Obóz przygotowawczy do Olimpiady Matematycznej

Krynica Zdrój

22 - 26 września 2014r.

Wyniki

			22 września				23 września				24 września				
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Σ
1.	Artur	Zubilewicz	6	6	6	6	6	6	6	5	6	6	6	0	65
2.	Jakub	Węgrecki	6	0	6	5	6	6	6	6	6	6	0	0	53
3.	Jakub	Luśtyk	6	5	6	6	6	6	6	0	6	0	5	0	52
4.	Piotr	Ryndak	6	6	6	0	6	6	6	0	5	0	0	0	41
5.	Beata	Czarnecka	6	0	6	0	6	6	6	0	6	0	5	0	41
6.	Piotr	Kubala	6	0	6	0	6	6	0	5	6	0	6	0	41
7.	Jan	Boruch	6	0	6	0	6	6	6	0	6	0	0	0	36
8.	Katarzyna	Wodzińska	6	0	6	0	6	6	6	0	6	0	0	0	36
9.	Krystian	Krakowski	5	2	2	0	6	6	6	0	6	2	0	0	35
10.	Krzysztof	Zamarski	6	6	0	0	6	6	0	5	6	0	0	0	35
11.	Mikołaj	Sikora	6	0	6	0	0	6	6	0	6	2	0	0	32
12.	Michał	Wójcik	6	0	6	0	0	6	0	0	6	0	0	0	24
13.	Paweł	Ryndak	6	0	0	0	6	0	6	0	6	0	0	0	24
14.	Wiktor	Reczek	6	0	2	0	0	6	0	0	6	0	0	0	20
15.	Karolina	Kowal	0	6	0	0	0	6	6	0	0	0	0	0	18
16.	Aleksander	Truszczyński	6	0	0	0	0	6	0	0	6	0	0	0	18
17.	Tomasz	Truszczyński	6	0	0	0	0	6	0	0	6	0	0	0	18
18.	Szymon	Galara	0	0	0	0	0	2	0	0	6	5	0	0	13
19.	Marcin	Furgał	0	0	0	0	6	5	0	0	0	0	0	0	11
20.	Kamil	Poniewierski	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	6
21.	Łukasz	Kluska	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	6
22.	Marek	Wrzos	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	5
			95	31	64	17	72	103	66	21	118	21	22	0	

Zawody indywidualne

1. Dane są liczby rzeczywiste x, y i z takie, że $0 \leqslant x, y, z \leqslant 1$. Pokazać, że

$$xyz + (1-x)(1-y)(1-z) \leqslant 1.$$

2. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $\angle ACB = 45°$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, punkt H jest punktem przecięcia wysokości trójkąta ABC. Prosta przechodząca przez punkt O i prostopadła do prostej CO przecina proste AC i BC odpowiednio w punktach K i L. Pokazać, że obwód trójkata KLH jest równy średnicy okręgu opisanego na trójkącie ABC.

3. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n dla których liczba $2^n + 273$ jest kwadratem liczby całkowitej.

4. Dana jest tablica 2014×2014. Dwaj gracze na przemian wykonują ruchy, z których każdy polega na wybraniu białego albo czarnego pionka i postawieniu go na wybranym wolnym polu. Wygrywa ten, którego ruch doprowadził do powstania ciągu 5 kolejnych pionków tego samego koloru w linii pionowej, poziomej lub ukośnej. Zbadać, czy istnieje strategia dla gracza rozpoczynającego grę zapewniająca mu zwycięstwo.

?**5.** Rozwiązać w liczbach rzeczywistych a, b, c i d układ równań

$$\begin{cases} (b+c+d)^{2014} = 3a \\ (a+c+d)^{2014} = 3b \\ (a+b+d)^{2014} = 3c \\ (a+b+c)^{2014} = 3d \end{cases}$$

6. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n takie, że w zapisie dziesiętnym liczby n^2 występują jedynie cyfry nieparzyste.

7. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Punkty M, N, J są odpowiednio środkami okręgów wpisanych w trójkąty AEF, BDF, DEF. Dowieść, że punkty F i J są symetryczne względem prostej MN.

8. W rzędzie danych jest kilka liczb całkowitych dodatnich. *Operacją* nazwiemy wybór sąsiednich liczb x i y przy czym x leży na lewo od y oraz $x > y$ i zamianę pary (x, y) na $(y+1, x)$ lub $(x-1, x)$. Pokazać, że można wykonać jedynie skończenie wiele *operacji*.

?**9.** W każde pole tablicy o wymiarach 4×4 wpisano liczbę 0 lub 1. Następnie obliczono sumy liczb stojących

w każdym wierszu, w każdej kolumnie i na obu przekątnych. Wykaż, że co najmniej trzy sumy są jednakowe.

10. Dana jest liczba pierwsza p oraz różne liczby a, b, c, d ze zbioru $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ przy czym liczby a^4, b^4, c^4, d^4 dają jednakowe reszty z dzielenia przez p. Udowodnić, że liczba $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ jest podzielna przez liczbę $a + b + c + d$.

11. Dany jest czworościan $ABCD$, którego ściany są trójkątami ostrokątnymi. Na prostej m leży środek sfery wpisanej oraz środek sfery opisanej na czworościanie. Udowodnić, że jeśli prosta m przecina odcinek AB, to $\angle ACB = \angle ADB$.

12. Wyznaczyć wszystkie funkcje f, określone na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x).$$

Mecz matematyczny

1. Niech x_0 będzie rzeczywistym rozwiązaniem równania

$$x^3 + px + q = 0,$$

gdzie p i q są liczbami rzeczywistymi. Pokazać, że $4qx_0 \leqslant p^2$.

