III Liceum Ogólnokształcące im. Adama Mickiewicza w Tarnowie

Obóz przygotowawczy do Olimpiady Matematycznej

Krynica Zdrój 2017

Obóz Przygotowawczy do Olimpiady Matematycznej
Krynica Zdrój 2017

Ośrodek Wypoczynkowy "Józefa"
ul. Cicha 10, 33-380 Krynica-Zdrój
tel. 18 471 54 20

Skład tekstu:

Dominik Burek
Maciej Dziuba
Filip Gawron
Jakub Węgrecki

Wstęp

Niniejsza broszura zawiera wszystkie zadania z obozu wraz z rozwiązaniami.

Treści zadań

Zawody indywidualne grupy starszej

1. Dane są dodatnie liczby całkowite a, b, c, spełniające równość $a^2+b^2=c^2$. Wykazać, że liczba $\frac{1}{2}(c-a)(c-b)$ jest kwadratem liczby całkowitej.

2. W czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzi $AC=BD=AD$. Punkty K i N są środkami boków AB i CD, odpowiednio. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie P. Okrąg wpisany w trójkąt APD jest styczny do boków PA i PD w punktach odpowiednio L i M. Pokazać, że punkty K, L, M i N leżą na jednej prostej.

3. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ takie, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y zachodzi równość

$$f(xf(y))+f(f(x)+f(y))=yf(x)+f(x+f(y)).$$

4. *Słowem* nazwiemy ciąg liter alfabetu $\{a,b,c,d\}$. Powiemy, że słowo jest *skomplikowane*, gdy zawiera dwa sąsiednie bloki tych samych liter. Słowa *caab*, *baba* oraz *cababda* są skomplikowane, podczas gdy słowa *bacba* i *dcbdc* nie. Słowo, które nie jest skomplikowane nazwiemy *proste*. Pokazać, że liczba prostych słów n-literowych jest większa niż 2^n, gdzie n jest liczbą całkowitą dodatnią.

5. Dane są liczby rzeczywiste a, b i c takie, że

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqslant 2.$$

Pokazać, że

$$|a-b|+|b-c|+|c-a|\geqslant 2.$$

6. Liczby $1,2,\ldots,2017$ są wypisane na tablicy. W każdej sekundzie mażemy cztery liczby postaci a, b, c, $a+b+c$ i zastępujemy je liczbami $a+b$, $b+c$, $c+a$. Pokazać, że proces ten możemy kontynuować przez co najwyżej 9 minut.

7. Liczby całkowite dodatnie a i n są takie, że n dzieli a^2+1. Pokazać, że istnieje liczba całkowita dodatnia b taka, że $n(n^2+1)$ dzieli b^2+1.

8. Dany jest wielokąt wypukły $A_1A_2\dots A_n$, gdzie $n \geqslant 4$. Pokazać, że można na nim opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy dla $i = 1, 2, \dots, n$, każdemu wierzchołkowi A_i można przypisać parę liczb rzeczywistych (x_i, y_i) tak aby $A_iA_j = x_jy_i - x_iy_j$ dla dowolnych $1 \leqslant i < j \leqslant n$.

9. Wielomian $P(x)$ ma współczynniki całkowite. Udowodnić, że jeżeli wielomiany $P(x)$ oraz $P(P(P(x)))$ mają wspólny pierwiastek rzeczywisty, to mają także wspólny pierwiastek całkowity.

10. Dana jest liczba całkowita dodatnia n taka, że jest ona równa sumie $k \geqslant 3$ parami różnych dzielników liczby n. Niech p będzie najmniejszym dzielnikiem pierwszym liczby n. Pokazać, że

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} + \ldots + \frac{1}{p+k-1} \geqslant 1.$$

11. Niech $\mathcal{S}$ będzie skończonym zbiorem liczb całkowitych większych niż 1. Powiemy że podzbiór $A \subseteq \mathcal{S}$ jest *dobry* jeśli dla dowolnego $s \in \mathcal{S}$ znajdziemy $a \in A$ takie, że s i a nie są względnie pierwsze. Pokazać, że liczba dobrych podzbiorów jest nieparzysta.

12. W trójkącie ostrokątnym ABC odcinki AK i BL są wysokościami. Okrąg Ω jest okręgiem dopisanym do trójkąta ABC i stycznym do odcinka AB. Styczne wewnętrzne okręgów: opisanego na trójkącie CKL i Ω przecinają AB w punktach P i Q. Pokazać, że $AP = BQ$.

13. Dana jest tablica $m \times n$ wypełniona liczbami rzeczywistymi. Jeśli suma wszystkich liczb w rzędzie lub kolumnie jest ujemna, to zmieniamy znaki wszystkich liczb w ów rzędzie bądź kolumnie. Pokazać, że wykonując taką operację wielokrotnie otrzymamy tablice w której sumy liczb we wszystkich wierszach lub kolumnach są nieujemne.

14. W trójkącie ABC punkt D leży na odcinku BC. Prosta przechodząca przez punkt D przecina odcinek AB oraz półprostą $\overrightarrow{AC}$ w punktach X i Y, odpowiednio. Okrąg opisany na trójkącie BXD przecina okrąg ω opisany na trójkącie ABC w punkcie $Z \neq B$. Proste ZD i ZY przecinają ω w punktach V i W, odpowiednio. Pokazać, że $AB = VW$.

15. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p takie, że liczba

$$\frac{2^{p-1} - 1}{p}$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

16. Pokazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych nieujemnych a, b, c i d zachodzi nierówność

$$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)(c^2+d^2+a^2)(d^2+a^2+b^2) \leqslant \frac{1}{64}(a+b+c+d)^8.$$

Zawody indywidualne grupy młodszej

1. Dana jest liczba całkowita dodatnia $n > 1$. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste dodatnie x, które spełniają równanie:

$$(n-1) \cdot x^n + 1 = n \cdot x^{n-1}$$

2. W trójkącie ABC punkt S jest środkiem łuku BC okręgu opisanego, który zawiera punkt A. Punkt P leży wewnątrz odcinka AB. Okrąg opisany na trójkącie ASP przecina odcinek AC w punkcie Q. Pokazać, że $BP = CQ$.

3. Pokazać, że każdą liczbę całkowitą dodatnią można zapisać jako różnicę dwóch liczb całkowitych dodatnich, które mają taką samą liczbę dzielników pierwszych.

4. Na tablicy napisano słowo *abdc*. W jednym ruchu możemy dopisać lub usunąć (na początku, w środku lub na końcu) palindrom parzystej długości utworzony z liter a, b, c, d. Rozstrzygnąć, czy po skończonej liczbie ruchów możemy uzyskać słowo *bacd*.
(*Uwaga*: Palindromem nazywamy słowo, które czytane od lewej do prawej jest takie samo jak czytane od prawej do lewej, np. *abba*, *cc*, *daaaad*.)

5. W każdy wierzchołek ośmiościanu foremnego wpisano liczbę 0 lub 1 lub 2. Następnie na każdej ścianie napisano sumę liczb z wierzchołków, które wyznaczają tę ścianę. Pokazać, że na pewnych dwóch ścianach napisano tę samą liczbę.

6. Dane są dodatnie liczby wymierne a, b różne od 1. Wykazać, że jeśli liczba $\sqrt{ab} - \sqrt{a} - \sqrt{b} + 1$ jest wymierna to ab jest kwadratem liczby wymiernej.

7. Okręgi o_1, o_2 są styczne do prostej odpowiednio w punktach A, B, oraz przecinają się w punktach X, Y, przy czym X leży bliżej prostej AB niż Y. Prosta AX przecina okrąg o_2 w punkcie P różnym od X. Styczna do okręgu o_2 w punkcie P przecina prostą AB w punkcie Q. Wykazać, że $\sphericalangle XYB = \sphericalangle BYQ$.

8. Dana jest liczba pierwsza $p > 2$ oraz liczby całkowite dodatnie: $a_1, a_2, ..., a_p$ oraz $b_1, b_2, ..., b_p$. Wykazać, że isnieją takie różne liczby całkowite dodatnie i, j takie, że conajmniej jedna z liczb $a_i - a_j$, $b_i - b_j$, $a_ib_i - a_jb_j$ jest podzielna przez p.

9. W trapezie $ABCD$, M oraz N to środki podstaw AB oraz CD. Punkt P lezy na odcinku MN. Wykazać, że pola trójkątów APD oraz BPC są równe.

10. Udowodnić, że równanie

$$x^2 - 2y^2 = 17$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich.

11. Dany jest zbiór 2017 punktów na płaszczyźnie, które nie leżą na jednej prostej. W każdy punkt tego zbioru wpisujemy liczbę rzeczywistą, przy czym spełniony jest następujący warunek: na dowolnej prostej przechodzącej przez co najmniej dwa punkty zbioru suma wpisanych liczb jest równa 0. Udowodnić, że wszystkie wpisane liczby są równe 0.

12. Dane są liczby całkowite dodatnie n, m. Oznaczmy jako zbiór S zbiór wszystkich liczb, które można zapisać w postaci $mx^2 + ny^2$ dla pewnych x, y całkowitych dodatnich. Wykazać, że jeśli liczby całkowite dodatnie $p, q, r \in S$ to również iloczyn $p \cdot q \cdot r \in S$.

13. Wykazać, że dla żadnego k całkowitego dodatniego liczba 3^k nie jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych dodatnich.

14. Dane jest państwo A, w którym są miasta osdpowiednio: $a_1, a_2, ..., a_n$ oraz państwo B w którym są miasta $b_1, b_2, ..., b_n$. Pewne z miast $a_1, a_2, ..., a_n$ oraz $b_1, b_2, ..., b_n$ są połączone drogami, przy czym jeśli miasta a_i i a_j nie są połączone drogą, to miasta b_i i b_j są połączone drogą oraz jeśli miasta a_i i a_j są połączone drogą, to miasta b_i i b_j nie są połączone drogą. Wiadomo, że w państwie A istnieje miasto, z którego nie można dojechać do pewnego innego miasta z A. Udowodnić, że z każdego miasta w państwie B można dojechać do każdego innego miasta z B za pomocą dróg.

15. Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste x spełniające równość:

$$\frac{8^x + 27^x}{12^x + 18^x} = \frac{7}{6}$$

16. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, zaś ω jest okręgiem opisanym na tym trójkącie. Okrąg α styczny do odcinków AC, BC jest styczny do okręgu ω w punkcie D, a M jest środkiem łuku AB okręgu ω, na którym leży punkt C. Wykazać, że punkty D, I, M są współliniowe.

Mecz Matematyczny grupy młodszej

1. Rozważmy ciąg $a_n = |n(n+1) - 19|$. Dla dowolnego $n > 4$ wykazać, że: Jeśli dla każdego $k < n$ liczby a_k oraz a_n są względnie pierwsze to a_n jest liczbą pierwszą.

2. Wykazać, że równanie $3^k = n^2 + m^2 + 1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich.

3. Znaleźć wszystkie n całkowite dodatnie, takie że istnieją całkowite dodatnie a, b, c spełniające równość:

$$a^2 + b^2 + c^2 = n^2$$

4. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych a, b, c, d układ równań

$$\begin{cases} (b+c+d)^{2018} = 3a \\ (a+c+d)^{2018} = 3b \\ (a+b+d)^{2018} = 3c \\ (a+b+c)^{2018} = 3d \end{cases}$$

5. Dane są różne liczby rzeczywiste a, b, c, różne od 0 takie, że:

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$$

Wykazać, że $|abc| = 1$.

6. Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ spełniające dla dowolnych liczb rzeczywistych równanie:

$$f(x^2 + f(x)f(y)) = xf(x+y).$$

7. Ciąg $x_1, x_2, \ldots, x_k$ liczb całkowitych dodatnich nazwiemy $n-$*dobrym* jeśli $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ dla liczby całkowitej dodatniej n. Dla każdego ciągu $n-$*dobrego* rozpatrzmy iloczyn wszystkich x_i (np. dla $6-$*dobrego* ciągu $1, 2, 3$ taki iloczyn będzie wynosił 6). Niech $f(n)$ będzie największym spośród tych iloczynów. Obliczyć $f(n)$.

8. Danych jest n miast oraz $n-1$ dróg między nimi. Z każdego miasta można dojechać do każdego innego za pomocą danych dróg. Pewne $2k$ miast $(0 < k < \frac{n}{2})$ zostało pokolorowane na czerwono. Wykazać, że można tak dobrać w pary czerwone miasta, aby dla każda ścieżka łącząca miasta z danej pary przechodziła przez pewine, stałe miasto.

9. W trójkącie ABC odcinki AB, AC są średnicami okręgów ω i α. Wykazać, że istnieje okrąg styczny do okręgów ω i α, którego środek leży na odcinku BC.

10. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Prosta AI przecina prostą BC w punkcie D oraz okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie S różnym od A. Punkt K jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt DSB, a punkt L — w trójkąt DSC. Punkt P jest odbiciem symetrycznym punktu I względem prostej KL. Wykazać, że kąt BPC jest prosty.

11. Dany jest prostopadłościan $ABCDA'B'C'D'$. Niech α, β, γ będą kątami utworzonymi przez przekątną AC' z krawędziami AB, AD i AA'. Udowodnić, że:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma \leqslant \frac{3}{2}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$$

Mecz Matematyczny grupy starszej

1. Niech a, b, c będą takimi liczbami dodatnimi, że $abc = 1$. Wykaż, że

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leqslant 1.$$

2. Dane są parami różne liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots x_n$ o niezerowej sumie. Pokazać, że istnieją takie liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$, że $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i < 0$ oraz $\sum_{i=1}^{n} a_i x_{\pi(i)} > 0$ dla dowolnej permutacji π zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ różnej od identyczności.

3. Niech $r, a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ będą różnymi liczbami całkowitymi. Niech

$$(r - a_1)(r - a_2) \ldots (r - a_{2n}) = (-1)^n (n!)^2.$$

Wykaż, że

$$r = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n}}{2n}.$$

4. Dana jest liczba całkowita dodatnie n. Wykaż, że liczba $2^{3^n} + 1$ ma przynajmniej n różnych dzielników dających resztę 3 z dzielenia przez 8.

5. Niech $n \in \mathbb{N} \backslash \{0; 1\}$ i $\{f(1), f(2), \ldots, f(n)\}$ będzie permutacją $\{1, 2, \ldots, n\}$ taką, że $\{1^{f(1)}, 2^{f(2)}, \ldots, n^{f(n)}\}$ jest permutacją $\{1, 2, \ldots, n\}$ modulo n. Wykaż, że $n \in \mathbb{P} \cup 2\mathbb{P}$, gdzie $2\mathbb{P}$ to zbiór liczb pierwszych pomnożonych razy dwa.

