
OBÓZ PRZYGOTOWAWCZY DO OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Krynica Zdrój, 15 października – 19 października 2018

Obóz Przygotowawczy do Olimpiady Matematycznej
Krynica Zdrój, 15 października – 19 października 2018

Pensjonat *Józefa* w Krynicy

Skład tekstu:

Dominik Burek
Kamil Galewski
Filip Gawron
Jakub Węgrecki
Rafał Pyzik

Treści zadań

Zawody indywidualne grupy średniej

1. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. P jest punktem przecięcia przekątnych tego czworokąta. Wykazać, że:

$$\sqrt{P_{ABCD}} \geq \sqrt{P_{APB}} + \sqrt{P_{CPD}}$$

gdzie P_X oznacza pole figury X .

2. Niech $f(n)$ to liczba sposobów, na które można zapisać n jako sumę liczb całkowitych dodatnich. Przykładowo $f(4) = 5$, bo:

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$$

Ponadto $f(0) = 1$. Niech $g(n)$ to liczba sposobów, na które można zapisać n jako sumę liczb całkowitych dodatnich większych niż 1. Udowodnić, że dla $n \geq 1$ zachodzi $g(n) = f(n) - f(n-1)$.

3. Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończony ciąg liczb całkowitych dodatnich $x_1, x_2, \dots$, który spełnia

$$x_{n+2} = NWD(x_{n+1}, x_n) + 2018$$

oraz wśród elementów $x_1, x_2, \dots$ występuje dokładnie 10^{2018} różnych wyrazów.

4. Dane są trzy niewspółliniowe punkty kratowe A, B, C układu współrzędnych, takie że długość każdego z odcinków AB, BC, CA jest liczbą całkowitą. Znaleźć najmniejszą możliwą długość odcinka AB .

5. Znaleźć wszystkie liczby pierwsze p takie, że liczba $p^2 - p + 1$ jest sześcianem liczby całkowitej.

6. Prostokąt R o bokach nieparzystej długości jest podzielony na pewną liczbę prostokątów. Boki każdego z tych prostokątów są liczbami całkowitymi. Udowodnić, że istnieje prostokąt wewnątrz prostokąta R , dla którego odległości od boków R są albo wszystkie parzyste, albo nieparzyste.

7. Udowodnić, że dla każdego n całkowitego dodatniego liczbę 2018^n można przedstawić jako sumę dwóch kwadratów liczb całkowitych.

8. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym $\sphericalangle ACB = 45$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC , punkt H jest punktem przecięcia wysokości trójkąta ABC . Prosta przechodząca przez punkt O i prostopadła do prostej CO przecina proste AC i BC odpowiednio w punktach K i L . Wykazać, że

$$OK + KH = OL + LH$$

9. Znaleźć wszystkie pary funkcji $f, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, które dla każdych $x, y \in \mathbb{R}$ spełniają równanie

$$f(x^2 + yh(x)) = xh(x) + f(xy)$$

Zawody indywidualne grupy starszej

1. Niech a, b, c, d będą liczbami całkowitymi dodatnimi, że $ad = b^2 + bc + c^2$. Pokazać, że $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ jest liczbą złożoną.

2. Wyznaczyć wszystkie liczby złożone n , których wszystkie dzielniki większe od 1 można ustawić na okręgu w taki sposób, aby dowolne dwa sąsiadujące dzielniki nie były względnie pierwsze.

3. Dana jest liczba całkowita dodatnia n oraz liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ spełniające warunek

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 - 1)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 - 1) > (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n - 1)^2.$$

Wykazać, że $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 > 1$.

4. Niech α, β i γ będą miarami kątów leżących na przeciwko boków a, b i c pewnego trójkąta. Pokazać, że

$$\frac{a}{\alpha(b+c-a)} + \frac{b}{\beta(c+a-b)} + \frac{c}{\gamma(a+b-c)} \geq \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}.$$

5. Punkt X leży wewnątrz trójkąta ABC , przy czym

$$XA \cdot BC = XB \cdot AC = XC \cdot AB.$$

Niech I_1, I_2, I_3 będą środkami okręgów wpisanych w trójkąty odpowiednio XBC, XCA i XAB . Wykazać, że proste AI_1, BI_2 i CI_3 przecinają się w jednym punkcie.

6. Dane są dwie funkcje kwadratowe

$$f(x) = x^2 + a_1 x + b_1 \quad \text{oraz} \quad g(x) = x^2 + a_2 x + b_2,$$

gdzie a_1, a_2, b_1, b_2 są liczbami rzeczywistymi. Wiadomo, że równania $f(g(x)) = 0$ oraz $g(f(x)) = 0$ nie mają rzeczywistego rozwiązania. Pokazać, że co najmniej jedno z równań $f(f(x)) = 0$ i $g(g(x)) = 0$ nie ma rozwiązania rzeczywistego.