2. Niech $\mathbb{N}_+$ oznacza zbiór liczb całkowitych dodatnich. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{N}_+ \longrightarrow \mathbb{N}_+$ takie, że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich m i n zachodzi podzielność

$$m^2 + f(n) \mid mf(m) + n.$$

3. Liczby całkowite dodatnie a, b i c spełniają warunek

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 6abc.$$

Pokazać, że liczba $a^3 + b^3 + c^3 + 1$ nie jest podzielna przez liczbę $a + b + c + 1$.

4. Dany jest wielomian W stopnia n taki, że dla każdej liczby całkowitej m liczba $W(m)$ jest liczbą całkowitą. Pokazać, że istnieją liczby całkowite $a_0, a_1, \ldots, a_n$ takie, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$W(x) = a_n \binom{x}{n} + a_{n-1} \binom{x}{n-1} + \ldots + a_0 \binom{x}{0},$$

gdzie dla dowolnej liczby rzeczywistej x i liczby całkowitej dodatniej n definiujemy

$$\binom{x}{n} := \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \ldots \cdot (x-n+1)}{n!} \quad \text{oraz} \quad \binom{x}{0} := 1.$$

5. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ istnieje n różnych liczb naturalnych takich, że suma każdych dwóch spośród tych liczb jest podzielna przez ich różnicę.

6. Liczby rzeczywiste dodatnie a, b i c spełniają warunek

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) < 10.$$

Pokazać, że z odcinków o długościach a, b i c można zbudować trójkąt.

7. Dana jest rodzina $\mathcal{F}$ podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ dla $n \in \mathbb{N}$, mająca więcej niż 2^{n-1} elementów. Pokazać, że istnieją dwa zbiory A i B należące do rodziny $\mathcal{F}$ takie, że $A \cap B = \emptyset$.

8. Wyznaczyć wszystkie pola na szachownicy rozmiaru 8×8 o następujacej własnosci: Po usunieciu tego pola można pokryć pozostałą część szachownicy klockami rozmiaru 3×1.

9. W turnieju ping-ponga każdy gracz rozegrał dokładnie jeden mecz z każdym z pozostałych graczy. Udowodnić, że albo można umieścić wszystkich graczy przy okrągłym stole tak, by każdy wygrał ze swoim sąsiadem z prawej strony, albo można rozbić wszystkich graczy na takie dwie grupy, że dowolny gracz z pierwszej grupy wygrał z dowolnym graczem z drugiej grupy.

10. W trójkącie ABC dwusieczna kąta BCA przecina okrąg opisany w punkcie $R \neq A$, symetralną odcinka BC w punkcie P oraz symetralną odcinka AC w punkcie Q. Punkty K i L są środkami boków odpowiednio BC i AC. Pokazać, że trójkąty RPK i RQL mają równe pola.

11. Dany jest równoległobok $ABCD$ oraz punkt F leżący na odcinku CD. Punkty O_1, O_2 i O_3 są środkami okręgów opisanych na trójkątach ABF, BCF i ADF. Dowieść, że ortocentrum trójkąta $O_1O_2O_3$ leży na prostej AB.

12. Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg, którego przekątne przecinają się w punkcie E. Przedłużenia boków AD i BC wzdłuż punktów A i B przecinają się w punkcie F. Niech G będzie takim punktem, że czworokąt $ECGD$ jest równoległobokiem. Punkt H obrazem punktu E w symetrii względem prostej AD. Pokazać, że punkty D, H, F i G leżą na jednym okręgu.

Rozwiązania

Zawody indywidualne

1. Dane są liczby rzeczywiste x, y i z takie, że $0 \leqslant x, y, z \leqslant 1$. Pokazać, że

$$xyz + (1-x)(1-y)(1-z) \leqslant 1.$$

Rozwiązanie:
Liczby x, y i z należą do przedziału $[0,1]$, stąd mamy następujące nierówności

$$xyz \leqslant x \quad \text{oraz} \quad (1-x)(1-y)(1-z) \leqslant 1-x.$$

Dodając powyższe nierówności stronami otrzymujemy tezę. $\square$

2. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $\angle ACB = 45°$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, punkt H jest punktem przecięcia wysokości trójkąta ABC. Prosta przechodząca przez punkt O i prostopadła do prostej CO przecina proste AC i BC odpowiednio w punktach K i L. Pokazać, że obwód trójkata KLH jest równy średnicy okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Rozwiązanie:
Niech D będzie spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka B i niech G będzie punktem symetrycznym do punktu H względem prostej AC; odcinki BG i AC przecinają się w punkcie D.

Zauważmy, że punkt G leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC. Rzeczywiście, ze względu na prostopadłości $BH \perp AC$, $CH \perp AB$ mamy

$$\angle ACG = \angle ACH = \angle ABG,$$

a więc punkty A, B, C, G leżą na jednym okręgu.

W trójkącie BCD zachodzą równości $\angle BCD = 45°$ i $\angle BDC = 90°$, skąd wyznaczamy $\angle CBG = 45°$. Zatem

$$\angle GOC = 2\angle GBC = 90°.$$

Stąd $GO \perp CO$, toteż punkty G, K, O leżą na jednej prostej w tej właśnie kolejności. Wobec tego

$$OK + KH = OK + KG = OG,$$

czyli wielkość $OK + KH$ jest równa promieniowi okręgu opisanego na trójkącie ABC. Analogicznie dowodzimy, że temu promieniowi jest równa wielkość $OL + LH$, co oczywiście łatwo daje tezę zadania. $\square$

3. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n dla których liczba $2^n + 273$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że jeśli n jest liczbą nieparzystą to liczba $2^n + 273$ daję resztę 2 z dzielenia przez 3, zatem nie może być kwadratem liczby całkowitej. Załóżmy więc, że n jest liczbą parzystą to znaczy $n = 2k$ dla pewnej liczby całkowitej dodatniej k.