6. Tablica 100×100 jest podzielona na kwadraty jednostkowe. W każdym kwadracie znajduje się strzałka wskazująca górę, dół, prawo albo lewo. Plansza otoczona jest murem z wyjątkiem prawego boku pola w prawym górnym rogu. Dzik znajduje się na jednym z tych kwadratów. W każdej sekundzie dzik rusza się jedno pole z kierunkiem zgodnym ze strzałką. Po wykonaniu ruchu strzałka obraca się o 90° w prawo. Jeśli wskazanego ruchu nie da się wykonać, to dzik stoi w miejscu a strzałka obraca się. Rozstrzygnąć, czy dzik zawsze może opuścić planszę.

7. Wykazać, że dla każdego n całkowitego dodatniego istnieje okrąg, który zawiera dokładnie n punktów kratowych.

8. Na płaszczyźnie dany jest wielokąt W o polu większym od n. Wykaż, że można tak przesunąć równolegle wielokąt W, że w jego wnętrzu znajdzie się co najmniej $n + 1$ punktów kratowych.

9. W trójkącie ABC punkt M jest środkiem boku BC. Prosta l jest prostopadła do AM. Proste przechodzące przez M prostopadłe do AB, AC przecinają l odpowiednio w punktach P, Q. Punkt N jest środkiem odcinka PQ. Wykaż, że $MN \perp BC$.

10. Dany jest trójkąt ABC, w którym I jest środkiem okręgu wpisanego.Oznaczmy przez Γ okrąg opisany na tym trójkącie. Niech prosta AI tnie Γ w puntach A, D. Niech E będzie punktem na łuku $\widehat{BDC}$ okręgu Γ oraz F leży na BC, przy czym $\sphericalangle BAF = \sphericalangle CAE < \frac{1}{2}\sphericalangle BAC$. Oznaczmy przez G środek odcinka IF. Wykaż, że proste EI oraz DG przecinają się na okręgu Γ.

11. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Oznaczmy przez M_1, M_2 środki odcinków odpowiednio BF, CE. Prosta l_A jest prostą przechodzącą przez punkt A oraz prostopadłą do M_1M_2. Proste l_B, l_C definiujemy analogicznie. Wykaż, że proste l_A, l_B, l_C przecinają się w jednym punkcie.

Zadania trudniejsze

1. Dany jest wielokąt wypukły $\mathcal{F} = A_1A_2\ldots A_n$. Dla dowolnego punktu P wewnątrz, punkty B_i to punkty przecięcia PA_i z obwodem $\mathcal{F}$. Wielokąt $\mathcal{F}$ nazwiemy *zbalansowanym*, jeśli dla pewnego punktu P wewnątrz wielokąta, punkty $B_1, B_2, \ldots, B_n$ leżą wewnątrz różnych boków $\mathcal{F}$. Rozstrzygnąć czy $\mathcal{F}$ jest zbalansowany dla

(a) parzystego n,

(b) nieparzystego n.

2. Wyznaczyć wszystkie wielomiany P o współczynnikach całkowitych o następującej własności: Dla dowolnych względnie pierwszych liczb całkowitych a i b ciąg $\{P(an+b)\}_{n\geqslant 1}$ zawiera nieskończenie wiele wyrazów takich, że każde dwa z nich są względnie pierwsze.

3. Rozstrzygnąć czy zbiór liczb całkowitych, które nie dają się przedstawić jako suma kwadratów różnych liczb całkowitych jest skończony.

4. Dane są liczby całkowite dodatnie $m \geqslant n$ oraz zbiór S wszystkich ciągów $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ takich, że $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = m$. Pokazać, że

$$\sum_{(a_1,a_2,\ldots a_n)\in S} 1^{a_1}2^{a_2}\cdots n^{a_n} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i}\binom{n}{i} i^m.$$

5. Dane są liczby rzeczywiste a, b, c i d takie, że

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1) = 16.$$

Pokazać, że

$$-3 \leqslant ab + bc + cd + da + ac + bd - abcd \leqslant 5.$$

6. Dany jest trójkąt ABC wpisany w elipsę o długości k. Pokazać, że $k \geqslant 4r$, gdzie r jest promieniem okręgu wpisanego w trójkąt ABC.

Uwaga: Elipsa o ogniskach F_1 i F_2 i długości k jest zbiorem punktów P takich, że $PF_1 + PF_2 = k$.

7. Pokazać, że dla dowolnego wielomianu P o współczynnikach rzeczywistych istnieje wielomian Q o współczynnikach rzeczywistych taki, że wielomian $P(x)^2 + Q(x)^2$ jest podzielny przez $(1+x^2)^{2017}$.

8. Punkt M leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC. Styczne do okręgu wpisanego w trójkąt ABC poprowadzone z punktu M przecinają prostą BC w punktach X_1 i X_2. Pokazać, przy zmieniającym się wyborze punktu M, okręgi opisane na trójkątach MX_1X_2 mają punkt wspólny.

9. Pokazać, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba całkowita n taka, że największy dzielnik pierwszy liczby $n^2 + 2017$ jest mniejszy niż εn.

Rozwiązania

Zawody indywidualne grupy starszej

1. Dane są dodatnie liczby całkowite a, b, c, spełniające równość $a^2+b^2=c^2$. Wykazać, że liczba $\frac{1}{2}(c-a)(c-b)$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$2(c-a)(c-b) = 2c^2 + 2ab - 2bc - 2ac = \\ = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ac = (a+b-c)^2, \tag{1}$$

więc

$$\frac{1}{2}(c-a)(c-b) = \left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2.$$

Pozostaje zauważyć, że $2 \mid a+b-c$, gdyż na podstawie (1) wiemy, że $2 \mid (a+b-c)^2$. □

2. W czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzi $AC = BD = AD$. Punkty K i N są środkami boków AB i CD, odpowiednio. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie P. Okrąg wpisany w trójkąt APD jest styczny do boków PA i PD w punktach odpowiednio L i M. Pokazać, że punkty K, L, M i N leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie:

Niech S będzie punktem styczności okręgu wpisanego w trójkąt APD z bokiem AD. Niech prosta LM przecina odcinek AB w punkcie K'. Stosując twierdzenie Menelaosa dla trójkąta APB przeciętego prostą LM mamy

$$\frac{BK'}{K'A} \cdot \frac{AL}{LP} \cdot \frac{PM}{MB} = 1.$$

Korzystając z równości odcinków stycznych i zależności danej w zadaniu dostajemy $BM = AS = AL$ oraz $PL = PM$. Wobec tego

$$\frac{BK'}{K'A} = \left(\frac{PM}{PL} \cdot \frac{AL}{MB}\right)^{-1} = 1,$$

więc $K = K'$. Analogicznie dowodzimy, że na prostej LM leży punkt N, skąd teza. □

3. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y zachodzi równość

$$f(xf(y)) + f(f(x) + f(y)) = yf(x) + f(x + f(y)).$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy wyjściowe równanie przez $(*)$. Zauważmy, że $f \equiv 0$ jest rozwiązaniem $(*)$. Załóżmy więc, że istnieje $c \in \mathbb{R}$ takie, że $f(c) \neq 0$.

Jeśli $f(a) = f(b)$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$, to podstawiając $(x, y) \mapsto (c, a)$ oraz $(x, y) \mapsto (c, b)$ w $(*)$ dostajemy zależności

$$f(cf(a)) + f(f(c) + f(a)) = af(c) + f(c + f(a))$$

$$f(cf(b)) + f(f(c) + f(b)) = bf(c) + f(c + f(b))$$

które po odjęciu stronami dają związek $f(c)(a - b) = 0$, skąd $a = b$, gdyż $f(c) \neq 0$. Zatem f jest injekcją.

Kładąc $(x, y) \mapsto (0, 1)$ w $(*)$ mamy $f(f(1) + f(0)) = f(f(1))$, więc z injektywności f widzimy, że $f(1) + f(0) = f(1)$, czyli $f(0) = 0$. Podstawiając teraz $y \mapsto 0$ w $(*)$ otrzymujemy zależność $f(f(x)) = f(x)$, która w połączeniu z injektywnością f implikuje, że $f(x) = x$, dla $x \in \mathbb{R}$.

Ostatecznie, jedynymi funkcjami spełniającymi warunki zadania są $f(x) = x$ oraz $f(x) = 0$. $\square$

4. *Słowem* nazwiemy ciąg liter alfabetu $\{a, b, c, d\}$. Powiemy, że słowo jest *skomplikowane*, gdy zawiera dwa sąsiednie bloki tych samych liter. Słowa *caab, baba* oraz *cababda* są skomplikowane, podczas gdy słowa *bacba* i *dcbdc* nie. Słowo, które nie jest skomplikowane nazwiemy *proste*. Pokazać, że liczba prostych słów n-literowych jest większa niż 2^n, gdzie n jest liczbą całkowitą dodatnią.

Rozwiązanie:

Niech S_n będzie zbiorem prostych n-literowych słów oraz $s_n := \#S_n$. Dodając każdą literę na koniec każdego słowa z S_n dostajemy zbiór T_{n+1} składający się z $(n+1)$-literowych słów taki, że $\#T_{n+1} = 4s_n$.

Jest jasne, że $S_{n+1} \subsetneq T_{n+1}$, jednakże zawieranie jest ostre, gdyż dodanie dodatkowej litery może skomplikować słowo. Stanie się tak, wtedy gdy w danym słowie istnieją dwa identyczne bloki k-literowe na końcu, dla $1 \leqslant k \leqslant m = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$.

Niech T_{n+1}^k oznacza zbiór tych słów które mają na końcu dwa identyczne k-literowe bloki. Mamy wtedy

$$s_{n+1} \geqslant \#T_{n+1} - \#T_{n+1}^1 - \#T_{n+1}^2 - \ldots - \#T_{n+1}^m.$$

Ponadto $\#T_{n+1}^1 = s_n$ oraz $\#T_{n+1}^k \leqslant s_{n+1-k}$, gdyż ostatnie k litery słów z T_{n+1}^k możemy usunąć dostając różne słowa proste o $n + 1 - k$ literach. Zatem

$$s_{n+1} \geqslant 3s_n - s_{n-1} - \ldots - s_{n+1-m}. \tag{2}$$

Aby otrzymać tezę zadania wystarczy pokazać, że $s_{n+1} > 2s_n$. Dla $n = 1$ nierówność jest prawdziwa, gdyż $s_1 = 4$, $s_2 = 12$. Zakładając prawdziwość dla n i wykorzystując nierówność (2) dostajemy

$$s_{n+1} \geqslant 3s_n - \frac{1}{2}s_n - \frac{1}{4}s_n - \ldots > 3s_n - s_n = 2s_n.$$

$\square$

5. Dane są liczby rzeczywiste a, b i c takie, że

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geqslant 2.$$

Pokazać, że

$$|a-b| + |b-c| + |c-a| \geqslant 2.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}(|a-b| + |b-c| + |c-a|)^2 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + \\ + 2(|a-b||b-c| + |b-c||c-a| + |c-a||a-b|).\end{aligned}$$

Wykorzystując nierówność $|x| \geqslant -x$, która zachodzi dla dowolnej liczby rzeczywistej x oraz warunki zadanie, stwierdzamy, że

$$\begin{aligned}&(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + 2(|a-b||b-c| + |b-c||c-a| + |c-a||a-b|) \geqslant \\ &\geqslant 2 + 2((a-b)(b-c) + (b-c)(c-a) + (c-a)(a-b)) = \\ &= 2 + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geqslant 4.\end{aligned}$$

Łącząc powyższe nierówności dostajemy tezę zadania. $\square$

6. Liczby $1, 2, \ldots, 2017$ są wypisane na tablicy. W każdej sekundzie mażemy cztery liczby postaci a, b, c, $a+b+c$ i zastępujemy je liczbami $a+b$, $b+c$, $c+a$. Pokazać, że proces ten możemy kontynuować przez co najwyżej 9 minut.

Rozwiązanie:

Na początku zauważmy, że w każdym ruchu liczba liczb na tablicy zmniejsza się o 1. Ponadto suma liczb się nie zmienia, gdyż

$$a + b + c + (a+b+c) = (a+b) + (b+c) + (c+a).$$

Równość

$$(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + (a+b+c)^2$$

pokazuje, że suma kwadratów również nie zmienia się podczas wykonywania ruchu. Wobec tego dla danej liczby naturalnej n, jeśli $a_1, a_2, \ldots, a_n$ oznaczają liczby, które są w pewnym momencie wypisane na tablicy, to

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1009 \cdot 2017, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \frac{1}{6} \cdot 2017 \cdot 2018 \cdot 4035.$$

Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza mamy

$$n \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2,$$

więc

$$n \geqslant \frac{(1009 \cdot 2017)^2}{\frac{1}{6} \cdot 2017 \cdot 2018 \cdot 4035} \approx 1513.$$

Oznacza to, że proces może być kontynuowany przez co najwyżej $2017 - 1513 = 504$ sekundy, czyli nie więcej niż 9 minut. □

7. Liczby całkowite dodatnie a i n są takie, że n dzieli $a^2 + 1$. Pokazać, że istnieje liczba całkowita dodatnia b taka, że $n(n^2+1)$ dzieli $b^2 + 1$.

Rozwiązanie:

Niech $b = (n^2 + 1)a + n$. Wówczas

$$b^2 + 1 = ((n^2+1)a + n)^2 + 1 \equiv a^2 + 1 \equiv 0 \pmod{n}$$

oraz

$$b^2 + 1 = ((n^2+1)a + n)^2 + 1 \equiv n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{n^2+1}.$$

Ponieważ n i $n^2 + 1$ są względnie pierwsze, to $n(n^2+1)$ dzieli b. □

8. Dany jest wielokąt wypukły $A_1 A_2 \ldots A_n$, gdzie $n \geqslant 4$. Pokazać, że można na nim opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy dla $i = 1, 2, \ldots, n$, każdemu wierzchołkowi A_i można przypisać parę liczb rzeczywistych (x_i, y_i) tak aby $A_i A_j = x_j y_i - x_i y_j$ dla dowolnych $1 \leqslant i < j \leqslant n$.

Rozwiązanie:

Załóżmy, że $A_1 A_2 \ldots A_n$ jest wpisany w okrąg o środku w punkcie O i promieniu R. Niech $\theta_i := \frac{1}{2} \sphericalangle A_i O A_1$ oraz $(b_i, c_i) := (\sqrt{2R} \sin\theta_i, \sqrt{2R}\cos\theta_i)$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Wówczas

$$b_j c_i - b_i c_j = 2R \sin\theta_j \cos\theta_i - 2R \sin\theta_i \cos\theta_j = 2R \sin(\theta_j - \theta_i) = A_i A_j$$

edvsbvdsvsd gdzie ostatnia równość wynika z faktu, iż $\theta_j - \theta_i$ jest połowa kąta opartego na łuku A_iA_j.

