poza tym mając dwa kwadraty, jeden możemy zmieścić w drugim. Więc liczby opisujące wymiary prostokątów ze zbioru A jest 1001. Sprzeczność.

10. Wykazać, że

$$\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = 4^n$$

Rozwiązanie:

Skorzystamy z uogólnionego symbolu Newtona. Niech r będzie liczbą rzeczywistą, a n liczbą całkowitą nieujemną. Wtedy:

$$\binom{r}{n} = \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!}$$

Przy takiej definicji zachodzi wzór Newtona:

$$(a+b)^r = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{r}{i} x^{r-i} y^i$$

Dla $|x| < 0,25$ mamy:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} (4x)^i &= \frac{1}{1-4x} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} \right)^2 = ((1-4x)^{-\frac{1}{2}})^2 = \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \binom{-0,5}{i} (-4x)^i \right)^2 = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \binom{2i}{i} x^i \right)^2 \end{aligned}$$

Teraz porównując współczynniki lewej i prawej strony jak byśmy mieli do czynienia z wielomianem, dostajemy dokładnie wzór z tezy.

11. Masarnia ma 77 dni na przygotowanie się do konkursu jedzenia hot-dogów na czas. Wiadomo, że zjada on co najmniej jednego hot-doga dziennie i wiadomo też, że w ciągu całego tego czasu nie zjadł więcej niż 132 hot-dogi. Udowodnić, że istnieje seria dni podczas której zjadł w sumie dokładnie 21 hot-dogów.

Rozwiązanie:

Niech a_k będzie liczbą hot-dogów jakie zjadł Masarnia w czasie k pierwszych dni. Skoro każdego dnia zjadł co najmniej jednego to ciąg ten jest ściśle rosnący. Z drugiej strony $a_{77} \leq 132$. Niech $b_k = a_k + 21$. Wtedy $b_{77} \leq 153$. Skoro ciąg jest ściśle rosnący to wszystkie a_i są różne. Tak samo z b_i . Teraz, oba te ciągi mają wyrazy w przedziale $[1, 153]$, a wszystkich wyrazów mamy łącznie 154. Czyli istnieją dwa które są równe. Niech $a_m = b_n$. Wtedy ilość hot dogów jakie zjadł Masarnia w dniach od $(n+1)$ -ego do m -tego włącznie wynosi $a_m - a_n = b_n - a_n = 21$ co daje tezę.

12. Wykazać, że dla ustalonych a, b całkowitych dodatnich istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n , takich że

$$n \nmid a^{2^n} + b^{3^n}$$

Rozwiązanie:

Niech n będzie liczbą pierwszą p . Wtedy

$$p \mid a^{2^p} + b^{3^p} \Rightarrow -b^{3^p} \equiv_p (a^{2^{p-1}})^2 \Rightarrow \left(\frac{-b^{3^p}}{p}\right) = 1 \Rightarrow \left(\frac{-b}{p}\right) = 1$$

Jednak można udowodnić następujący

Lemat: Dla dowolnego m istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p , że

$$\left(\frac{-m}{p}\right) = -1$$

Dowód pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie.

Wskazówka: Rozpisać m jako iloczyn liczb pierwszych i skorzystać z multiplikatywności symbolu Legendre'a oraz prawa wzajemności reszt kwadratowych.

13. Udowodnić, że istnieje nieskończony ciąg parami względnie pierwszych liczb taki, że żaden wyraz ciągu nie dzieli liczby postaci

$$2^m + 2^n + 1$$

dla m, n naturalnych.

Rozwiązanie:

Lemat:

$$NWD(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{NWD(a, b)} - 1$$

Dowód pozostawiamy jako ćwiczenie czytelnikowi. Wskazówka: Rozważyć rząd NWD względem dwójki. Weźmy sobie liczby postaci $2^p - 1$ dla $p > 3$ będącego

liczbą pierwszą. Z lematu widać, że są one wszystkie względnie pierwsze. Poza tym

$$2^p - 1 \mid 2^m + 2^n + 1 \Rightarrow \exists_{a,b < p} : 2^p - 1 \mid 2^a + 2^b + 1$$

gdzie istnienie wynika z tego, że $p \mid 2^k - 1 \Rightarrow p \mid 2^{k-p} - 1$, czyli możemy sobie "zjechać" z wykładnikiem pod p . Teraz jeśli jedna z liczb a, b jest mniejsza od $p - 1$ to

$$2^a + 2^b + 1 \leq 2^{p-1} + 2^{p-2} + 1 < 2^p - 1$$

W takim razie $a = b = p - 1$ wtedy $2^p - 1 \mid 2^{p-1} + 2^{p-1} + 1 = 2^p + 1$ co jest oczywiście niemożliwe.

Spis treści

Treści zadań	2
Zawody indywidualne	2
Mecz matematyczny	3
Zadania dodatkowe	5
Rozwiązania	7
Zawody indywidualne	7
Mecz Matematyczny	13
Zadania dodatkowe	25