Problem sprowadza się do rozwązania w liczbach całkowitych dodatnich k, m równania

$$2^{2k} + 273 = m^2,$$

zapisując je inaczej dostajemy

$$(m - 2^k)(m + 2^k) = 273 = 3 \cdot 7 \cdot 13.$$

Powyższa równość prowadzi nas w naturalny sposób do układów równań:

$$\begin{cases} m - 2^k = 1 \\ m + 2^k = 273 \end{cases} \quad \begin{cases} m - 2^k = 3 \\ m + 2^k = 91 \end{cases} \quad \begin{cases} m - 2^k = 7 \\ m + 2^k = 39 \end{cases} \quad \begin{cases} m - 2^k = 13 \\ m + 2^k = 21 \end{cases}$$

Rozwiązując je w liczbach całkowitych otrzymujemy następujące możliwe pary (k, m)

$$\begin{cases} k = 2 \\ m = 17 \end{cases} \qquad \begin{cases} k = 4 \\ m = 23 \end{cases}$$

Zatem szukane wartości n to liczby 4 i 8. Bezpośrednio stwierdzamy, że uzyskane pary spełniają warunki zadania:

$$2^4 + 273 = 17^2, \quad 2^8 + 273 = 23^2.$$

$\square$

4. Dana jest tablica 2014×2014. Dwaj gracze na przemian wykonują ruchy, z których każdy polega na wybraniu białego albo czarnego pionka i postawieniu go na wybranym wolnym polu. Wygrywa ten, którego ruch doprowadził do powstania ciągu 5 kolejnych pionków tego samego koloru w linii pionowej, poziomej lub ukośnej. Zbadać, czy istnieje strategia dla gracza rozpoczynającego grę zapewniająca mu zwycięstwo.

Rozwiązanie:

Wskażemy strategię gry dla gracza nie rozpoczynającego (zwanego w dalszej części rozwiązania drugim graczem), która uniemożliwi graczowi rozpoczynającemu (pierwszemu) zwycięstwo.

Strategię tę można opisać nastepująco: Jeżeli drugi gracz może wykonać ruch prowadzący do powstania ciągu 5 kolejnych pionków tego samego koloru w jednej linii, wykonuje on taki ruch i wygrywa grę. W przeciwnym razie drugi gracz stawia pionek na polu symetrycznym względem środka szachownicy do pola, które przed chwila zajął pierwszy gracz, i w kolorze przeciwnym niż pionek postawiony właśnie przez pierwszego gracza.

Rozmiary szachownicy są liczbami parzystymi, więc pole symetryczne względem jej środka do danego pola jest innym polem. Opisana strategia jest zatem poprawnie określona: po każdym ruchu drugiego gracza dowolna para pól szachownicy symetrycznych względem jej środka składa sią albo z dwóch wolnych, albo z dwóch zajętych pól, wobec czego po ruchu pierwszego gracza pole symetryczne do pola przezeń zajętego jest wolne.

Wykażemy, że nie jest możliwe, by przy takiej strategii drugiego gracza gracz rozpoczynający mógł odnieść zwycięstwo. Przypuśćmy przeciwnie, że pewien ruch pierwszego gracza zapewnił mu zwycęstwo. Rozpatrzmy pozycje na szachownicy przed wykonaniem tego ruchu. Jak wykazaliśmy, w tej pozycji dowolne pole jest zajęte przez pionek wtedy i tylko wtedy, gdy pole don symetryczne jest zajęte przez pionek przeciwnego koloru. Zatem układowi 4 pionków jednego koloru k, który pierwszy gracz przez postawienie pionka na polu P powiększył do wygrywającego układu 5 kolejnych pionków koloru k w jednej linii, odpowiada w tej pozycji układ 4 pionków koloru k' przeciwnego do k, a przy tym pole P' symetryczne do pola P jest wolne. Wówczas jednak, zgodnie z opisaną strategią, ostatni ruch drugiego gracza powinien polegać na postawieniu na polu P' pionka w kolorze k', co prowadzi do powstania ciągu 5 kolejnych pionków koloru k' w jednej linii, i w konsekwencji do wygranej drugiego gracza — wbrew założeniu, że zwycięstwo odniósł pierwszy gracz wykonując kolejny ruch.

Uzyskana sprzeczność dowodzi, że przy takiej strategii drugiego gracza, gracz rozpoczynający nie może zapewnić sobie zwycięstwa w grze. $\square$

5. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych a, b, c i d układ równań

$$\begin{cases} (b+c+d)^{2014} = 3a \\ (a+c+d)^{2014} = 3b \\ (a+b+d)^{2014} = 3c \\ (a+b+c)^{2014} = 3d \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Oczywiście liczby a, b, c i d są nieujemne, bez szkody dla ogólności załóżmy, że $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d \geqslant 0$. Wówczas

$$(b+c+d)^{2014} \geqslant (a+c+d)^{2014} \geqslant (a+b+d)^{2014} \geqslant (a+b+c)^{2014},$$

stąd

$$(b+c+d) \geqslant (a+c+d) \geqslant (a+b+d) \geqslant (a+b+c),$$

po uproszczeniu dostajemy nierówności

$$d \geqslant c \geqslant b \geqslant a,$$

która w połączeniu z naszym założeniem daje równość $a = b = c = d$.