Pokażemy teraz przeciwną implikację dla czworokąta. Rozważmy czworokąt $A_1A_2A_3A_4$ wraz z przypisanymi parami liczb $(b_1, c_1), (b_2, c_2), (b_3, c_3), (b_4, c_4)$. Wówczas

$$\begin{aligned} A_1A_2 &= b_1c_2 - c_1b_2, \\ A_2A_3 &= b_2c_3 - c_2b_3, \\ A_3A_4 &= b_3c_4 - c_3b_4, \\ A_4A_1 &= b_1c_4 - c_1b_4, \\ A_2A_4 &= b_2c_4 - c_2b_4, \\ A_1A_3 &= b_1c_3 - c_1b_3, \end{aligned}$$

więc

$$\begin{aligned} & A_1A_2 \cdot A_3A_4 + A_2A_3 \cdot A_4A_1 = (b_1c_2 - c_1b_2)(b_3c_4 - c_3b_4)+ \\ & + (b_2c_3 - c_2b_3)(b_1c_4 - c_1b_4) = \\ & = b_1b_3c_2c_4 - b_1b_4c_2c_3 - b_2b_3c_1c_4 + b_2b_4c_1c_3+ \\ & + b_1b_2c_3c_4 - b_2b_4c_1c_3 - b_1b_3c_2c_4 + b_3b_4c_1c_2 = \\ & = -b_1b_4c_2c_3 - b_2b_3c_1c_4 + b_1b_2c_3c_4 + b_3b_4c_1c_2 = \\ & = (b_1c_3 - c_1b_3)(b_2c_4 - c_2b_4) = A_2A_4 \cdot A_1A_3. \end{aligned}$$

Wobec tego na podstawie twierdzenia Ptolemeusza wnioskujemy, że na czworokącie $A_1A_2A_3A_4$ można opisać okrąg. Powtarzając powyższe rozważania dla czworokątów $A_iA_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$ dostajemy cykliczność wielokąta $A_1A_2 \ldots A_n$. $\square$

9. Wielomian $P(x)$ ma współczynniki całkowite. Udowodnić, że jeżeli wielomiany $P(x)$ oraz $P(P(P(x)))$ mają wspólny pierwiastek rzeczywisty, to mają także wspólny pierwiastek całkowity.

Rozwiązanie:

Niech liczba rzeczywista x_0 będzie wspólnym pierwiastkiem wielomianów $P(x)$ i $P(P(P(x)))$. Z równości $P(x_0) = 0$ oraz $P(P(P(x_0))) = 0$ otrzymujemy $P(P(0)) = 0$. Liczba całkowita $m = P(0)$ spełnia zatem warunki $P(m) = P(P(0)) = 0$ oraz

$$P(P(P(m))) = P(P(P(P(0)))) = P(P(0)) = 0,$$

co oznacza, że m jest żądanym wspólnym pierwiastkiem całkowitym. $\square$

10. Dana jest liczba całkowita dodatnia n taka, że jest ona równa sumie $k \geqslant 3$ parami różnych dzielników liczby n. Niech p będzie najmniejszym dzielnikiem pierwszym liczby n. Pokazać, że

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} + \ldots + \frac{1}{p+k-1} \geqslant 1.$$

Rozwiązanie:

Niech $d_1 > d_2 > \ldots > d_k$ będą dzielnikami liczby n takimi, że $n = \sum_{i=1}^{k} d_i$. Ponieważ $d_1 < n$, to $\frac{n}{d_1} \geqslant p$. Jako, że $\frac{n}{d_1}, \frac{n}{d_2}, \ldots, \frac{n}{d_k}$ jest rosnącym ciągiem liczb całkowitym, to

$$\frac{n}{d_2} \geqslant p+1, \quad \frac{n}{d_3} \geqslant p+2, \quad \ldots, \quad \frac{n}{d_k} \geqslant p+k-1.$$

Wobec tego

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} + \ldots + \frac{1}{p+k-1} \geqslant \frac{d_1}{n} + \frac{d_2}{n} + \ldots + \frac{d_k}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

□

11. Niech $\mathcal{S}$ będzie skończonym zbiorem liczb całkowitych większych niż 1. Powiemy że podzbiór $A \subseteq \mathcal{S}$ jest *dobry* jeśli dla dowolnego $s \in \mathcal{S}$ znajdziemy $a \in A$ takie, że s i a nie są względnie pierwsze. Pokazać, że liczba dobrych podzbiorów jest nieparzysta.

Rozwiązanie:

Dla podzbioru $A \subseteq \mathcal{S}$, jego *kolcem* nazwiemy taką liczbę całkowitą zbioru $\mathcal{S}$, która jest względnie pierwsza z każdym elementem zbioru A. Zauważmy, że dobre podzbiory nie mają kolców. Przez $\kappa(A)$ oznaczymy zbiór wszystkich kolców A, w szczególności $\kappa(A) = \emptyset$ jeśli A jest zbiorem dobrym.

Dla dowolnych podzbiorów $A, B \subseteq \mathcal{S}$, parę uporządkowaną (A, B) nazwiemy *złą*, jeśli dla $(x, y) \in A \times B$ mamy $\mathrm{NWD}(x, y) = 1$. Liczba takich uporządkowanych par jest nieparzysta, gdyż jeśli para (A, B) jest zła to para (B, A) również oraz $(\emptyset, \emptyset)$ jest jedyną złą parą postaci (X, X).

Zauważmy, że dla podzbioru $X \subseteq \mathcal{S}$, liczba złych par postaci (X, A) jest równa $2^{\#\kappa(X)}$, gdyż (X, A) jest parą złą wtedy i tylko wtedy, gdy A jest podzbiorem wszystkich kolców X. Ponieważ $2^{\#\kappa(X)}$ jest nieparzyste wtedy i tylko wtedy, gdy X jest dobrym podzbiorem, to powyższe obserwacje implikują tezę zadania. □

12. W trójkącie ostrokątnym ABC odcinki AK i BL są wysokościami. Okrąg Ω jest okręgiem dopisanym do trójkąta ABC i stycznym do odcinka

AB. Styczne wewnętrzne okręgów: opisanego na trójkącie CKL i Ω przecinają AB w punktach P i Q. Pokazać, że $AP = BQ$.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez ω okrąg opisany na trójkącie CKL. Niech R będzie środkiem jednokładności wewnętrznej ω i Ω. Niech C_1, C_1' będą punktami styczności okręgów wpisanego w trójkąt ABC i okręgu wpisanego w trójkąt PQR, odpowiednio z prostą AB. Ponadto niech okrąg Ω jest styczna do AB w punkcie C_2 a punkt C_3 takim punktem Ω, że C_2C_3 jest średnicą Ω.

Punkty C, R, C_3 są współliniowe, gdyż średnica ω jest prostopadła do AB. Jednocześnie punkty C, C_1, C_3 również są współliniowe, gdyż C jest środkiem jednokładności przesyłającej okrąg wpisany w trójkąt ABC na Ω.

Analogicznie dostajemy, że punkty R, C_1', C_3 są współliniowe, więc $C_1' = C_1$. W szczególności środki odcinków AB, C_1C_2, $C_1'C_2$ i PQ się pokrywają (znany lemat), co implikuję tezę zadania. □

13. Dana jest tablica $m \times n$ wypełniona liczbami rzeczywistymi. Jeśli suma wszystkich liczb w rzędzie lub kolumnie jest ujemna, to zmieniamy znaki wszystkich liczb w ów rzędzie bądź kolumnie. Pokazać, że wykonując taką operację wielokrotnie otrzymamy tablice w której sumy liczb we wszystkich wierszach lub kolumnach są nieujemne.

Rozwiązanie:

Niech S będzie sumą wszystkich liczb na tablicy. Zauważmy, że podczas opisanej procedury dowolna liczby w polu tablicy pozostaje taka sama lub jest zamieniona na liczbę przeciwną. Wobec tego istnieje co najwyżej 2^{mn} możliwych tabel do otrzymania.

Rozpatrzmy teraz dowolną prostą (wiersz lub kolumnę), w której suma liczb jest ujemna. Jeśli takie nie istnieją, wówczas otrzymaliśmy tablicę spełniającą warunki zadania. W przeciwnym wypadku wykonując operację zwiększamy sumę S. Ponieważ S przyjmuję tylko skończenie wiele wartości, to S możemy zwiększać tylko skończenie wiele razy. Wobec tego iterując proces musimy otrzymać tablicę w której suma liczb w każdej prostej jest nieujemna. □

14. W trójkącie ABC punkt D leży na odcinku BC. Prosta przechodząca przez punkt D przecina odcinek AB oraz półprostą $\overrightarrow{AC}$ w punktach X i Y, odpowiednio. Okrąg opisany na trójkącie BXD przecina okrąg ω opisany na trójkącie ABC w punkcie $Z \neq B$. Proste ZD i ZY przecinają ω w punktach V i W, odpowiednio. Pokazać, że $AB = VW$.

Rozwiązanie:

Punkt Z jest punktem Miquela czworokąta zupełnego $AXDC$, więc leży na okręgu opisanym na trójkącie CDY. Wobec tego

$$\sphericalangle WZV = \sphericalangle 180^\circ - \sphericalangle DZY = \sphericalangle DCY = 180^\circ - \sphericalangle ACB,$$

więc cięciwy AB i VW okręgu ω wyznaczają równe łuki, stąd teza zadania. $\square$

15. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p takie, że liczba

$$\frac{2^{p-1}-1}{p}$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie:

Załóżmy, że

$$\frac{2^{p-1}-1}{p} = n^2,$$

gdzie n jest liczbą całkowitą. Wówczas

$$2^{p-1}-1 = \left(2^{\frac{p-1}{2}}+1\right)\left(2^{\frac{p-1}{2}}-1\right) = pn^2. \tag{3}$$

Ponieważ

$$\mathrm{NWD}\left(2^{\frac{p-1}{2}}+1, 2^{\frac{p-1}{2}}-1\right) = 1,$$

to z równości (3) wynika, że jedna z liczb $2^{\frac{p-1}{2}}+1$, $2^{\frac{p-1}{2}}-1$ jest równa $p^e a^2$ a druga b^2, gdzie a, b i e są liczbami całkowitymi nieparzystymi.

Załóżmy, że

$$2^{\frac{p-1}{2}}+1 = b^2 = (2x+1)^2$$

dla pewnej liczby całkowitej x, wówczas mamy równość

$$2^{\frac{p-1}{2}} = 4x(x-1).$$

Iloczyn $x(x+1)$ jest potęgą dwójki wtedy i tylko wtedy, gdy $x=1$, zatem $2^{\frac{p-1}{2}} = 8 = 2^3$, więc $\frac{p-1}{2} = 3$, stąd $p=7$.

Jeśli

$$2^{\frac{p-1}{2}}-1 = b^2 = (2x+1)^2,$$

to

$$2^{\frac{p-1}{2}} = 2(2x^2+2x+1).$$

Ponieważ $2x^2+2x+1$ jest liczbą nieparzystą, więc musi być równa 1, stąd $x=0$. Zatem $2^{\frac{p-1}{2}} = -1 = 1$, więc $\frac{p-1}{2} = 1$, czyli $p=3$.

Ostatecznie jedynymi liczbami pierwszymi spełniającymi warunki zadania są $p=3,7$. $\square$

16. Pokazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych nieujemnych a, b, c i d zachodzi nierówność

$$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)(c^2+d^2+a^2)(d^2+a^2+b^2) \leqslant \frac{1}{64}(a+b+c+d)^8.$$

Rozwiązanie:
Załóżmy bez szkody, że $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$ i niech

$$f(a,b,c,d) := (a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)(c^2+d^2+a^2)(d^2+a^2+b^2).$$

Zauważmy, że zachodzą następujące nierówności

$$\begin{aligned}
a^2+b^2+c^2 &\leqslant \left(a+\frac{c+d}{2}\right)^2+\left(b+\frac{c+d}{2}\right)^2\\
b^2+c^2+d^2 &\leqslant \left(b+\frac{c+d}{2}\right)^2,\\
c^2+d^2+a^2 &\leqslant \left(a+\frac{c+d}{2}\right)^2+\left(b+\frac{c+d}{2}\right)^2,\\
d^2+a^2+b^2 &\leqslant \left(a+\frac{c+d}{2}\right)^2,
\end{aligned}$$

więc

$$f(a,b,c,d) \leqslant f\left(a+\frac{c+d}{2}, b+\frac{c+d}{2}, 0, 0\right).$$

Niech $x = a+\dfrac{c+d}{2}$, $y = b+\dfrac{c+d}{2}$, wtedy $x+y = a+b+c+d$ zatem wystarczy pokazać nierówność

$$(x^2+y^2)^2x^2y^2 \leqslant \frac{1}{64}(x+y)^8.$$

Na podstawie nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną mamy

$$(x^2+y^2)xy = \frac{1}{2}(x^2+y^2)2xy \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+y^2+2xy}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}(x+y)^4.$$

$\square$

Zawody indywidualne grupy młodszej

1. Dana jest liczba całkowita dodatnia $n > 1$. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste dodatnie x, które spełniają równanie:

$$(n-1) \cdot x^n + 1 = n \cdot x^{n-1}$$

Rozwiązanie:

Korzystając z nierówności między średnimi otrzymujemy:

$$(n-1) \cdot x^n + 1 \geqslant n \cdot \sqrt[n]{x^{n(n-1)}} = n \cdot x^{n-1}$$

Przy czym równość zachodzi tylko gdy wszystkie te liczby są równe, czyli $x^n = 1$. Zauważmy, że w liczbach rzeczywistych dodatnich to równanie ma tylko jedno rozwiązanie $x = 1$. Jedyną liczbą x spełniającą równanie jest $x = 1$. $\square$

2. W trójkącie ABC punkt S jest środkiem łuku BC okręgu opisanego, który zawiera punkt A. Punkt P leży wewnątrz odcinka AB. Okrąg opisany na trójkącie ASP przecina odcinek AC w punkcie Q. Pokazać, że $BP = CQ$.

Rozwiązanie:

Aby udowodnić tezę, wykażemy przystawanie trójkątów PSB oraz SQC. Zauważmy, że $\sphericalangle QCS = \sphericalangle SBP$, bo $ASCB$ jest cykliczny. Ponadto $\sphericalangle SPA = \sphericalangle AQS$, bo $ASQP$ jest cykliczny. A zatem $\sphericalangle SPB = \sphericalangle SQC$, bo są to kąty przyległe do $\sphericalangle SPA$ i $\sphericalangle AQS$. Czyli SCQ i SPB mają dokładnie te same kąty, czyli są podobne. Ale $SB = SC$, gdyż S to środek łuku, czyli są podobne w skali 1, czyli są przystające, co kończy dowód. $\square$

3. Pokazać, że każdą liczbę całkowitą dodatnią można zapisać jako różnicę dwóch liczb całkowitych dodatnich, które mają taką samą liczbę dzielników pierwszych.