7. Dane są liczby całkowite dodatnie a, b i c takie, że

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2.$$

Pokazać, że $ab + bc + ca$ jest kwadratem liczby całkowitej.

8. Punkt M jest środkiem boku BC trójkąta ABC . Środkowa AM przecina okrąg wpisany γ w trójkąt ABC , w punktach K i L . Proste przechodzące przez K, L równoległe do BC przecinają ponownie γ w punktach X i Y . Niech proste AX, AY przecinają BC w P i Q . Wykazać, że $BP = CQ$.

9. Rozwiązać w liczbach całkowitych następujące równanie

$$2x^6 = y^3 + 2.$$

10. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie a, b, c i d takie, że $ab = cd$ oraz $a + b + c + d$ jest liczbą pierwszą.

11. Niech S będzie skończonym zbiorem punktów na płaszczyźnie, z których żadne 3 nie są współliniowe. Dla każdego wielokąta wypukłego P o wierzchołkach w S niech $a(P)$ =liczba wierzchołków P i $b(P)$ =liczba punktów z leżących na zewnątrz P . Odcinek, punkt i zbiór pusty uważamy jako wielokąt wypukły o odpowiednio 2,1,0 wierzchołkach. Wykazać, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_P x^{a(P)}(1-x)^{b(P)} = 1$$

gdzie suma jest po wszystkich P o wierzchołkach w S

12. Dane są liczby rzeczywiste dodatnie a, b, c i d takie, że $a + b + c + d = 4$. Pokazać, że

$$\frac{a^4}{(a+b)(a^2+b^2)} + \frac{b^4}{(b+c)(b^2+c^2)} + \frac{c^4}{(c+d)(c^2+d^2)} + \frac{d^4}{(d+a)(d^2+a^2)} \geq 1.$$

13. Dany jest ciąg liczb całkowitych dodatnich $(a_n)_{n \geq 1}$ takie, że $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ oraz

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2 \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Pokazać, że dla dowolnego $m \geq 1$, liczba $a_m a_{m+1}$ jest wyrazem ciągu $(a_n)_{n \geq 1}$.

14. Na bokach BC i CA trójkąta ABC zbudowano (po jego zewnętrznej stronie) trójkąty BCD i ACE , przy czym

$$AE = BD \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle BDC + \sphericalangle AEC = 180^\circ.$$

Punkt F leży na boku AB i jest wyznaczony przez warunek

$$\frac{AF}{FB} = \frac{DC}{CE}.$$

Dowieść, że z odcinków o długościach $CD + CE$, BC i AC można zbudować trójkąt, który jest podobny do trójkąta DEF .

15. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ takie, że dla dowolnych $x, y \in (0, \infty)$ zachodzi równość

$$xf(x^2)f(f(y)) + f(yf(x)) = f(xy) (f(f(x^2)) + f(f(y^2))).$$

Mecz matematyczny grupy średniej

1. Liczby rzeczywiste x, y, z spełniają warunki:

$$x + y + z = 9, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 33.$$

Wyznaczyć wartości jakie może przyjmować liczba xyz .

2. Niech liczby całkowite dodatnie $a_1, a_2, \dots, a_n, k$ i M spełniają warunki:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = k \quad \text{ i } \quad a_1 a_2 \dots a_n = M.$$

Udowodnić, że jeśli $M > 1$ to wielomian

$$P(x) = M(x+1)^k - (x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_n)$$

nie ma pierwiastków dodatnich.

3. Znaleźć wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające równanie

$$f(xf(x) + 2y) = f(x^2) + f(y) + x + y - 1$$

dla każdych $x, y \in \mathbb{R}$.

4. Znajdź wszystkie n całkowite dodatnie, że $1 + \lfloor \sqrt{2n} \rfloor$ dzieli $2n$.

5. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych (a, b) , że

$$a! + b! = a^b + b^a.$$

6. Liczba $p = 4k + 1$ jest pierwsza. Wykaż, że $p | k^k - 1$.

7. Na tablicy jest napisane $n \geq 3$ liczb całkowitych dodatnich. Ruch polega na wybraniu trzech liczb a, b, c takich, że istnieje niezdegenerowany nierównoboczny trójkąt o bokach a, b, c i zamianie tych liczb na $a+b-c, b+c-a, c+a-b$. Udowodnić, że można wykonać jedynie skończenie wiele ruchów.