Pozostaje zauważyć że jedynymi rozwiązaniami równania

$$(3x)^{2014} = 3x$$

są liczby 0 i $\frac{1}{3}$, stąd wszystkie możliwe czwórki liczb (a, b, c, d) spełniające powyższy układ równań należą do zbioru

$$\left\{(0,0,0,0), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}.$$

□

6. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n takie, że w zapisie dziesiętnym liczby n^2 występują jedynie cyfry nieparzyste.

Rozwiązanie:

Jeżeli n posiada tylko jedną cyfre to widzimy, że jedynie $n = 1$ i $n = 3$ spełniają warunki zadania. Załóżmy więc, że n ma co najmniej dwie cyfry i ostatnie dwie cyfry oznaczmy przez a i b.

Aby warunki zadania były spełnione b musi być cyfrą nieparzystą, stąd mamy następujące przypadki

- jeśli $b = 1$ to przedostatnia cyfra liczby n^2 jest równa $2a \pmod{10}$ - jest parzysta,
- jeśli $b = 3$ to przedostatnia cyfra liczby n^2 jest równa $6a \pmod{10}$ - jest parzysta,
- jeśli $b = 5$ to przedostatnia cyfra liczby n^2 jest równa 2 - jest parzysta,
- jeśli $b = 7$ to przedostatnia cyfra liczby n^2 jest równa $4a + 4 \pmod{10}$ - jest parzysta,
- jeśli $b = 9$ to przedostatnia cyfra liczby n^2 jest równa $8a + 8 \pmod{10}$ - jest parzysta.

Zatem n należy do zbioru $\{1, 3\}$. □

7. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Punkty M, N, J są odpowiednio środkami okręgów wpisanych w trójkąty AEF, BDF, DEF. Dowieść, że punkty F i J są symetryczne względem prostej MN.

Rozwiązanie:

Udowodnimy najpierw, że punkty M i N są odpowiednio środkami krótszych łuków FE i FD okręgu wpisanego w trójkąt ABC.

Rzeczywiście, niech M' będzie środkiem krótszego łuku FE tego okręgu. Prosta AC jest doń styczna w punkcie E, zatem

$$\angle AEM' = \angle EFM'.$$

Ponieważ punkt M' jest środkiem łuku EF, więc trójkąt $EM'F$ jest równoramienny. Wobec tego $\angle EFM' = \angle FEM'$, co wraz z poprzednią równością dowodzi, że punkt M' leży na dwusiecznej kąta $\angle AEF$. Analogicznie dowodzimy, że punkt ten leży na dwusiecznej kąta $\angle AFE$, więc pokrywa się on ze środkiem M okręgu wpisanego w trójkąt AEF. Podobnie rozumujemy dla punktu N.

Okrąg wpisany w trójkat ABC jest jednocześnie okręgiem opisanym na trójkącie DEF. Skoro M jest środkiem krótszego łuku EF tego okręgu, prosta DM zawiera dwusieczną kąta $\angle EDF$. Na tej prostej leży więc punkt J, który jest środkiem okręgu wpisanego w ten kąt. Analogicznie dochodzimy do wniosku, że punkt J leży na prostej EN.

Aby uzasadnić, że punkty J i F są symetryczne względem prostej MN, wystarczy wykazać, iż trójkąty MFN oraz MJN są przystające, gdyż będzie to oznaczało, że są one symetryczne względem prostej MN. Mamy jednak

$$\angle JMN = \angle DMN = \angle FMN,$$

gdzie druga równość wynika z tego, że N jest środkiem łuku FD. Podobnie dostajemy $\angle ANM = \angle FNM$. Trójkąty MFN i MJN maja więc równe odpowiednie kąty oraz wspólny bok MN, zatem są przystające (cecha kąt-bok-kąt). Kończy to rozwiązanie zadania. □

8. W rzędzie danych jest kilka liczb całkowitych dodatnich. *Operacją* nazwiemy wybór sąsiednich liczb x i y przy czym x leży na lewo od y oraz $x > y$ i zamianę pary (x, y) na $(y + 1, x)$ lub $(x - 1, x)$. Pokazać, że można wykonać jedynie skończenie wiele *operacji*.

Rozwiązanie:

Na początku zauważmy, że *operacja* nie zwiększa maksymalnej liczby w rzędzie. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą liczbami w rzędzie po pewnej ilości *operacji*. Rozważmy sumę

$$S = a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n.$$

Pokażemy, że S zwiększa się o dodatnią liczbę całkowitą po wykonaniu *operacji*. Niech *operacja* zamienia parę (a_i, a_{i+1}) dla pewnego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ na (X, a_i) gdzie $a_i > a_{i+1}$ oraz $X = a_{i+1} + 1$ lub $X = a_i - 1$. Nowa i stara wartość S zmieniła się o

$$R = (iX + (i + 1)a_i) - (ia_i + (i + 1)a_{i+1}) = a_i - a_{i+1} + i(X - a_{i+1}).$$

Łatwo widzimy, że R jest liczbą całkowitą dodatnią, gdyż $a_i - a_{i+1} \geqslant 1$ oraz $X - a_{i+1} \geqslant 0$.