Rozwiązanie:

Rozpatrzmy dwa przypadki. Załóżmy, że n - nasza liczba jest parzysta. Wówczas $2n - n = n$, i skoro $2|n$ to n oraz $2n$ mają tyle samo dzielników pierwszych (są to dokładnie te same dzielniki). Przypuśćmy więc, że n jest nieparzyste. Niech p będzie najmniejszą liczbą pierwszą, która nie dzieli n większą od 2. Wówczas: $pn-(p-1)n = n$. Niech $L(x)$ to liczba dzielników pierwszych x. Zatem skoro p nie dzieli n to $L(np) = L(n)+1$. Zapiszmy $p-1 = 2^r \cdot m$. Skoro $m < p$ to dowolny dzielnik pierwszy m dzieli też n, co wynika z definicji p, zatem, skoro n jest nieparzyste, dostajemy, żę $L(2^r \cdot m \cdot n) = L(n) + 1 = L(np)$ co kończy dowód. $\square$

4. Na tablicy napisano słowo *abdc*. W jednym ruchu możemy dopisać lub usunąć (na początku, w środku lub na końcu) palindrom parzystej długości utworzony z liter a, b, c, d. Rozstrzygnąć, czy po skończonej liczbie ruchów możemy uzyskać słowo *bacd*.
(*Uwaga*: Palindromem nazywamy słowo, które czytane od lewej do prawej jest takie samo jak czytane od prawej do lewej, np. *abba*, *cc*, *daaaad*.)

Rozwiązanie:

Niech $P(\omega)$ oznacza ilość liter a, które znajdują się na parzystej pozycji w słowie ω oraz $N(\omega)$ oznacza ilość liter a, które znajdują się na nieparzystej pozycji w słowie ω. Niech $R(\omega) = P(\omega) - N(\omega)$. Zauważmy, że jeśli k jest palindromem parzystej długości, to $P(k) = N(k)$, gdyż dla każdej litery a która znajduje się na pozycji $x < n$, gdzie $2n$ to długość palindromu, musi się znajdować litera a na pozycji $2n+1-x$. x oraz $2n+1-x$ mają różną parzystość więc faktycznie $N(k) = P(k)$ Ponadto po dodaniu lub odjęciu od słowa ω parzystego palindromu, w środku, na początku lub na końcu, nie zmienia wartości $N(\omega)$ oraz $P(\omega)$ gdyż każda pozycja albo się nie zmienia, albo zostaje przesunięta o długość palindromu (czyli liczbę parzystą). Zatem po wykonaniu operacji $R(\alpha) = P(\alpha) - N(\alpha) = P(\omega) + P(k) - N(\omega) - N(k) = P(\omega) - N(\omega) = R(\omega)$. Wystarczy zauważyć, że wartościu $R(abdc)$ i $R(bacd)$ są różne, więc za pomocą operacji, nie można otrzymać odpowiedniego słowa, co kończy rozwiązanie zadania. $\square$

5. W każdy wierzchołek ośmiościanu foremnego wpisano liczbę 0 lub 1 lub 2. Następnie na każdej ścianie napisano sumę liczb z wierzchołków, które wyznaczają tę ścianę. Pokazać, że na pewnych dwóch ścianach napisano tę samą liczbę. *Rozwiązanie:*

Każda ściana ośmiościanu foremnego jest trójkątem. Zatem maksymalna liczba napisana na ścianie wynosi 6. Minimalna wynosi 0. Zatem mamy 7 możliwych liczb na ścianach oraz 8 ścian zatem na mocy zasady szyfladkowej Dirichleta, pewne dwie ściany mają taką samą liczbę. $\square$

6. Dane są dodatnie liczby wymierne a, b różne od 1. Wykazać, że jeśli liczba $\sqrt{ab} - \sqrt{a} - \sqrt{b} + 1$ jest wymierna to ab jest kwadratem liczby wymiernej.

Rozwiązanie:

Niech $s = \sqrt{ab} - \sqrt{a} - \sqrt{b} + 1$. Zauważmy, że $s = (\sqrt{a} - 1)(\sqrt{b} - 1)$. Wynika z tego, że s nie jest równe 0. Zatem liczba $\frac{(a-1)(b-1)}{s} = \sqrt{ab} + \sqrt{a} + \sqrt{b} + 1$ jest wymierna. Czyli $\frac{(a-1)(b-1)}{s} + s = 2(\sqrt{ab} + 1)$ jest wymierne, czyli $\sqrt{ab} + 1$ jest wymierne, czyli $\sqrt{ab}$ jest wymierne, czyli teza. $\square$

7. Okręgi o_1, o_2 są styczne do prostej odpowiednio w punktach A, B, oraz przecinają się w punktach X, Y, przy czym X leży bliżej prostej AB niż Y. Prosta AX przecina okrąg o_2 w punkcie P różnym od X. Styczna do okręgu o_2 w punkcie P przecina prostą AB w punkcie Q. Wykazać, że $\sphericalangle XYB = \sphericalangle BYQ$.

Rozwiązanie:

Niech $\sphericalangle XBA = \alpha, \sphericalangle XAB = \beta, \sphericalangle YAX = x$. Wówczas, skoro AB jest styczną do obu okręgów to $\sphericalangle AYX = \beta, \sphericalangle XYB = \alpha, \sphericalangle APB = \alpha$. Ponadto $\sphericalangle BXP = \alpha + \beta = \sphericalangle BYB$. Skoro AB i QB to styczne, to $\sphericalangle PBQ = \sphericalangle BPQ = \alpha + \beta$. Ponadto suma kątów w trójkącie wynosi 180, czyli $\sphericalangle YPA = 180 - 2\alpha - 2\beta - x$. Zauważmy, że $\sphericalangle YPQ + \sphericalangle YAQ = 180$, czyli $AQPY$ to czworokąt cykliczny, czyli $\sphericalangle AYQ = \sphericalangle APQ$, ale $\sphericalangle AYB = \alpha + \beta$, czyli $\sphericalangle BYQ = \alpha$, co było do pokazania. $\square$

8. Dana jest liczba pierwsza $p > 2$ oraz liczby całkowite dodatnie: $a_1, a_2, ..., a_p$ oraz $b_1, b_2, ..., b_p$. Wykazać, że isnieją takie różne liczby całkowite dodatnie i, j takie, że conajmniej jedna z liczb $a_i - a_j$, $b_i - b_j$, $a_ib_i - a_jb_j$ jest podzielna przez p.

Rozwiązanie:

Jeśli jakaś reszta modulo p się powtarza wśród liczb $a_1, a_2, ..., a_p$ to istnieją i oraz j z zadania, bo ich różnica wtedy daje resztę 0. Przypuśćmy zatem, że wszystkie reszty są różne. Analogicznie wszystkie reszty są różne wśród liczb $b_1, b_2, ..., b_p$. W obu tych ciągach występuje reszta 0. Jeśli $a_i \equiv 0$ oraz $b_j \equiv 0$ oraz i jest różne od j to $a_ib_i - a_jb_j \equiv 0 - 0 = 0$, czyli koniec dowodu. Przypuśćmy więc, że $i = j$. Bez straty ogólności $a_p \equiv b_p \equiv 0 \pmod{p}$. Zatem przypuśćmy, ze wśród liczb postaci a_ib_i każda ma różną resztę, bo jeśli dwie mają taką samą, to koniec zadania. Skoro tak, to rozpatrzmy iloczyn

$$S = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{p-1} \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot ... \cdot b_{p-1} = \equiv (p-1)! \cdot (p-1)! \equiv (-1)^2 \equiv 1$$

gdyż wszystkie reszty a_i są różne oraz wszystkie b_i są różne. Ostatnia równość wynika z Twierdzenia Wilsona. Z drugiej strony

$$S = a_1b_1 \cdot a_2b_2 \cdot ... \cdot a_{p-1}b_{p-1} \equiv (p-1)! \equiv -1$$

Gdyż wszystkie reszty a_ib_i są różne. To nam daje: $S \equiv 1 \equiv -1 \pmod{p}$, czyli $2 \equiv 0$, czyli $p|2$, czyli $p = 2$, co jest sprzeczne. Otrzymana sprzeczność kończy dowód. $\square$

9. W trapezie $ABCD$, M oraz N to środki podstaw AB oraz CD. Punkt P leży na odcinku MN. Wykazać, że pola trójkątów APD oraz BPC są równe.
Rozwiązanie:

Ze wzoru na pole trapezu wynika, że trapezy $AMND$ i $BMNC$ mają równe pola. Zauważmy, że trójkąty NPD i PNC mają równe pola, bo mają wspólną wysokość i ich podstawy są równe. Analogicznie AMP i BMP mają równe pola. Czyli po odjęciu stronami dostajemy, że pola ADP i PBC są równe. $\square$

10. Udowodnić, że równanie

$$x^2 - 2y^2 = 17$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że $5^2 - 2 \cdot 2^2 = 17$. Zatem istnieje przynajmniej jedno rozwiązanie. Przypuśćmy teraz, że liczba rozwiązań jest skończona. Weźmy sobie to rozwiązanie z największym x. Wówczas $x^2 - 2y^2 = 17$. Zauważmy, że $(3x+4y)^2 - 2\cdot(2x+3y) = 9x^2+16y^2+24xy-8x^2-18y^2-24xy = x^2-2y^2 = 17$. Ale $3x+4y > x$, zatem znaleźliśmy rozwiązanie z większym x od największego x. Czyli sprzeczność, zatem liczba rozwiązań tego równania jest nieskończona.

11. Dany jest zbiór 2017 punktów na płaszczyźnie, które nie leżą na jednej prostej. W każdy punkt tego zbioru wpisujemy liczbę rzeczywistą, przy czym spełniony jest następujący warunek: na dowolnej prostej przechodzącej przez co najmniej dwa punkty zbioru suma wpisanych liczb jest równa 0. Udowodnić, że wszystkie wpisane liczby są równe 0.

Rozwiązanie:

Przypuśćmy, że istnieje punkt, w który wpisano liczbę dodatnią x. Wówczas rozpatrzmy wszystkie proste przechodzące przez ten punkt, takie które przechodzą też przez jakiś inny punkt z tego zbioru. Zauważmy, że każdy z pozostałych punktów leży na dokładnie jednej takiej prostej. Suma punktów na każdej z tych prostych wynosi 0, A zatem suma punktów wszystkich punktów s wynosi $s = -x \cdot a + x$, gdzie a to liczba tych prostych. Z warunków zadania $a > 1$, czyli $s < -2x + x = -x < 0$. Czyli suma wszystkich liczb jest ujemna.

Przypuśćmy, że istnieje punkt, w który wpisano liczbę ujemną $-y$. Wówczas analogicznie dowiedziemy, że suma wszystkich punktów $s > y > 0$, czyli jest dodatnia.

Zauważmy, że jeśli na płaszczyźnie istnieje punkt taki, że wpisano w niego liczbę dodatnią, to musi istnieć punkt, w który wpisano liczbę ujemną (i odwrotnie). A to implikuje, że $s > 0$ i równocześnie $s < 0$ (z powyższych rozważań), a zatem sprzeczność.

Czyli nie istnieje punkt, w który wpisano liczbe dodatnią, ani ujemną, czyli w każdy punkt wpisano 0, co było do pokazania. $\square$

12. Dane są liczby całkowite dodatnie n, m. Oznaczmy jako zbiór S zbiór wszystkich liczb, które można zapisać w postaci $mx^2 + ny^2$ dla pewnych x, y całkowitych dodatnich. Wykazać, że jeśli liczby całkowite dodatnie $p, q, r \in S$ to również iloczyn $p \cdot q \cdot r \in S$.

Rozwiązanie:

Niech $p = mA^2 + nB^2, q = mC^2 + nD^2, r = mE^2 + nF^2$. Rozpiszmy sobie wyrażenie:

$$pqr = (mA^2+nB^2)(mC^2+nD^2)r = (m^2A^2C^2+mnA^2D^2+mnB^2C^2+n^2B^2D^2)\cdot r =$$

$$= (m^2A^2C^2+mnA^2D^2+mnB^2C^2+n^2B^2D^2+2mnABCD-2mnABCD)\cdot r =$$

$$= ((mAC - nBD)^2 + mn \cdot (AD + BC)^2) \cdot r$$

Niech $X = mAC - nBD$, $Y = AD + BC$. Z definicji m, n, A, B, C, D są całkowite, a więc X, Y też są całkowite.
Zatem:

$$pqr = (X^2 + mnY^2) \cdot r = (X^2 + mnY^2)(mE^2 + nF^2) =$$

$$= mE^2X^2 + m^2nY^2E^2 + nF^2X^2 + n^2mY^2F^2 =$$

$$= mE^2X^2 + m^2nY^2E^2 + nF^2X^2 + n^2mY^2F^2 + 2mnXYEF - 2mnXYEF =$$

$$= m(EX - nYF)^2 + n(FX + mYE)^2$$

Zauważmy, że skoro n, m, E, F, X, Y są całkowite, to $EX - nYF$ oraz $FX + mYE$ też są całkowite. Czyli $pqr \in S$. $\square$

13. Wykazać, że dla żadnego k całkowitego dodatniego liczba 3^k nie jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych dodatnich.

Rozwiązanie:

Weźmy najmniejsze k takie, że $3^k = a^2 + b^2$. Z przeliczenia kongruencji, wynika, że $3|a$ oraz $3|b$ czyli $3^k = 9x^2 + 9y^2$, czyli $3^{k-2} = x^2 + y^2$, ale $k - 2 < k$ czyli sprzeczność. Przypadki, gdy $k = 1$ lub $k = 2$ są trywialne. $\square$

14. Dane jest państwo A, w którym są miasta osdpowiednio: $a_1, a_2, ..., a_n$ oraz państwo B w którym są miasta $b_1, b_2, ..., b_n$. Pewne z miast $a_1, a_2, ..., a_n$ oraz $b_1, b_2, ..., b_n$ są połączone drogami, przy czym jeśli miasta a_i i a_j nie są połączone drogą, to miasta b_i i b_j są połączone drogą oraz jeśli miasta a_i i a_j

są połączone drogą, to miasta b_i i b_j nie są połączone drogą. Wiadomo, że w państwie A istnieje miasto, z którego nie można dojechać do pewnego innego miasta z A. Udowodnić, że z każdego miasta w państwie B można dojechać do każdego innego miasta z B za pomocą dróg.