Z drugiej strony

$$S \leqslant (1 + 2 + \ldots + n) \cdot \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \text{stała wartość}$$

a ponieważ po wykonaniu *operacji* S się zwiększa, nie można więc wykonać nieskończenie wielu *operacji*. □

1. W każde pole tablicy o wymiarach 4×4 wpisano liczbę 0 lub 1. Następnie obliczono sumy liczb stojących w każdym wierszu, w każdej kolumnie i na obu przekątnych. Wykaż, że co najmniej trzy sumy są jednakowe.

Rozwiązanie:

Przypuśćmy, że wśród uzyskanych 10 sum żadna nie powtarza się więcej niż dwa razy. Dodając cztery liczby, z których każda równa się 0 lub 1 możemy uzyskać 5 możliwych wyników: 4, 3, 2, 1 lub 0. Ponieważ wszystkich sum jest 10, więc każda z nich musiałaby wystąpić dokładnie dwa razy.

Tymczasem wśród uzyskanych 10 sum nie mogą się pojawić dwie równe 4 i jednocześnie dwie równe 0. Jeśli bowiem sumę 4 uzyskamy dodając liczby z pewnej przekątnej, to na tej przekątnej muszą występować same jedynki. W efekcie otrzymamy co najwyżej jedną sumę równą 0 (tę na drugiej przekątnej).

Jeśli natomiast wynik 4 otrzymamy dodając cztery jedynki stojące w pewnej kolumnie, to sumę 0 możemy uzyskać jedynie dodając cztery zera w innej kolumnie. Wobec tego drugą sumę 4 oraz drugą sumę 0 uzyskamy dodając liczby stojące w pozostałych dwóch kolumnach. Wtedy jednak w wierszach otrzymamy cztery sumy równe 2.

Analogicznie rozumujemy, jeśli wynik 4 uzyskamy sumując cztery jedynki stojące w pewnym wierszu. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że co najmniej trzy uzyskane sumy są jednakowe. □

2. Dana jest liczba pierwsza p oraz różne liczby a, b, c, d ze zbioru $\{1, 2, \ldots, p - 1\}$ przy czym liczby a^4, b^4, c^4, d^4 dają jednakowe reszty z dzielenia przez p. Udowodnić, że liczba $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ jest podzielna przez liczbę $a + b + c + d$.

Rozwiązanie:

Liczby a, b, c i d rozpatrywane modulo p są wszystkimi pierwiastkami wielomianu $P(x) = x^4 - a^4$, którego współczynniki są resztami modulo p. Ponadto jeśli jego pierwiastkiem modulo p jest k to jest nim również $p - k$. Obliczając na dwa sposoby sumę pierwiastków wielomianu P modulo p widzimy, że

$$a + b + c + d = (p - a) + (p - b) + (p - c) + (p - d) \Longrightarrow a + b + c + d = 2p.$$

Na podstawie wzorów *Viety* dostajemy, że

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd \equiv 0 \pmod{p},$$

stąd

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (a + b + c + d)^2 - 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) \equiv 0 \pmod{a + b + c + d}.$$

□

3. Dany jest czworościan $ABCD$, którego ściany są trójkątami ostrokątnymi. Na prostej m leży środek sfery wpisanej oraz środek sfery opisanej na czworościanie. Udowodnić, że jeśli prosta m przecina odcinek AB, to $\angle ACB = \angle ADB$.

Rozwiązanie:

Niech S i O oznaczaja odpowiednio środek sfery wpisanej i opisanej na czworościanie $ABCD$. Oznaczmy przez P punkt przecięcia prostej m z odcinkiem AB. Punkty S_C i O_C są rzutami prostokatnymi punktów S i O na płaszczyzę ABC, a punkty SD i OD – ich rzutami na płaszczyznę ABD. Jest jasne, że S_C, S_D są punktami styczności sfery wpisanej w czworościan $ABCD$ do ścian ABC i ABD, zaś punkty O_D, O_D są środkami okregów opisanych na trójkątach ABC i ABD. Punkty P, S_C, O_C są współliniowe jako rzuty prostopadłe punktów współliniowych. Podobnie punkty P, S_D, O_D. Wobec tego, na mocy twierdzenia *Talesa,* zachodzą równości

$$\frac{PO}{OO_C} = \frac{PS}{SS_C} \quad \text{oraz} \quad \frac{PO}{OO_D} = \frac{PS}{SS_D}.$$

Obydwa odcinki SS_C i SS_D są promieniami sfery wpisanej w czworościan $ABCD$, wiec mają równą długość. Stąd $OO_C = OO_D$.

Niech R będzie promieniem sfery opisanej na czworościanie $ABCD$ oraz $h = OO_C = OO_D$. Z twierdzenia *Pitagorasa,* promienie okręgów opisanych na trójkątach ABC oraz ABD mają jednakowe długości, równe $r = \sqrt{R^2 - h^2}$. Stąd, na mocy twierdzenia sinusów,

$$\sin \angle ACB = \frac{AB}{2r} = \sin \angle ADB.$$

Z założenia zadania obydwa te kąty są ostre, zatem ich miary są równe. □

4. Wyznaczyć wszystkie funkcje f, określone na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x).$$

Rozwiązanie:

Ustalmy $x \in \mathbb{R}$ a następnie w powyższym równaniu podstawmy $y := -f(x)$, dostajemy

$$f(0) = 2x + f(f(-f(-x)) - x) \Longrightarrow f(f(-f(-x)) - x) = f(0) - 2x.$$

Ze względu na to, że liczby $f(0) - 2x$ dla $x \in \mathbb{R}$ przebiegają cały zbiór liczb rzeczywistych widzimy, że f musi być surjekcją. Istnieje więc liczba rzeczywista r taka, że $f(r) = 0$.

Zauważmy, że wtedy

$$f(y) = f(f(r) + y) = 2r + f(f(y) - r) \Longrightarrow f(f(y) - r) = (f(y) - r) - r.$$

Podobnie jak wyżej widzimy, że liczby $f(y) - r$ dla $y \in \mathbb{R}$ przebiegają cały zbiór liczb rzeczywistych, zatem dla każdego $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x - r.$$

Ostatecznie, jedynymi funkcjami które spełniają warunki zadania są funkcje postaci

$$f(x) = x - c, \quad \text{gdzie} \quad c \in \mathbb{R}.$$

□

Rozwiązania

Mecz matematyczny

1. Niech x_0 będzie rzeczywistym rozwiązaniem równania

$$x^3 + px + q = 0,$$

gdzie p i q są liczbami rzeczywistymi. Pokazać, że $4qx_0 \leqslant p^2$.

Rozwiązanie:

Rozważmy równanie

$$x_0x^2 + px + q = 0.$$

Ponieważ x_0 jest rozwiązaniem rzeczywistym tego równania to jego wyróżnik musi być nieujemny, czyli

$$4qx_0 \leqslant p^2.$$

$\square$

2. Niech $\mathbb{N}_+$ oznacza zbiór liczb całkowitych dodatnich. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{N}_+ \longrightarrow \mathbb{N}_+$ takie, że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich m i n zachodzi podzielność

$$m^2 + f(n) \mid mf(m) + n.$$

Rozwiązanie:

Ustalmy $n \in \mathbb{N}_+$ i podstawmy za $m := f(n)$, dostajemy

$$f(n)^2 + f(n) \mid f(n)f(f(n)) + n \Longrightarrow f(n) \mid n \Longrightarrow f(n) \leqslant n \text{ dla } n \in \mathbb{N}_+.$$

Z powyższej nierówności widzimy, że $f(1) = 1$.

W wyjściowej podzielności podstawmy teraz $m := n$, otrzymujemy

$$n^2 + f(n) \mid nf(n) + n \Longrightarrow n^2 + f(n) \leqslant nf(n) + n \Rightarrow n^2 - n \leqslant (n-1)f(n),$$

stąd $f(n) \geqslant n$ dla $n \geqslant 2$, co w połączeniu z nierównością $n \leqslant f(n)$ dla $n \geqslant 1$ i równością $f(1) = 1$ daje nam jedyne rozwiązanie:

$$f(n) = n \text{ dla } n \in \mathbb{N}_+.$$

$\square$

3. Liczby całkowite dodatnie a, b i c spełniają warunek

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 6abc.$$

Pokazać, że liczba $a^3 + b^3 + c^3 + 1$ nie jest podzielna przez liczbę $a + b + c + 1$.

Rozwiązanie:

Warunek jest równoważny następującemu

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 3abc.$$

Korzystając z dobrze znanej równości

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca),$$

widzimy, że zachodzi równość

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc(a + b + c + 1).$$

Oznacza to, że liczba $a + b + c + 1$ dzieli liczbę $a^3 + b^3 + c^3$, gdyby dodatkowo dzieliła liczbę $a^3 + b^3 + c^3 + 1$ uzyskalibyśmy, że 1 jest podzielne przez $a + b + c + 1$ - co jest niemożliwe. $\square$

4. Dany jest wielomian W stopnia n taki, że dla każdej liczby całkowitej m liczba $W(m)$ jest liczbą całkowitą. Pokazać, że istnieją liczby całkowite $a_0, a_1, \ldots, a_n$ takie, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$W(x) = a_n\binom{x}{n} + a_{n-1}\binom{x}{n-1} + \ldots + a_0\binom{x}{0},$$

gdzie dla dowolnej liczby rzeczywistej x i liczby całkowitej dodatniej n definiujemy

$$\binom{x}{n} := \frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-n+1)}{n!} \quad \text{oraz} \quad \binom{x}{0} := 1.$$

Rozwiązanie:

Zastosujemy indukcję względem n. Dla $n = 1$ jest to oczywiste, załóżmy więc, że $n > 1$. Rozpatrzmy wielomian

$$Q(x) = P(x+1) - P(x).$$

Widzimy, że na mocy warunków zadania dla każdej liczby całkowitej n liczba $Q(n)$ jest całkowita, ponadto stopień wielomianu Q wynosi dokładnie $n-1$. Zatem na mocy założenia indukcyjnego istnieją liczby całkowite $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ takie, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$P(x+1) - P(x) = Q(x) = a_{n-1}\binom{x}{n-1} + a_{n-2}\binom{x}{n-2} + \ldots + a_0\binom{x}{0}.$$

Ustalmy teraz $m \in \mathbb{Z}$ i zauważmy, że

$$P(m) = P(0) + Q(1) + Q(2) + \ldots + Q(m-1).$$

Wykorzystując powyższą równość oraz dobrze znaną własność współczynników dwumianowych *Newtona* :

$$\binom{0}{n} + \binom{1}{n} + \ldots + \binom{m-1}{n} = \binom{m}{n+1} \quad \text{dla} \;\; m, n \in \mathbb{N}$$

otrzymujemy, że

$$P(x) = a_{n-1}\binom{x}{n} + a_{n-2}\binom{x}{n-1} + \ldots + a_0\binom{x}{1} + P(0) \;\; \text{dla } x \in \mathbb{Z}$$

a ponieważ powyższa równość zachodzi dla nieskończenie wielu liczb to zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej. Indukcja kończy dowód. □

5. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ istnieje n różnych liczb naturalnych takich, że suma każdych dwóch spośród tych liczb jest podzielna przez ich różnicę.