Rozwiązanie:

W języku teorii grafów, mamy graf A, oraz graf B, który jest dopełnieniem A. Wiemy też, że graf A jest niespójny. Zatem ma więcej niż jedną składową. Niech wierzchołki a_x, a_y będą należeć do jednej składowej, a a_w do innej. Skoro tak to istnieje krawędź między b_y oraz b_w. Istnieje także krawędź między b_x a b_w, z założeń zadania. Więc między wierzchołkami b_x, b_y istnieje ścieżka. Z dowolności a_w poza składową oraz dowolności pary a_x, a_y w obrębie jednej składowej dostajemy, że graf B jest spójny, co było do udowodnienia. □

15. Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste x spełniające równość:

$$\frac{8^x + 27^x}{12^x + 18^x} = \frac{7}{6}$$

Rozwiązanie:

Niech $a = 2^x$ oraz $b = 3^x$. Wówczas:

$$6(a^3 + b^3) = 7ab(a + b)$$

czyli

$$6(a + b)(a^2 + b^2 - ab) = 7(a + b)ab$$

ale skoro $a + b$ jest różne od 0 to:

$$6a^2 + 6b^2 - 13ab = 0$$

co daje

$$(3a - 2b)(2a - 3b) = 0$$

co nam daje dwa przypadki, $3a = 2b$ oraz $2a = 3b$. Co daje $x = 1$ lub $x = -1$. Sprawdzamy i widzimy, że obie te liczby spełniają równanie. □

16. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, zaś ω jest okręgiem opisanym na tym trójkącie. Okrąg α styczny do odcinków AC, BC jest styczny do okręgu ω w punkcie D, a M jest środkiem łuku AB okręgu ω, na którym leży punkt C. Wykazać, że punkty D, I, M są współliniowe.

Rozwiązanie:

Niech α jest styczny do AC w X oraz do BC w Y. Wykażemy najpierw, że I leży na odcinku XY. Niech DX przecina ω w K oraz DY przecina ω w L. Rozpatrzmy styczną l do ω w punkcie K.

Jednokładność, która przeprowadza α w ω o środku w punkcie D przekształca AC na prostą l, zatem l jest równoległa do AC. Niech C_1 będzie przecięciem prostej l oraz CD. Wówczas $\sphericalangle C_1KC = \sphericalangle KCA = \sphericalangle KDA$, ale $\sphericalangle C_1KC = \sphericalangle CDK$, czyli DK to dwusieczna kąta CDA, czyli K to środek łuku CA. Analogicznie L to środek łuku CB, czyli AL, BK to dwusieczne trójkąta ABC, czyli ich przecięcie to I. Z Twierdzenia Pascala dla sześciokąta $LACBKD$ mamy, że X, I, Y są współliniowe.

Niech przecięcie DM oraz XY to P. Wykażemy, że $P = I$. Niech $\sphericalangle MAC = x$, $\sphericalangle MAP = y$, $\sphericalangle PAB = a$. Z założeń zadania $MA = MB$ oraz $ADBMC$ jest cykliczny, czyli $\sphericalangle CBM = x$ oraz $\sphericalangle CBA = y + a - x$. Skoro X, Y to punkty styczności to $CX = CY$, ale skoro $\sphericalangle XCY = 180 - 2a - 2y$ to $\sphericalangle CXY = a + y$. Ponadto $\sphericalangle ADM = \sphericalangle ABM = a + y$ bo są oparte na tym samym łuku. Czyli $XPDA$ jest cykliczny. Analogicznie $PYBD$ jest cykliczny. Niech $\sphericalangle APD = c$, $\sphericalangle DPB = d$. Wówczas: $\sphericalangle AXD = c$, $\sphericalangle DYB = d$, czyli $\sphericalangle YXD = c$. Czyli $c + d + a + y = 180$, czyli $c + d = 180 - a - y$, czyli $\sphericalangle APB = 180 - a - y$.

Obliczmy teraz $\sphericalangle AIB$. $\sphericalangle IAB = \frac{x+y+a}{2}$ oraz $\sphericalangle IBA = \frac{a+y-x}{2}$, czyli sumując do 180 mamy: $\sphericalangle AIB = 180 - a - y$. Czyli $AIPB$ jest cykliczny. Zauważmy, że $\sphericalangle XIA = \frac{a+y-x}{2} = \sphericalangle IBA$, gdyż suma kątów w $IXA = 180$. Z tego wynika, że XY jest styczną do okręgu opisanego na $AIPB$, ale przecina ten okrąg w dwóch punktach, czyli $P = I$, co kończy dowód. $\square$

Mecz Matematyczny grupy młodszej

1. Rozważmy ciąg $a_n = |n(n+1) - 19|$. Dla dowolnego $n > 4$ wykazać, że: Jeśli dla każdego $k < n$ liczby a_k oraz a_n są względnie pierwsze to a_n jest liczbą pierwszą.

Rozwiązanie:

Pokażemy, że jeśli a_n jest złożona to istnieje taka liczba $r < n$, że $NWD(a_r, a_n) > 1$. Dowolna liczba złożona ma dzielnik d mniejszy lub równy pierwiastkowi z tej liczby. Wówczas skoro a_n jest złożone, to istnieje $d|a_n$ takie, że $d \leqslant \sqrt{a_n}$. Zauważmy, że $\sqrt{a_n} < n+1$, czyli $d \leqslant n$. Niech $n = dk + r$, gdzie r to reszta z dzielenia n przez d. Oczywiście $a_r \equiv a_n \pmod{d}$. A zatem skoro $d|a_n$ to $d|a_r$ czyli $NWD(a_n, a_r) \geqslant d > 1$ co kończy dowód.

2. Wykazać, że równanie $3^k = n^2 + m^2 + 1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich. *Rozwiązanie:*

Udowodnimy indukcyjnie, że dla $k = 2^x$ istnieją liczby n, m spełniające warunki zadania. Będzie to równoważne tezie. Dla $x = 1$ mamy $3^2 = 2^2 + 2^2 + 1$. Rozpatrzmy równanie

$$3^{2^{x+1}} - 1 = (3^{2^x} - 1)(3^{2^x} + 1)$$

Na mocy założenia indukcyjnego: $3^{2^x} - 1 = n^2 + m^2$, czyli

$$3^{2^{x+1}} - 1 = (3^{2^x} - 1)(3^{2^x} + 1) = (n^2 + m^2)((3^{2^{x-1}})^2 + 1^2)$$

Na mocy Tożsamości Diofantosa, takie wyrażenie jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych dodatnich, czyli teza.

3. Znaleźć wszystkie n całkowite dodatnie, takie że istnieją całkowite dodatnie a, b, c spełniające równość:

$$a^2 + b^2 + c^2 = n^2$$

Rozwiązanie:

Wykażemy, że jeśli n nie jest postaci 2^k lub $5 \cdot 2^k$ to spełnia warunki zadania. Udowodnimy najpierw, że liczby tej postaci nie spełniają warunków zadania. $n = 1$ oraz $n = 5$ to trywialne przypadki. Rozważając równanie $a^2 + b^2 + c^2 = n^2$ modulo 4, gdzie n jest równe 2^k lub $5 \cdot 2^k$ otrzymujemy, że wszystkie liczby

a, b, c muszą być parzyste. Wykonując podstawienie i skracając cały czas przez 2 dostajemy że istnieją a, b, c całkowite dodatnie takie, że $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ lub $a^2 + b^2 + c + 2 = 5$, czyli sprzeczność. Wystarczy więc wykazać, że wszystkie pozostałe liczby spełniają warunki zadania. Skoro n nie jest formy $5 \cdot 2^k$ ani 2^k to albo ma dzielnik pierwszy p różny od 2 i od 5, albo $25|n$. Ponadto jeśli $n = ab$ oraz $a^2 = x^2 + y^2 + z^2$ to$n^2 = (bx)^2 + (by)^2 + (cz)^2$. Zatem wystarczy wykazać, że 25^2 oraz p^2 są sumą trzech kwadratów liczb całkowitych dodatnich. Zauważmy, że $25^2 = 12^2 + 15^2 + 16^2$. Ponadto na mocy Twierdzenia Lagrange'a istnieją a, b, c, d liczby całkowite takie, że $p = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Wówczas:

$$p^2 = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + (2ac + 2bd)^2 + (2ad - 2bc)^2$$

Wykażemy, że dla liczb pierwszych p różnych od 2 oraz 5 żaden z tych trzech nawiasów nie może być równy 0. Rozpatrzmy pierwszy przypadek gdy $p = 4k + 3$. Wówczas wiemy, że taka liczba nie może być sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych. Więc skoro pewne z liczb $a^2 + b^2 - c^2 - d^2, 2ac + 2bd, 2ad - 2bc$ mają być równa 0, to muszą to być dokładnie dwie z nich. Ale jeśli $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 0$ to $2|p$ czyli sprzeczność. Czyli $2ac + 2bd = 2ad - 2bc = 0$. Zauważmy, że $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ad + bc)^2 + (ad - bc)^2 = 0$ czyli $a = b = c = d = 0$ czyli sprzeczność. Rozpatrzmy drugi przypadek, gdy $p = 4k + 1$. Wówczas $p = a^2 + c^2$ dla liczb a, c całkowitych dodatnich, czyli $p^2 = (a^2 - c^2)^2 + (2ac)^2$. Ponadto a jest różne od c, czyli $p^2 = x^2 + y^2$ oraz p nie jest podzielne przez 5. Skoro tak to rozważając równanie modulo 5 otrzymujemy, że jedna z liczb x, y jest podzielna przez 5, czyli $p^2 = x^2 + 25y^2 = x^2 + (3y)^2 + (4y)^2$, co kończy dowód.

4. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych a, b, c, d układ równań

$$\begin{cases} (b + c + d)^{2018} = 3a \\ (a + c + d)^{2018} = 3b \\ (a + b + d)^{2018} = 3c \\ (a + b + c)^{2018} = 3d \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Niech a będzie najmniejszą liczbą spośród a, b, c, d. Skoro liczba $3a$ jest parzystą potęgą innej liczby rzeczywitej to $3a \geqslant 0$ czyli $a \geqslant 0$. Skoro a jest najmniejsze, to $(b + c + d)^{2018} = 3a \leqslant 3b = (a + c + d)^{2018}$. Jako, że każda z liczb a, b, c, d jest nieujemna to zachodzi $b + c + d \leqslant a + c + d$, czyli $b \leqslant a$, ale skoro a jest najmniejsze, to $a = b$. Analogicznie $a = b = c = d$. Podstawiając dostajemy równanie: $(3a)^{2018} = 3a$, którego jedynymi rozwiązaniami są liczby 0 oraz $\frac{1}{3}$. Zatem jedyne czwórki liczb spełniające warunki zadania to $(0, 0, 0, 0)$ oraz $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

5. Dane są różne liczby rzeczywiste a, b, c, różne od 0 takie, że:

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$$

Wykazać, że $|abc| = 1$.

Rozwiązanie:

Zapsując równoważnie założenie trzy razy otrzymujemy równości:

$$a - b = \frac{b - c}{bc}$$

$$b - c = \frac{c - a}{ca}$$

$$c - a = \frac{a - b}{ab}$$

co po wymnożeniu daje:

$$(a - b)(b - c)(c - a) = \frac{(a - b)(b - c)(c - a)}{a^2 b^2 c^2}$$

Z założeń zadania liczba $(a - b)(b - c)(c - a)$ jest różna od 0 więc zachodzi: $(abc)^2 = 1$ co prowadzi do tezy.

6. Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ spełniające dla dowolnych liczb rzeczywistych równanie:

$$f(x^2 + f(x)f(y)) = xf(x + y).$$

Rozwiązanie:

Podstawmy $x := 0$. Otrzymujemy wówczas $f(f(0)f(y)) = 0$ dla dowolnego y rzeczywistego. Praz istnieje takie k rzeczywiste, że $f(k) = 0$. Wstawiając $y := k$ dostajemy $f(0) = 0$. Wstawiając do wyjściowego równania $y := 0$ dostajemy $f(x^2) = xf(x)$, co prowadzi do $-xf(-x) = f((-x)^2) = f(x^2) = xf(x)$ czyli $f(-x) = -f(x)$. Przypuśćmy, że funkcja f przyjmuje wartość 0 dla argumentu a różnego od 0. Wówczas $0 = af(a) = f(a^2) = f(a^2 + f(a)f(y)) = af(a + y)$. Skoro a jest różne od 0 to $f(a+y) = 0$ dla dowolnego y, czyli funkcja jest stale równa 0. Zatem albo funkcja ma dokłądnie jedno miejsce zerowe, albo jest stale równa 0. Przypuśćmy, że ma jedno miejsce zerowe. Wówczas kładąc $y := -x$ dostaniemy $f(x^2 - f(x)^2) = 0$ czyli $x^2 = f(x)$ czyli $f(x) = x$ lub $f(x) = -x$. Sprawdzając w wyjściowym równaniu, widzimy, że nie istnieje funkcja, która dla a spełnia $f(a) = a$ oraz dla b spełnia $f(b) = -b$ dla a, b różnych od zera. Ponadto widzimy, że funkcje $f(x) = x$ oraz $f(x) = -x$ spełniają warunki zadania. Czyli jedynymi funkcjami spełniającymi warunki zadania są: $f(x) = 0$, $f(x) = x$, $f(x) = -x$.

7. Ciąg $x_1, x_2, \ldots, x_k$ liczb całkowitych dodatnich nazwiemy $n - dobrym$ jeśli $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ dla liczby całkowitej dodatniej n. Dla każdego ciągu $n - dobrego$ rozpatrzmy iloczyn wszystkich x_i (np. dla $6 - dobrego$ ciągu $1, 2, 3$ taki iloczyn będzie wynosił 6). Niech $f(n)$ będzie największym spośród tych iloczynów. Obliczyć $f(n)$.

Rozwiązanie:

Zapiszmy liczbę $n = 2a + 3b$, gdzie $0 \leqslant a \leqslant 2$ jest takie, by $n - 2a$ była liczbą podzielną przez trzy. Wykażemy, że $f(n) = 2^a 3^b$. Zauważmy na początku, że $f(k) = max(1 \cdot f(k-1), 2 \cdot f(k-2), \ldots (k-1) \cdot f(1))$. Dowodzimy wzór jawny na $f(n)$ za pomocą indukcji, tzn. chcemy wykazać, że $f(k) = 3f(k-3)$ a to znaczy, że $3f(k-3) \geqslant if(k-i)$. Rozpisujemy ze wzoru (z założenia indukcyjnego) oraz z nierówności $f(n+k) \geqslant kf(n)$ i dostajemy, że faktycznie: $max(1 \cdot f(k-1), 2 \cdot f(k-2), \ldots (k-1) \cdot f(1)) =$ 3f(k-3).

8. Danych jest n miast oraz $n - 1$ dróg między nimi. Z każdego miasta można dojechać do każdego innego za pomocą danych dróg. Pewne $2k$ miast ($0 < k < \frac{n}{2}$) zostało pokolorowane na czerwono. Wykazać, że można tak dobrać w pary czerwone miasta, aby dla każda ścieżka łącząca miasta z danej pary przechodziła przez pewine, stałe miasto.