Rozwiązanie:

Ponieważ liczba $a+b$ jest podzielna przez liczbę $a-b$, więc liczba $2a$ jest podzielna przez ab. Ciag złożony z dwóch liczb 1, 2 spełnia warunki zadania. Niech ciąg liczb naturalnych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełnia warunki zadania. Wtedy liczba $2x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ jest podzielna przez różnicę każdych dwóch liczb z ciagu $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Niech $p = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$. Wówczas ciąg złożony z $n+1$ liczb $p + x_1$, $p + x_2$, $\ldots$, $p + x_n$, p spełnia warunki zadania. □

6. Liczby rzeczywiste dodatnie a, b i c spełniają warunek

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) < 10.$$

Pokazać, że z odcinków o długościach a, b i c można zbudować trójkąt.

Rozwiązanie:

Załóżmy, że $c \geqslant a + b$. Wówczas

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant (a+b+c)\left(\frac{4}{a+b} + \frac{1}{c}\right) = 5 + \frac{4c}{a+b} + \frac{a+b}{c} \geqslant 5 + 5\sqrt[5]{\frac{c^4}{(a+b)^4}\cdot\frac{a+b}{c}} \geqslant 5 + 5 = 10,$$

gdzie po drodze korzystamy z nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną a geometryczną.

Otrzymaliśmy sprzeczność z warunkami zadania, a to oznacza, że $a + b > c$. Analogicznie dowodzimy pozostałe dwie nierówności: $b + c > a$ oraz $c + a > b$. $\square$

7. Dana jest rodzina $\mathcal{F}$ podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ dla $n \in \mathbb{N}$, mająca więcej niż 2^{n-1} elementów. Pokazać, że istnieją dwa zbiory A i B należące do rodziny $\mathcal{F}$ takie, że $A \cap B = \emptyset$.

Rozwiązanie:

Rozważmy rodzinę $\mathcal{S}$ podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ o następującej własności: Jeżeli A i B należą do $\mathcal{S}$ to $A \cap B \neq \emptyset$. Zauważmy, że dla dowolnego podzbioru $X \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ zbiory X lub $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus X$ należą do $\mathcal{S}$, stąd rodzina $\mathcal{S}$ ma co najwyżej 2^{n-1} elementów, gdyż wszystkich podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ jest dokładnie 2^n. Rodzina $\mathcal{F}$ ma więcej niż 2^{n-1} elementów, co oznacza że pewne dwa z nich są rozłączne - co było do pokazania. $\square$

8. Wyznaczyć wszystkie pola na szachownicy rozmiaru 8×8 o następujacej własnosci: Po usunieciu tego pola można pokryć pozostałą część szachownicy klockami rozmiaru 3×1.

Rozwiązanie:

Wypełnijmy pola danej szachownicy liczbami w następujacy sposób:

1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
0	0	2	0	0	2	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
0	0	2	0	0	2	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1

Wówczas każdy klocek przykrywa pola o łącznej sumie 2. Wobec tego suma liczb wpisanych w pola przykryte przez 21 klocków wynosi 42, zaś suma liczb we wszystkich polach jest równa 44. Zatem jedynymi polami o zadanej własności mogą być tylko cztery pola z liczba 2. W istocie maja one taką własność: każde z nich jest środkiem pewnej szachownicy 5×5 i po jego usunięciu można ja pokryć 8 klockami; pozostała część wyjściowej szachownicy rozpada się na prostokąty 3×5 i 3×8, które oczywiście również można pokryć klockami. $\square$

9. W turnieju ping-ponga każdy gracz rozegrał dokładnie jeden mecz z każdym z pozostałych graczy. Udowodnić, że albo można umieścić wszystkich graczy przy okrągłym stole tak, by każdy wygrał ze swoim sąsiadem z prawej strony, albo można rozbić wszystkich graczy na takie dwie grupy, że dowolny gracz z pierwszej grupy wygrał z dowolnym graczem z drugiej grupy.

Rozwiązanie:

Jeżeli możliwe jest umieszczenie graczy przy okrągłym stole w sposób opisany w zadaniu, to nietrudno się przekonać, że dla dowolnego rozbicia graczy na dwie grupy A i B nie może się zdarzyć, że każdy gracz z A wygrał z dowolnym graczem z B (istnieje bowiem członek grupy B, którego sąsiad z prawej strony należy do A — rozpatrując mianowicie ciąg kolejnych graczy wokół stołu, począwszy od pewnego członka B, zauważamy, że w pewnym momencie musi nastąpić „przeskok” do A). Należy teraz wykazać implikacje przeciwną: jeśli takie rozbicie nie istnieje, to można graczy rozmieścić przy okrągłym stole.

W tym celu udowodnimy najpierw, że można niektórych spośród graczy rozmieścić przy okrągłym stole. Zauważmy bowiem, że w myśl nieistnienia rozbicia każdy gracz wygrał przynajmniej jeden mecz. Rozpocznijmy teraz od dowolnego gracza, następnie znajdźmy gracza, który z nim przegrał, później gracza, który przegrał z tym drugim itd.; w pewnym momencie dojdziemy do gracza, który wystąpił w tym łańcuszku już wcześniej — a wtedy można fragment owego łańcuszka rozpoczynający się od tego gracza rozmieścić przy stole.

Weźmy teraz pod uwagę takie rozmieszczenie graczy przy okrągłym stole, w którym liczba siedzących przy stole jest możliwie największa. Wystarczy zatem dowieść, że przy stole siedzą wszyscy gracze. Przypuśćmy w takim razie, iż tak nie jest.

Jeżeli któryś z graczy X poza stołem przegrał z pewnym siedzącym oraz wygrał z pewnym siedzącym, to można — tak jak w pierwszym akapicie rozwiązania — znaleźć takiego gracza siedzącego A oraz jego sąsiada z prawej strony B, że X przegrał z A oraz wygrał z B. Wtedy gracza X możemy usadzić pomiędzy A i B, co prowadzi do sprzeczności z maksymalnością dotychczasowego rozmieszczenia.

Zatem zbiór wszystkich graczy rozpada się na trzy zbiory: zbiór S siedzących przy stole, zbiór S_1 tych, którzy przegrali ze wszystkimi siedzącymi, oraz zbiór S_2 tych, którzy wygrali ze wszystkimi siedzącymi. Na mocy nieistnienia rozbicia zbiory S_1 i S_2 są niepuste. Gdyby każdy gracz z S_1 przegrał z każdym graczem z S_2, to otrzymalibyśmy niedopuszczalne rozbicie: na zbiory S_2 oraz $S \cup S_1$. Wobec tego istnieją gracze $X \in S_1$ oraz $Y \in S_2$, przy czym X wygrał z Y. Ponadto dowolny gracz przy stole wygrał z X oraz przegrał z Y. W tej sytuacji umieszczając graczy X i Y pomiędzy parę dowolnie wybranych graczy już siedzących uzyskujemy rozmieszczenie większej liczby graczy przy okrągłym stole, wbrew założonej wcześniej maksymalności. Teza została tym samym wykazana. □

10. W trójkącie ABC dwusieczna kąta BCA przecina okrąg opisany w punkcie $R \neq A$, symetralną odcinka BC w punkcie P oraz symetralną odcinka AC w punkcie Q. Punkty K i L są środkami boków odpowiednio BC i AC. Pokazać, że trójkąty RPK i RQL mają równe pola.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez $[\mathcal{F}]$ - pole figury $\mathcal{F}$. Zauważmy, że

$$\angle KPR = 180^\circ - \angle CPK = 90^\circ + \angle BCR = 180^\circ - \angle LQC = \angle RQL,$$

również

$$\angle RBP = \angle RBA + \angle ABP = \angle RCA + \angle ABP = \angle CBP + \angle QBP = \angle ABC = \angle ARC$$

a ponieważ $BR = RA$ oraz $\angle BPR = \angle RQA$ to trójkąty BPR i RQA są przystające. Zatem

$$\frac{[KPQ]}{[LQR]} = \frac{\frac{1}{2} \cdot KP \cdot PR \sin KPR}{\frac{1}{2} \cdot LQ \cdot QR \sin RQL} = \frac{KP \cdot PR}{LQ \cdot QR} = \frac{KP \cdot CQ}{LQ \cdot CP} = \frac{KP}{LQ} \cdot \frac{CQ}{KP} = 1,$$

gdzie po drodze skorzystaliśmy z powyższych spostrzeżeń oraz podobieństwa trójkątów KPC i CQL. □

11. Dany jest równoległobok $ABCD$ oraz punkt F leżący na odcinku CD. Punkty O_1, O_2 i O_3 są środkami okręgów opisanych na trójkątach ABF, BCF i ADF. Dowieść, że ortocentrum trójkąta $O_1O_2O_3$ leży na prostej AB.

Rozwiązanie:

Skorzystamy z dobrze znanego *lematu*:

Jeżeli punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC to obrazy punktu P w symetrii względem boków BC, CA i AB leżą na jednej prostej zawierającej ortocentrum trójkąta ABC.

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Pokażemy najpierw, że punkty F, O_1, O_2, O_3 leżą na jednym okręgu. Istotnie

$$\begin{aligned}\angle O_3FO_2 &= 180^\circ - \angle DFO_3 - \angle O_2FC = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - 2\angle DAF) - \frac{1}{2}(180^\circ - 2\angle CBF) \\ &= \angle DAF + \angle CBF = \angle AFB = 180^\circ - \angle O_2O_1O_3.\end{aligned} \tag{1}$$

Na podstawie *lematu* wystarczy jedynie pokazać, że odbicia punktu P względem boków trójkąta $O_1O_2O_3$ leżą na prostej AB, jednakże jest to oczywiste, gdyż proste O_3O_1 oraz O_2O_1 są symetralnymi odcinków odpowiednio AF i FB. □

12. Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg, którego przekątne przecinają się w punkcie E. Przedłużenia boków AD i BC wzdłuż punktów A i B przecinają się w punkcie F. Niech G będzie takim punktem, że czworokąt $ECGD$ jest równoległobokiem. Punkt H obrazem punktu E w symetrii względem prostej AD. Pokazać, że punkty D, H, F i G leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że czworokąty $AFBE$ oraz $DFCG$ są podobne, gdyż na czworokącie można opisać okrąg oraz czworokąt $DECG$ jest równoległobokiem, stąd $\angle DFG = \angle EFC$. Oznaczmy przez Z punkt przecięcia się prostych FG i EC, wówczas

$$\angle DHF = 180^\circ - \angle HFD - \angle FDH = 180^\circ - \angle DFE - \angle BDA = \angle GFC - \angle BCA = \angle GZC = 180^\circ - \angle FGD$$

co kończy dowód. □