Rozwiązanie:

Ukorzeńmy drzewo w dowolnym wierzchołku. Rozpatrzmy następujący algorytm. Jeśli każde z poddrzew tego drzewa zawiera nie więcej niż połowa czerwonych miast to koniec. W przeciwnym razie nasym nowym korzeniem staje się wierzchołek który łączy poddrzewo, które zawiera więcej niż połowę czerwonych wierzchołków z naszym starym korzeniem. Ten algorytm zakończy się, gdyż cały czas zmniejszamy liczbę czerwonych wierzchołków w poddrzewie, które zawiera ich najwięcej. Ponadto gdy po wykonaniu tego algorytmu każdemu wierzchołkowi przypiszemy liczbę od 1 do $2k$ w kolejności pre-order to łącząc i-ty wierzchołek z $i+k$-tym każda taka ścieżka będzie przechodzić przez nasz znaleziony korzeń ponieważ skoro każde poddrzewo ma nie więcej niż k czerwonych wierzchołków to i oraz $i+k$ będą należeć do innych poddrzew. A zatem tez zadania jest prawdziwa.

9. W trójkącie ABC odcinki AB, AC są średnicami okręgów ω i α. Wykazać, że istnieje okrąg styczny do okręgów ω i α, którego środek leży na odcinku BC.

Rozwiązanie:

Rozpatrzmy β okrąg o środku w M - środku odcinka BC i promieniu $\frac{1}{2}|AB - AC|$. Odległość środka tego okręgu i środka odcinka AB jest równa sumie promieni okręgu o średnicy AB oraz $\frac{1}{2}|AB - AC|$. A zatem te dwa okręgi są styczne. Analogicznie okrąg o średnicy AC jest styczny do β. Zatem β spełnia warunki zadania.

10. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Prosta AI przecina prostą BC w punkcie D oraz okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie S różnym od A. Punkt K jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt DSB, a punkt L — w trójkąt DSC. Punkt P jest odbiciem symetrycznym punktu I względem prostej KL. Wykazać, że kąt BPC jest prosty.

Rozwiązanie:

Niech X będzie drugim przecięciem prostej SK z okręgiem opisanym na ABC. Ponieważ kąty wpisane oparte na łukach tej samej długości są równe, prosta AS jest dwusieczną kąta BAC oraz prosta KS jest dwusieczną kąta ASB, więc: $\sphericalangle BXS = \sphericalangle BAS = \sphericalangle SAC = \sphericalangle SXC$ oraz $\sphericalangle ISX = \sphericalangle XSB$. Zatem punkty I, B są symetryczne względem prostej SX. W szczególności zachodzi $KI = KB$. Ponadto, skoro P i I są symetryczne względem prostej KL, to $KI = KP$. Czyli punkty I, B, P leżą na okręgu o środku w K. $\sphericalangle IPB = \frac{1}{2}\sphericalangle IKB = \sphericalangle XKB = 180 - \sphericalangle BKS = \sphericalangle SBK + \sphericalangle KBS = \frac{1}{2}(\sphericalangle SBD + \sphericalangle DSB)$. Analogicznie dowodzimy, że $\sphericalangle CPI = \frac{1}{2}(\sphericalangle CSD + \sphericalangle DCS)$. Zatem: $\sphericalangle CPB = \sphericalangle IPB + \sphericalangle CPI = \frac{1}{2}(\sphericalangle SBD + \sphericalangle DSB + \sphericalangle CSD + \sphericalangle DCS) = \frac{1}{2} \cdot 180 = 90$ co kończy dowód.

11. Dany jest prostopadłościan $ABCDA'B'C'D'$. Niech α, β, γ będą kątami utworzonymi przez przekątną AC' z krawędziami AB, AD i AA'. Udowodnić, że:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma \leqslant \frac{3}{2}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że $\cos\alpha = \frac{AB}{AC'}$, $\cos\beta = \frac{AD}{AC'}$, $\cos\gamma = \frac{AA'}{AC'}$. Na mocy Twierdzenia Pitagorasa mamy:

$$(AC')^2 = AC^2 + (CC')^2 = AC^2 + (AA')^2 = AB^2 + BC^2 + (AA')^2 = AB^2 + AD^2 + (AA')^2$$

Dzieląc obustronnie przez $(AC')^2$ dostaniemy równanie:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Równoważnie do wykazania nierówności z tezy poprzez pomnożenie wyrażenia przez $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma$ otrzymujemy:

$$\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma \leqslant \frac{3}{2}$$

Ponadto zauważmy, że na mocy $xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ mamy:

$$\operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg}\gamma = \frac{\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma} \leqslant \frac{1}{2}(\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\gamma} + \frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\beta})$$

Sumując trzy takie nierówności i korzystając z $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ oraz jedynki trygonometrycznej dostajemy tezę.

Mecz Matematyczny grupy starszej

1. Niech a, b, c będą takimi liczbami dodatnimi, że $abc = 1$. Wykaż, że

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leqslant 1.$$

Rozwiązanie:

Z warunków zadania wnioskujemy, że istnieją takie liczby dodatnie x, y, z, że $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$. Wstawiając to do naszej nierówności i mnożąc przez mianowniki mamy równoważną postać

$$(x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \leqslant xyz$$

Załóżmy bez straty ogólności, że x jest największą spośród liczb x, y, z. Wtedy wśród liczb $p = x + y - z, q = y + z - x, r = z + x - y$ jedynie q może być ujemne. Po wstawieniu p, q, r i pomnożeniu stronami przez 8 nierówność przyjmuje postać:

$$8pqr \leqslant (p + q)(q + r)(r + p)$$

Zauważmy, że prawa strona równania jest dodatnia (bo jest równa $xyz > 0$). To oznacza,że gdy któraś z liczb p, q, r jest zerem lub q jest ujemne to nierówność zachodzi. Gdy wszystkie są dodatnie to $2\sqrt{pq} \leqslant p + q$. Pisząc jeszcze dwie analogiczne nierówności i mnożąc wszystkie stronami dostajemy tezę. $\square$

2. Dane są parami różne liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots x_n$ o niezerowej sumie. Pokazać, że istnieją takie liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$, że $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i < 0$ oraz $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_{\pi(i)} > 0$ dla dowolnej permutacji π zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ różnej od identyczności.

Rozwiązanie:

Niech $k_1, k_2, \ldots k_n$ będą dowolnymi parami różnymi liczbami rzeczywistymi o monotoniczności odwrotnej do $x_1, x_2, \ldots x_n$ (to znaczy $k_i > k_j \Leftrightarrow x_i < x_j$). Z twierdzenia o ciągach jednomonotonicznych wiemy, że liczba $\sum_{i=1}^{n} k_i x_i$ jest mniejsza od każdej z liczb postaci $\sum_{i=1}^{n} a_i x_{\pi(i)}$, gdzie π jest dowolną permutacją zbioru $\{1, 2, \ldots n\}$, różną od identyczności. Powiększmy teraz wszystkie k_i o jakiś ε. Wówczas wszystkie te sumy zwiększą się o $\varepsilon(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$. Z treści zadania wiemy, że liczba ta jest niezerowa. Analogicznie jest ze zmniejszaniem. Oczywistym jest, że możemy znaleźć taki ϵ, żeby jedynie najmniejsza suma była ujemna, natomiast pozostałe dodatnie. W ten sposób znajdujemy nasze szukane liczby $a_1, a_2, \ldots a_n$. $\square$

3. Niech $r, a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ będą różnymi liczbami całkowitymi. Niech

$$(r-a_1)(r-a_2)\ldots(r-a_{2n}) = (-1)^n(n!)^2.$$

Wykaż, że

$$r = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_{2n}}{2n}.$$

Rozwiązanie:

Widać, że $r \neq a_i$ dla każdego i oraz $r-a_i$ to 2n różnych liczb całkowitych więc:

$$|(r-a_1)(r-a_2)\ldots(r-a_{2n})| \geqslant |1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot\ldots\cdot(-n)| = (n!)^2$$

gdzie równość zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy

$$\{r-a_1, r-a_2, \cdot, r-a_{2n}\} = \{1, 2, \ldots, n, -1, -2, \ldots, -n\}$$

czyli

$$\begin{aligned}&(r-a_1)+(r-a_2)+\ldots+(r-a_{2n}) = 2nr-(a_1+a_2+\ldots+a_{2n}) = \\ &= 1+2+\ldots+n+(-1)+(-2)-\ldots+(-n) = 0\end{aligned}$$

czyli

$$r = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_{2n}}{2n}.$$

$\square$

4. Dana jest liczba całkowita dodatnie n. Wykaż, że liczba $2^{3^n}+1$ ma przynajmniej n różnych dzielników dających resztę 3 z dzielenia przez 8.

Rozwiązanie:

Tezę zadania udowodnimy indukcyjnie. Dla $n=1$ oraz $n=2$ teza jest prawdziwa. Załóżmy więc, że zadanie jest prawdziwe dla pewnego n i pokażemy jego prawdziwość dla $n+1$. Zauważmy, że $2^{3^{n+1}}+1 = (2^{3^n}+1)(2^{2\cdot 3^n}-2^{3^n}+1)$. Niech d będzie taką liczbą całkowitą dodatnią, że $d \mid 2^{3^n}+1$ oraz $d \mid 2^{2\cdot 3^n}-2^{3^n}+1$. Mamy wtedy $2^{3^n} \equiv -1$ $(mod\ d)$, czyli $0 \equiv 2^{2\cdot 3^n}-2^{3^n}+1 \equiv (-1)^2-(-1)+1 \equiv 3$ $(mod\ d)$, czyli $d=1$ lub $d=3$. Zauważmy, że $2^{2\cdot 3^n}-2^{3^n}+1 = 8^{2\cdot 3^{n-1}}-8^{3^{n-1}}+1 \equiv (-1)^2-(-1)+1 \equiv 3$ $(mod\ 9)$. To oznacza, że liczba $2^{2\cdot 3^n}-2^{3^n}+1$ jest podzielna przez 3 i niepodzielna przez 9. Ponadto daje ona resztę 1 z dzielenia przez 8. Widzimy teraz, że liczba $k=\frac{2^{2\cdot 3^n}-2^{3^n}+1}{3}$ jest całkowita. Łatwo sprawdzić, że z kongruencji $3k \equiv 1$ $(mod\ 8)$ wynika $k \equiv 3$ $(mod\ 8)$. Ponadto skoro k jest niepodzielne przez 3, to jest względnie pierwsze z liczbą $2^{3^n}+1$ a jest też większe od 1, zatem nie jest dzielnikiem tej liczby.

Widzimy zatem, że $k \mid 3k = 2^{2\cdot 3^n} - 2^{3^n} + 1 \mid 2^{3^{n+1}} + 1$ i oprócz tego z założenia indukcyjnego wiemy, że liczba $2^{3^n} + 1$ ma jeszcze n innych dzielników dających resztę 3 z dzielenia przez 8, czyli liczba $2^{3^{n+1}} + 1 = (2^{3^n} + 1)(2^{2\cdot 3^n} - 2^{3^n} + 1)$ ma ich co najmniej $n + 1$, co należało dowieść. $\square$

5. Niech $n \in \mathbb{N}\backslash\{0; 1\}$ i $\{f(1), f(2), \ldots, f(n)\}$ będzie permutacją $\{1, 2, \ldots, n\}$ taką, że $\{1^{f(1)}, 2^{f(2)}, \ldots, n^{f(n)}\}$ jest permutacją $\{1, 2, \ldots, n\}$ modulo n. Wykaż, że $n \in \mathbb{P} \cup 2\mathbb{P}$, gdzie $2\mathbb{P}$ to zbiór liczb pierwszych pomnożonych razy dwa.

Rozwiązanie:

W dalszej części $rad(n) = \prod_{p|n} p$

W zbiorze $\{1; 2; ...; n\}$ jest dokładnie $nrad(n)^{-1}$ wielokrotności $rad(n)$ mniejszych od n czyli istnieją całkowite x, y że

$$0 < y < nrad(n)^{-1} \ , x \geqslant nrad(n)^{-1} - 1, \ n \nmid yrad(n)^x$$

(ponieważ w zbiorze $\{1^{f(1)}; ...; n^{f(n)}\}$ może być tylko jedno zero a daje je potęga n więc reszta wielokrotności $rad(n)$ nie może dawać 0 modulo n)

$$n \nmid rad(n)^{nrad(n)^{-1}-1}$$

czyli dla pewnego p: $v_p(n) > nrad(n)^{-1} - 1$. Jeśli $n = p^\alpha m;\ (m, p) = 1$ to:

$$\alpha > p^{\alpha-1} mrad(m)^{-1} - 1$$

skąd dostajemy, że

$$n = 2^a 3^b \prod_{\substack{p|n \\ p>3}} p$$

dla $a < 4; b < 3$

Teraz niech $f(n)$ =liczba reszt kwadratowych mod n wliczając 0. Skoro w zbiorze $\{1; 2; ...; n\}$ jest dokładnie $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ liczb parzystych więc $f(n) \geqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Łatwo zauważyć z chińskiego twierdzenia o resztach, że

$$f(n) = f(2^a) f(3^b) \prod_{\substack{p|n \\ p>3}} \frac{p+1}{2}$$

Czyli:

$$f(2^a) f(3^b) \prod_{\substack{p|n \\ p>3}} \frac{p+1}{2} \geqslant \lfloor \frac{2^a 3^b \prod_{\substack{p|n \\ p>3}} p}{2} \rfloor$$

Z tej nierówności łatwo już dostać, że $n \in \mathbb{P} \cup 2\mathbb{P}$

6. Tablica 100×100 jest podzielona na kwadraty jednostkowe. W każdym kwadracie znajduje się strzałka wskazująca górę, dół, prawo albo lewo. Plansza otoczona jest murem z wyjątkiem prawego boku pola w prawym górnym rogu. Dzik znajduje się na jednym z tych kwadratów. W każdej sekundzie dzik rusza się jedno pole z kierunkiem zgodnym ze strzałką. Po wykonaniu ruchu strzałka obraca się o 90° w prawo. Jeśli wskazanego ruchu nie da się wykonać, to dzik stoi w miejscu a strzałka obraca się. Rozstrzygnąć, czy dzik zawsze może opuścić planszę.

Rozwiązanie:

Otóż dzik opuści planszę. Załóżmy, że nie opuści. Wtedy przejdzie przez jakieś pole nieskończenie wiele razy. Ale w 4 kolejnych wejściach na to pole, raz pójdzie w górę, raz w prawo, raz w lewo i raz w dół. Czyli przejdzie też nieskończenie wiele razy przez pola sąsiadujące z tym polem. Powtarzając to rozumowanie dla dalszych pól dostaniemy, że dzik przejdzie nieskończenie wiele razy przez wszystkie pola, w szczególności przez pole w prawym górnym rogu, ale skoro przejdzie nieskończenie wiele razy przez pole w prawym górnym rogu, to musi z niego wyjść kiedyś w prawo czyli wyjdzie z planszy. Sprzeczność. $\square$

7. Wykazać, że dla każdego n całkowitego dodatniego istnieje okrąg, który zawiera dokładnie n punktów kratowych.

Rozwiązanie:

Rozważmy punkt $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Pokażemy teraz, że jego odległości od punktów kratowych są parami różne. Niech (a, b) oraz (c, d) będą punktami kratowymi o równych odległościach od naszego wyjściowego punktu. Wówczas zachodzi równość:

$$(a - \sqrt{2})^2 + (b - \sqrt{3})^2 = (c - \sqrt{2})^2 + (d - \sqrt{3})^2$$

którą można przekształcić do postaci

$$(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) - (2a - 2c)\sqrt{2} - (2b - 2d)\sqrt{3}) = 0$$

Oznaczmy $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = k, 2a - 2c = l, 2b - 2d = m$. Liczby k, l, m są oczywiście całkowite i spełniają równość $k + l\sqrt{2} + m\sqrt{3} = 0$. To oznacza, że liczba $l\sqrt{2} + m\sqrt{3}$ jest całkowita, a co za tym idzie liczba $2lm\sqrt{6} = (l\sqrt{2} + m\sqrt{3})^2 - 2l^2 - 3m^2$ jest całkowita. To oznacza, że przynajmniej jedna z liczb l, m jest zerem. Wstawiając to do równości $k + l\sqrt{2} + m\sqrt{3} = 0$ i postępując analogicznie dostajemy $k = l = m = 0$. To oznacza, że $a = c$ oraz $b = d$, co kończy dowód naszego pierwszego stwierdzenia

Weźmy teraz okrąg o środku w tym punkcie i promieniu na tyle małym, żeby nie było wewnątrz niego punktów kratowych (oczywiście taki okrąg istnieje). Teraz zwiększając promień naszego okręgu widzimy, że w jednym momencie do okręgu wchodzi co najwyżej jeden punkt, czyli liczba punktów wewnątrz okręgu rośnie zawsze o dokładnie jeden. Wystarczy więc znaleźć okrąg o tym środku, wewnątrz którego jest co najmniej n punktów. Istnienie takiego okręgu jest oczywiste. $\square$

8. Na płaszczyźnie dany jest wielokąt W o polu większym od n. Wykaż, że można tak przesunąć równolegle wielokąt W, że w jego wnętrzu znajdzie się co najmniej $n+1$ punktów kratowych.

Rozwiązanie:

Weźmy kratę S_k, gdzie punkty dajemy w punktach $(a+\frac{b}{k}; c+\frac{d}{k})$ dla $a, b, c, d, k \in \mathbb{Z}$ (powstaje taka krata jakbyśmy zmniejszyli kratę $\mathbb{Z}^2$ k razy). Pokryjmy płaszczyzne kwadratami tak, że każdy kwadrat ma bok długości $\frac{1}{k}$ i środek w punkcie $\in S_k$.
Niech:
$P_k =$ liczba kwadratów które zawierają się w całości w W,
$A_{i,j} = \{(x,y) \in S_k : \lfloor x \rfloor = \frac{i}{k}, \lfloor y \rfloor = \frac{j}{k}\}$ dla $0 \leqslant i, j \leqslant n-1$
$B_{i,j} = W \cap A_{i,j}$
$C = W \cap S_k$
$Q_k =$ pole kwadratów które zawierają się w całości w W
Zauważmy, że jeśli dla jakiegoś i,j $B_{i,j} > n$ wtedy możemy przesunąć figurę o taki wektor by $A_{i,j}$ przeszło na $\mathbb{Z}^2$. Wtedy to przesunięcie jest tym szukanym. Zauważmy również, że jeśli jakiś kwadrat zawiera się w W to punkt S_k który jest środkiem tego kwadratu leży w W więc:

$$P_k \leqslant C \iff P \leqslant \sum_{i,j} B_{i,j} \leqslant \sum_{i,j} n = n^3 \iff \frac{P_k}{n^2} \leqslant n \iff Q_k \leqslant n$$

ale jak k maleje to nasze kwadraty są coraz mniejsze i coraz lepiej przybliżają pole W więc:

$$\lim_{k\to\infty} Q_k = [W] > n$$

czyli dla pewnego k $Q_k > n$. Sprzeczność. $\square$

9. W trójkącie ABC punkt M jest środkiem boku BC. Prosta l jest prostopadła do AM. Proste przechodzące przez M prostopadłe do AB, AC przecinają l odpowiednio w punktach P, Q. Punkt N jest środkiem odcinka PQ. Wykaż, że $MN \perp BC$.

Rozwiązanie:

Niech X, Y będą rzutami M na boki AB, AC, natomiast K, L są rzutami odpowiednio P, Q na prostą BC. Ponadto oznaczmy przez T przecięcie AM z l. Wówczas na czworokątach $KBXP, PXTA, ATYQ, QYCL$ można opisać okręgi (o średnicach kolejno BP, PA, AQ, QC). Z potęgi punktu mamy $MB \cdot MK = MX \cdot MP = MA \cdot MT = MQ \cdot MY = MC \cdot ML$, czyli $MK = ML$.

Czworokąt $KLQP$ jest trapezem prostokątnym z linią środkową MN, co daje nam już tezę zadania. $\square$

10. Dany jest trójkąt ABC, w którym I jest środkiem okręgu wpisanego.Oznaczmy przez Γ okrąg opisany na tym trójkącie. Niech prosta AI tnie Γ w puntach A, D. Niech E będzie punktem na łuku $\widehat{BDC}$ okręgu Γ oraz F leży na BC, przy czym $\sphericalangle BAF = \sphericalangle CAE < \frac{1}{2}\sphericalangle BAC$. Oznaczmy przez G środek odcinka IF. Wykaż, że proste EI oraz DG przecinają się na okręgu Γ.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że $\sphericalangle ABF = \sphericalangle ABC = \sphericalangle AEC$ oraz z treści zadania mamy $\sphericalangle BAF = \sphericalangle CAE$, czyli $\triangle ABF \sim \triangle AEC$, zatem $\frac{AB}{AF} = \frac{AE}{AC}$, zatem $AE \cdot AF = AB \cdot AC(*)$. Oznaczmy teraz przez J środek okręgu dopisanego do trójkąta ABC naprzeciw wierzchołka A. Wówczas $\sphericalangle BAI = \frac{1}{2}\sphericalangle BAC = \sphericalangle JAC$. Ponadto punkty B, I, C, J leżą na jednym okręgu (o średnicy IJ), zatem $\sphericalangle CJA = \sphericalangle CJI = \sphericalangle CBI \sphericalangle ABI$, zatem $\triangle ABI \sim \triangle AJC$. Widzimy teraz, że $\frac{AB}{AI} = \frac{AJ}{AC}$, czyli $AB \cdot AC = AI \cdot AJ$. Łącząc to z $(*)$ mamy $AE \cdot AF = AI \cdot AJ$, czyli $\frac{AE}{AI} = \frac{AJ}{AF}$. Ponadto z równości $\sphericalangle BAF = \sphericalangle CAE$ wnioskujemy, że $\sphericalangle EAI = \sphericalangle JAF$. To oznacza, że $\triangle AEI \sim \triangle AJF$, czyli $\sphericalangle AEI = \sphericalangle AJF$ $(**)$. Tak jak już wcześniej zauważyliśmy, punkty B, J, C, I leżą na okręgu o średnicy IJ. Z twierdzenia o trójliściu wynika, że okrąg ten ma środek w punkcie D, czyli D jest środkiem odcinka IJ. Oznacza to, że $FJ \parallel GD$, zatem $\sphericalangle AJF = \sphericalangle ADG$. Łącząc to z $(**)$ mamy $\sphericalangle ADG = AEI$, co już daje tezę. $\square$

11. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Oznaczmy przez M_1, M_2 środki odcinków odpowiednio BF, CE. Prosta l_A jest prostą przechodzącą przez punkt A oraz prostopadłą do M_1M_2. Proste l_B, l_C definiujemy analogicznie. Wykaż, że proste l_A, l_B, l_C przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie:

Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, natomiast A', B', C' są punktami antypodycznymi odpowiednio do A, B, C na okręgu opisanym na trójkącie ABC. Oznaczmy przez M_A, M_B, M_C środki odcinków odpowiednio $A'I, B'I, C'I$. Czworokąt $BCB'C'$ jest prostokątem, czyli $BC \parallel B'C' \parallel M_BM_C$. Analogicznie $CA \parallel M_CM_A$ oraz $AB \parallel M_AM_B$. To oznacza, że trójkąty ABC oraz $M_AM_BM_C$ mają parami równoległe boki, zatem są jednokładne. Środek tej jednokładności (nazwijmy go S) leży na każdej z prostych AM_A, BM_B, CM_C. Oczywiście czworokąty $IFBA', IECA'$ są trapezami prostokątnymi, co oznacza, że $MM_1 \perp M_1A$ oraz $MM_2 \perp M_2A$. W trójkącie AM_1M_2 prosta AM_A jest średnicą okręgu opisanego, zatem prosta AM_A (czyli AS) jest izogonalnie sprzężona do l_A w kącie $\sphericalangle BAC$. Czyniąc analogiczne obserwacje wnioskujemy, że proste l_A, l_B, l_C przecinają się w punkcie izogonalnie sprzężonym do S względem trójkąta ABC. $\square$

Zadania trudniejsze

1. Dany jest wielokąt wypukły $\mathcal{F} = A_1A_2\dots A_n$. Dla dowolnego punktu P wewnątrz, punkty B_i to punkty przecięcia PA_i z obwodem $\mathcal{F}$. Wielokąt $\mathcal{F}$ nazwiemy *zbalansowanym*, jeśli dla pewnego punktu P wewnątrz wielokąta, punkty $B_1, B_2, \dots, B_n$ leżą wewnątrz różnych boków $\mathcal{F}$. Rozstrzygnąć czy $\mathcal{F}$ jest zbalansowany dla

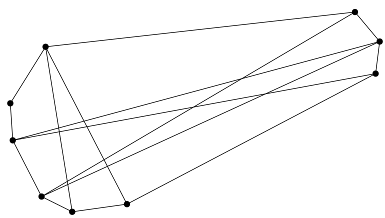
(a) parzystego n,

(b) nieparzystego n.

Rozwiązanie:

Pokażemy, że jeśli n jest parzyste, to wielokąt $\mathcal{F}$ nie jest zbalansowany. Przekątna A_1A_m, gdzie $m = \dfrac{n}{2} + 1$ dzieli wielokąt na dwa wielokąty $H_1 = A_1A_2\dots A_m$ i $H_2 = A_mA_{m+1}\dots A_nA_1$. Punkt P nie może leżeć na przekątnej, gdyż $B_1 \neq A_m$. Jeśli P leży wewnątrz H_2, to punkty $B_1, B_2, \dots, B_m$ leżą na $m-1$ odcinkach będących bokami wielokąta $\mathcal{F} \cap H_2$, zatem któryś z boków $\mathcal{F}$ zawiera dwa punkty B_i — sprzeczność.

Następujący rysunek



pokazuje, że dziewięciokąt wypukły nie musi być zbalansowany, gdyż punkt P powinien znaleźć się w części wspólnej trzech narysowanych trójkątów. $\square$

2. Wyznaczyć wszystkie wielomiany P o współczynnikach całkowitych o następującej własności: Dla dowolnych względnie pierwszych liczb całkowitych a i b ciąg $\{P(an+b)\}_{n\geqslant 1}$ zawiera nieskończenie wiele wyrazów takich, że każde dwa z nich są względnie pierwsze.

Rozwiązanie:

Przede wszystkim P nie może być wielomianem stałym, gdyż ciąg $\{P(an+b)\}_{n\geqslant 1}$ powinien zawierać nieskończenie wiele wyrazów.

Załóżmy, że $P(x) = kx^m$, dla liczb całkowitych $k \neq 0$ oraz $m > 0$. Niech a i b będą liczbami całkowitymi względnie pierwszymi. Wówczas $P(an+b) = k(an+b)^m$ jest podzielne przez k dla dowolnego n, więc $k = 1$. Na podstawie twierdzenia Dirichleta ciąg $\{(an+b)\}_{n\geqslant 1}$ zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych, więc ciąg $\{(an+b)^m\}_{n\geqslant 1}$ zawiera nieskończenie wiele wyrazów, które są parami względnie pierwsze. Wobec tego wielomiany $\pm x^m$ są rozwiązaniem zadania, dla $m > 0$.

Załóżmy teraz, że wielomian P ma co najmniej dwa wyrazy. Możemy go wówczas zapisać jako $P(x) = x^l Q(x)$ dla pewnej nieujemnej liczby całkowitej l oraz wielomiany Q postaci

$$Q(x) = a_j x^j + a_{j-1}x^{j-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

gdzie $j \geqslant 1$ oraz $a_0 a_j \neq 0$. Wybierzmy liczbę pierwszą q taką, że $q \nmid a_0$. Ponieważ Q jest niestałym wielomianem, to istnieje odpowiednio duża liczba całkowita $r > 0$ taka, że $|Q(a^r)| > 1$. W szczególności istnieje liczba pierwsza $p \mid Q(q^r)$ oraz $p \neq q$, gdyż $Q(q^r) \equiv a_0 \pmod q$ i $q \nmid a_0$.

Połóżmy $a := p$, $b := q^r$. Wtedy a i b są względnie pierwsze. Ponadto

$$P(an+b) = P(pn+q^r) \equiv P(q^r) = q^{rl}Q(q^r) \equiv \quad \pmod p,$$

więc wszystkie wyraz ciągu $\{P(an+b)\}_{n\geqslant 1}$ są podzielne przez p. Wobec tego P nie spełnia warunków zadania. $\square$

3. Rozstrzygnąć czy zbiór liczb całkowitych, które nie dają się przedstawić jako suma kwadratów różnych liczb całkowitych jest skończony.

Rozwiązanie:

Pokażemy, że zbiór ten jest skończony. Weźmy liczbę N dla której istnieją liczby całkowite dodatnie $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m$ takie, że ilorazy dowolnych dwóch z nich nie jest potęgą dwójki większą od 1 oraz

$$N = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2, \quad 2N = b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_m^2,$$

(możemy wziąć np. 29, gdyż $29 = 2^2 + 5^2$ i $58 = 3^2 + 7^2$).

Wykażemy, że dowolna liczba

$$P > \sum_{k=0}^{4N-2} (2kN+1)^2$$

jest sumą kwadratów różnych liczb całkowitych. Dla takiego P znajdziemy q i $1 \leqslant r \leqslant 4N-1$ takie, że $P = 4Nq + r$. Ponieważ

$$r \equiv \sum_{k=0}^{r-1} (2kN+1)^2 \pmod{4N},$$

to możemy zapisać

$$P = \sum_{k=0}^{r-1} (2kN+1)^2 + 4Nt$$

dla pewnej liczby całkowitej t, jeśli $r \geqslant 1$. W przypadku, gdy $r = 0$, to oczywiście $P = 4Nq$. Zapisując $t = \sum_i 2^{2e_i} + \sum_j 2^{2e_j+1}$ widzimy, że

$$P = \begin{cases} \sum_{k=0}^{r-1}(2kN+1)^2 + \sum_{i,v}(2^{e_i+1}a_v)^2 + \sum_{j,w}(2^{e_j+1}a_w)^2 & \text{dla } r \geqslant 1, \\ \sum_{i,v}(2^{e_i+1}a_v)^2 + \sum_{j,w}(2^{e_j+1}a_w)^2 & \text{dla } r = 0, \end{cases}$$

gdzie $(v, w) \in \{1, 2, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, m\}$. $\square$

4. Dane są liczby całkowite dodatnie $m \geqslant n$ oraz zbiór S wszystkich ciągów $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ takich, że $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = m$. Pokazać, że

$$\sum_{(a_1, a_2, \ldots a_n) \in S} 1^{a_1} 2^{a_2} \cdots n^{a_n} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^m.$$

Rozwiązanie:

W rozwiązaniu wykorzystamy funkcje tworzące. Mamy

$$\sum_{m \geqslant n} X^m \cdot \left(\sum_{(a_1, a_2, \ldots a_n) \in S} 1^{a_1} 2^{a_2} \cdots n^{a_n} \right) = \sum_{a_1, a_2, \ldots a_n \geqslant 1} X^{a_1} (2X)^{a_2} \cdots (nX)^{a_n} =$$

$$= \left(\sum_{a_1 \geqslant 1} X^{a_1} \right) \left(\sum_{a_2 \geqslant 1} X^{a_2} \right) \ldots \left(\sum_{a_n \geqslant 1} X^{a_n} \right) = \frac{X}{X-1} \cdot \frac{2X}{2X-1} \cdot \ldots \cdot \frac{nX}{nX-1}.$$

Z drugiej strony

$$\sum_{m \geqslant n} X^m \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^m \right) = \sum_{i=1} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \sum_{m \geqslant n} (iX)^m =$$

$$= \sum_{i=1} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \frac{(iX)^n}{1 - iX}.$$

Wystarczy zatem pokazać, że

$$\frac{n!}{(1-X)(1-2X) \cdot \ldots \cdot (1-nX)} = \sum_{i=1} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \frac{i^n}{1 - iX}.$$

Z rozkładu na ułamki proste wiemy, że istnieją liczby wymierne $A_1, A_2, \ldots, A_n$ takie że

$$\frac{n!}{(1-X)(1-2X)\cdot\ldots\cdot(1-nX)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{1-iX}.$$

Mnożąc powyższą równość przez $(1-iX)$ i biorąc $X \to \frac{1}{i}$ dostajemy formułę na A_i:

$$A_i = (-1)^{n-i}\binom{n}{i} i^n$$

oraz tezę zadania. □

5. Dane są liczby rzeczywiste a, b, c i d takie, że

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1) = 16.$$

Pokazać, że

$$-3 \leqslant ab+bc+cd+da+ac+bd-abcd \leqslant 5.$$

Rozwiązanie:

Zapiszmy nierówność, którą mamy pokazać jako

$$(ab+bc+cd+da+ac+bd-abcd-1)^2 \leqslant 16.$$

Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza mamy

$$\begin{aligned}
&(ab+bc+cd+da+ac+bd-abcd-1)^2 = \\
&= (a(b+c+d-bcd)+bc+bd+cd-1)^2 \leqslant \\
&\leqslant (a^2+1)[(b+c+d-bcd)^2+(bc+bd+cd-1)^2] = \\
&= (a^2+1)[(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)] = 16.
\end{aligned}$$

□

6. Dany jest trójkąt ABC wpisany w elipsę o długości k. Pokazać, że $k \geqslant 4r$, gdzie r jest promieniem okręgu wpisanego w trójkąt ABC.

Uwaga: Elipsa o ogniskach F_1 i F_2 i długości k jest zbiorem punktów P takich, że $PF_1 + PF_2 = k$.

Rozwiązanie:

Niech F_1 i F_2 będą ogniskami danej elipsy. Niech C_A będzie okręgiem o środku w punkcie A i promieniu AF_1. Analogicznie definiujemy okręgi C_B i C_C. Przedłużmy prostą F_2A aż do przecięcia okręgu C_A w punkcie P_A tak, że punkt A leży na odcinku P_AF_2. Analogicznie definiujemy punkty P_B i P_C. Niech Ω będzie okręgiem o środku F_2 i promieniu k. Widzimy, że $F_2P_A = F_2A + AP_A = F_2A + AF_1 = k$, więc $P_A \in \Omega$ oraz Ω i C_A są styczne w punkcie P_A. Analogiczne fakty uzyskujemy patrząc na wierzchołki B i C.

Niech F_1A przecina C_A w punkcie A_1 (A leży na odcinku A_1F_1). Analogicznie definiujemy punkty B_1 i C_1. Wówczas w trójkącie $A_1B_1C_1$ okręgi C_A, C_B i C_C są okręgami o średnicach odpowiednio F_1A, F_1B i F_1C.

Udowodnimy następujący lemat:

Lemat. *Dany jest punkty P w płaszczyźnie trójkąta ABC. Okrąg Γ o promieniu R jest styczny do okręgów o średnicach AP, BP i CP oraz zawiera je w swoim wnętrzu. Wówczas $R \geqslant 2r$, gdzie r jest promieniem okręgu wpisanego w trójkąt ABC.*

Dowód. Niech X będzie środkiem Γ. Wówczas $R \geqslant AX, R \geqslant BX$ i $R \geqslant CX$, więc

$$3R \geqslant AX + BX + CX.$$

Pozostaje pokazać, że

$$AX + BX + CX \geqslant 6r.$$

Wiadomo, że powyższa suma minimalizuje się gdy X jest punktem Fermata F. Zbudujmy więc trójkąt równoboczny BCD na zewnątrz trójkąta ABC. Wówczas F jest przecięciem okręgu opisanego na trójkącie BCD z prostą BD. Z twierdzenia Ptolemeusza zastosowanego dla czworokąta $BCDF$ dostajemy, że $FD = FB + FC$. Zatem

$$FA + FB + FC = FA + FD = AD,$$

więc wystarczy pokazać, że $AD \geqslant 6r$.

Oznaczając boki BC, CA i AB przez a, b i c odpowiednio, to z twierdzenia cosinusów mamy, że

$$\begin{aligned}
AD^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\left(\sphericalangle B + 60^\circ\right) = \\
&= a^2 + c^2 - 2ac\left(\frac{1}{2}\cos\sphericalangle B - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\sphericalangle B\right) = \\
&= a^2 + c^2 - \frac{1}{2}\left(a^2 + c^2 - b^2\right) + \sqrt{3}ac \cdot \sin\sphericalangle B = \\
&= \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + 2\sqrt{3} \cdot [ABC],
\end{aligned}$$

gdzie $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$.

Pokażemy teraz, że

$$a + b + c \geqslant 6\sqrt{3}r. \tag{4}$$

Niech x, y i z będą takie, że $a = y+z$, $b = z+x$, $c = x+y$, $x, y, z > 0$. Wówczas łatwo obliczamy, że $r = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}$. Wobec tego nierówność (4) przekształca się do

$$x + y + z \geqslant 3\sqrt{\frac{3xyz}{x+y+z}},$$

która jest równoważna temu, że

$$(x + y + z)^3 \geqslant 27xyz.$$

Jednakże ostatnia nierówność jest prawdziwa na podstawie nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną.

Wykażemy następnie, że

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}[ABC]. \tag{5}$$

Istotnie, niech $s := \frac{a+b+c}{2}$, wtedy ze wzoru Herona oraz nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną mamy

$$\frac{[ABC]^2}{s} = (s-a)(s-b)(s-c) \leqslant \left(\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}\right)^3 = \frac{s^3}{27},$$

stąd

$$[ABC] \leqslant \frac{s^2}{3\sqrt{3}} = \frac{(a+b+c)^2}{12\sqrt{3}} \leqslant \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{12\sqrt{3}} = \frac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}}.$$

Mamy teraz

$$\begin{aligned} AD^2 &= \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + 2\sqrt{3}\cdot[ABC] \geqslant \\ &\geqslant \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3}[ABC] + 2\sqrt{3}\cdot[ABC] = \\ &= 4\sqrt{3}[ABC] = 4\sqrt{3}\cdot\frac{(a+b+c)r}{2} \geqslant 4\sqrt{3}\cdot\frac{6\sqrt{3}r^2}{2} = 36r^2. \end{aligned}$$

$\square$

Na podstawie powyższego lematu wiemy, że $k \geqslant 2r_1$, gdzie r_1 jest promieniem okręgu wpisanego w trójkąt $A_1B_1C_1$. Jednakże trójkąt $A_1B_1C_1$ jest obrazem trójkąta ABC w jednokładności o środku w punkcie F_1 i skali 2, więc $r_1 = 2r$, stąd $k \geqslant 4r$. $\square$

7. Pokazać, że dla dowolnego wielomianu P o współczynnikach rzeczywistych istnieje wielomian Q o współczynnikach rzeczywistych taki, że wielomian $P(x)^2 + Q(x)^2$ jest podzielny przez $(1 + x^2)^{2017}$.

Rozwiązanie:

Wystarczy oczywiście pokazać, że dla dowolnego n naturalnego istnieje wielomian rzeczywisty P taki, że P^2+1 jest podzielne przez $(1+x^2)^{2017}$. Zauważmy, że

$$(x^2+1)^n = (x+i)^n(x-i)^n$$

oraz

$$(x+i)^n = A(x) + iB(x) \quad \text{oraz} \quad (x-i)^n = A(x) - iB(x)$$

dla pewnych wielomianów rzeczywistych A i B. Chcemy znaleźć wielomian P taki, że

$$(A+iB)(A-iB) \mid 1+P^2 = (1+iP)(1-iP),$$

więc wystarczy aby $A+iB \mid 1+iP$ (podzielność $1-iP$ przez $A-iB$ uzyskamy biorąc sprzężenie). Wobec tego szukamy takich wielomianów rzeczywistych C i D takich, że

$$(A+iB)(C+iD) = 1+iP.$$

Nietrudno zauważyć, że szukane wielomiany spełniają zależność $AC-BD=1$. Jednakże wielomiany A i B są względnie pierwsze (A i B nie mają wspólnego pierwiastka), więc na podstawie lematu Bezout'a znajdziemy wielomiany C i D spełniające szukany warunek. $\square$

8. Punkt M leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC. Styczne do okręgu wpisanego w trójkąt ABC poprowadzone z punktu M przecinają prostą BC w punktach X_1 i X_2. Pokazać, przy zmieniającym się wyborze punktu M, okręgi opisane na trójkątach MX_1X_2 mają punkt wspólny.

Rozwiązanie:

Niech okrąg wpisany ω w trójkąt ABC będzie styczny do boków BC, CA i AB w punktach D, E i F odpowiednio. Niech MK_1 i MK_2 będą stycznymi do ω. Przypuśćmy, że okrąg styczny do boków AB, AC i okręgu opisanego Ω na trójkącie ABC, będzie styczny do Ω w punkcie T. Ponadto, niech H oznacza ortocentrum trójkąta DEF.

Rozpatrzmy inwersję względem okręgu ω i niech X' będzie obrazem punktu X w danej inwersji. Łatwo zauważyć, że A' jest środkiem odcinka EF. Wobec tego, obrazem Ω jest okrąg 9-ciu punktów trójkąta DEF, którego oznaczymy przez o. Niech N będzie środkiem łuku BAC. Pokażemy następujący lemat:

Lemat. *Punkty N, I i T są współliniowe.*

Dowód. Niech okrąg styczny wewnętrzne do Ω w T, będzie styczny do prostych AB i AC w punktach K i L odpowiednio. Proste TK i TL przecinają okrąg Ω w punktach X i Y. Stosując twierdzenie Paskala dla sześciokąta $XAYCTB$ uzyskujemy, że I leży na odcinku KL.

Oczywiście $AI \perp KL$, więc łatwo zauważyć, że $KL \parallel XY$. Ponadto

$$\sphericalangle TKI = \sphericalangle TKL = \sphericalangle TXY = \sphericalangle TBY = \sphericalangle TBI,$$

więc na czworokącie $TBKI$ można opisać okrąg. Analogicznie dostaniemy, że na czworokącie $TCLI$ można opisać okrąg, więc

$$\sphericalangle BTI = \sphericalangle AKL = \sphericalangle ALK = \sphericalangle CTI,$$

zatem TI jest dwusieczną kąta BTC, skąd teza. □

Ponieważ $\sphericalangle IN'A' = \sphericalangle IAN = 90°$, to na mocy lematu T' jest drugim końcem średnicy $A'T'$ okręgu o. Zatem T' jest środkiem odcinka DH.

Łatwo zauważyć, że punkty M', X_1', X_2' są środkami odcinków K_1K_2, K_1D oraz DK_2, odpowiednio. Punkt M' leży na o, więc rozpatrując jednokładność o środku w punkcie H i skali 2 widzimy, że obraz M_1' punktu M' leży na ω i

$$\sphericalangle K_1HK_2 = \sphericalangle K_2M_1'K_1 = \sphericalangle K_2DK_1.$$

Rozpatrując teraz jednokładność o środku w punkcie D i skali 2, punkty X_1', X_2' i T' przekształcą się w punkty kolejno K_1, K_2 i H, natomiast obraz punktu M' oznaczmy przez M_2'. Ponadto

$$\sphericalangle K_1M_2'K_2 = \sphericalangle K_2DK_1 = \sphericalangle K_1HK_2,$$

więc punkty X_1', X_2', T' i M_2' leżą na jednym okręgu, stąd punkty X_1', X_2', M' i T' również. Oznacza to, że na okrąg opisany na trójkącie K_1K_2M przechodzi przez punkt T. □

9. Pokazać, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba całkowita n taka, że największy dzielnik pierwszy liczby $n^2 + 2017$ jest mniejszy niż εn.

Rozwiązanie:

Niech $n = 4 \cdot 2017^2 m^3 + 3 \cdot 2017m$, dla pewnej liczby całkowitej dodatniej m. Wówczas

$$n^2 + 2017 = 2017\left(2017m^2 + 1\right)\left(4 \cdot 2017m^2 + 1\right)^2.$$

Największy dzielnik pierwszy p liczby $n^2 + 2017$ nie może być większy niż $4 \cdot 2017m^2 + 1$. Ponadto

$$\frac{4 \cdot 2017m^2 + 1}{n} = \frac{4 \cdot 2017m^2 + 1}{4 \cdot 2017^2 m^3 + 3 \cdot 2017m} < \varepsilon,$$

dla odpowiednio dużego m, stąd

$$p < 4 \cdot 2017m^2 + 1 < n\varepsilon.$$

□

Spis treści