8. Dana jest tablica o wysokości m i szerokości n . W pola tej tablicy wpisano liczby $1, 2, \dots, n$, przy czym każda z tych liczb występuje w dokładnie m polach

tablicy. Wykaż, że można tak poprzestawiać liczby wewnątrz każdej z kolumn, aby każdy wiersz zawierał każdą z liczb $1, 2, \dots, n$.

9. Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg ω . Różne okręgi ω_1, ω_2 leżą wewnątrz ω , są styczne do ω , BC i dwusiecznej kąta $\sphericalangle BAC$ oraz leżą po tej samej stronie prostej BC co A . Wykaż, że okręgi ω_1 i ω_2 są styczne.

10. Dany jest trójkąt ABC . I i O to odpowiednio środek okręgu wpisanego i opisanego. Wykaż, że $\sphericalangle AIO \leq 90^\circ$ wtedy i tylko wtedy, gdy $AB + AC \geq 2BC$.

11. W trójkącie ABC niech ω będzie okręgiem dopisanym stycznym do odcinka BC . Niech punkty D, E i F to punkty styczności ω odpowiednio z prostymi BC, CA i AB . Okrąg opisany na trójkącie AEF przecina prostą BC w P i Q . Niech M to środek odcinka AD . Wykaż, że okrąg MPQ jest styczny do ω .

Mecz matematyczny grupy starszej

1. Rozstrzygnąć, czy istnieje liczba naturalna $n > 1$ o następującej własności: Dowolna liczba n -cyfrowa zapisana trzy razy z rzędu tworzy liczbę $(3n)$ -cyfrową podzieloną przez n^2 .

2. Niech a, b, c będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Pokazać, że istnieje liczba całkowita dodatnia n taka, że liczba

$$(a^2 + n)(b^2 + n)(c^2 + n)$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

3. Niech a, b, c, d, e będą różnymi liczbami całkowitymi dodatnimi, że $a^4 + b^4 = c^4 + d^4 = e^5$. Pokazać, że $ac + bd$ jest liczbą złożoną.

4. Liczby rzeczywiste nieujemne $x, y, z \geq 0$ są takie, że $x^2 + y^2 + z^2 = 2(xy + yz + zx)$. Udowodnić, że

$$\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{2xyz}.$$

5. Niech $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$. Udowodnić, że istnieją $b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{Z}_+$ takie, że dla każdego $0 \leq i \leq n$ zachodzi nierówność $a_i \leq b_i \leq 2a_i$ oraz

$$P(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$$

jest nierozkładalny w $\mathbb{Q}[x]$.

6. Ciąg liczb rzeczywistych $\{a_n\}_{n \geq 0}$ jest zdefiniowany następująco

$$a_0 = -1, \quad \sum_{k=0}^n \frac{a_{n-k}}{k+1} = 0 \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Pokazać, że $a_n > 0$ dla $n \geq 1$.

7. Rozstrzygnąć, czy sześcián o krawędzi 100 można podzielić na prostopadłościany o wymiarach $1 \times 1 \times 51$ i $1 \times 1 \times 53$.

8. W pokoju jest n lamp i 5 przełączników przy czym każdy przełącznik jest podpięty do minimum jednej lampy i nie ma dwóch tak samo działających przełączników. Po wciśnięciu przełącznika wszystkie lampy połączone z nim

zmieniają stan (świeci-nie świeci). Na początku wszystkie lampy są wyłączone. Wykazać, że można włączyć dokładnie 3 przełączniki tak, że co najmniej 2 lampy będą świecić.

9. Każda liczba całkowita dodatnia została pomalowana na niebiesko lub czerwono. Udowodnić, że istnieje nieskończony ciąg $a_1 < a_2 < \dots$ taki, że liczby

$$a_1, \frac{a_1 + a_2}{2}, a_2, \frac{a_2 + a_3}{2}, a_3, \dots$$

są jednego koloru.

10. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Proste AI i BI przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach P i Q , różnych od A i B . Punkt F jest takim punktem, że czworokąt $CPFQ$ jest równoległobokiem. Dowieść, że jeśli $I \neq F$, to proste IC i IF są prostopadłe.

11. Wewnątrz czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg dany jest taki punkt P , że

$$\sphericalangle BPC = \sphericalangle BAP + \sphericalangle PDC.$$

Oznaczmy przez E, F, G rzuty prostokątne punktu P odpowiednio na proste AB, AD, DC . Udowodnić, że trójkąt FEF jest podobny do trójkąta PBC .

12. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest opisany na okręgu o promieniu r . Jaką największą możliwą wartość może przyjąć

$$\frac{1}{AC^2} + \frac{1}{BD^2}?$$

Rozwiązania

Zawody indywidualne grypy średniej

1. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. P jest punktem przecięcia przekątnych tego czworokąta. Wykazać, że:

$$\sqrt{P_{ABCD}} \geq \sqrt{P_{APB}} + \sqrt{P_{CPD}}$$

gdzie P_X oznacza pole figury X .

Rozwiązanie:

Podnieśmy nierówność obustronnie do kwadratu. Otrzymamy:

$$P_{ABCD} \geq P_{APB} + P_{CPD} + 2\sqrt{P_{APB} \cdot P_{CPD}}$$

oraz jak wiadomo: $P_{ABCD} = P_{APB} + P_{BPC} + P_{CPD} + P_{APD}$, więc równoważnie:

$$P_{BPC} + P_{APD} \geq 2\sqrt{P_{APB} \cdot P_{CPD}}$$

Zauważmy, że

$$\frac{P_{APB}}{P_{BPC}} = \frac{AP}{PC} = \frac{P_{APD}}{P_{CPD}}$$

więc $2\sqrt{P_{APB} \cdot P_{CPD}} = 2\sqrt{P_{BPC} \cdot P_{APD}}$ więc nierówność sprowadza się do następującej nierówności

$$P_{BPC} + P_{APD} \geq 2\sqrt{P_{BPC} \cdot P_{APD}}$$

która jest oczywista. Wszystkie przekształcenia były równoważne, więc teza jest udowodniona.

2. Niech $f(n)$ to liczba sposobów, na które można zapisać n jako sumę liczb całkowitych dodatnich. Przykładowo $f(4) = 5$, bo:

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$$

Ponadto $f(0) = 1$. Niech $g(n)$ to liczba sposobów, na które można zapisać n jako sumę liczb całkowitych dodatnich większych niż 1. Udowodnić, że dla $n \geq 1$ zachodzi $g(n) = f(n) - f(n-1)$.

Rozwiązanie:

Oznaczmy jako $h(n, k)$ ilość sposobów, na które można przedstawić n zgodnie z warunkami zadania oraz takich, w których występuje dokładnie k jedynek. Widzimy, że

$$f(n) = h(n, n) + h(n, n-1) + \dots + h(n, 1) + h(n, 0)$$

gdyż w każdym zapisie n jako sumę musi występować pewna ilość jedynek. Z definicji $h(n)$ oraz $g(n)$ wynika, że $h(n, k) = g(n-k)$. Zatem

$$f(n) = g(0) + g(1) + \dots + g(n-1) + g(n)$$

Teza zadania wynika z prostej indukcji. Dla małych n teza jest oczywista. Dla drugiego kroku zakładamy, że teza działa dla wszystkich liczb mniejszych od n . Zachodzi więc na mocy założenia indukcyjnego:

$$\begin{aligned} f(n) &= g(0) + g(1) + \dots + g(n-1) + g(n) = \\ &= f(0) + f(1) - f(0) + f(2) - f(1) + \dots + f(n-1) - f(n-2) + g(n) = \\ &= g(n) + f(n-1) \end{aligned}$$

gdyż widzimy, że wszystkie składniki sumy się skrócają. Zatem

$$f(n) - f(n-1) = g(n)$$

co było do pokazania.

3. Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończony ciąg liczb całkowitych dodatnich $x_1, x_2, \dots$, który spełnia

$$x_{n+2} = NWD(x_{n+1}, x_n) + 2018$$

oraz wśród elementów $x_1, x_2, \dots$ występuje dokładnie 10^{2018} różnych wyrazów.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że taki ciąg istnieje. Rozpatrzmy następujący ciąg y_i : $y_0 = 2$, $y_1 = 4$ oraz $y_{n+2} = (y_{n+1} - 1)(y_n - 1)$. Bezpośrednio z tej definicji wynika, że

$$NWD(y_{n+2} - 1, y_n - 1) = NWD(y_{n+1} - 1, y_n - 1) = 1$$

Niech $x_k = 2018 \cdot y_{t-k}$ gdzie $t = 10^{2018}$ oraz $1 \leq k \leq t$. Dla $k > t$ ustalmy $x_k = NWD(x_k, x_{k-1}) + 2018$. Udowodnimy, że następujący ciąg spełnia warunki zadania.

Wykażemy, że wzór z zadania spełniony jest dla dowolnego $k \leq t$.

$$x_k = NWD(x_{k-1}, x_{k-2}) + 2018$$

czyli równoważnie

$$2018y_{t-k} = 2018 \cdot NWD(y_{t-k+1}, y_{t-k+2}) + 2018$$

$$y_{t-k} = NWD((y_{t-k} - 1)(y_{t-k-1} - 1), (y_{t-k+1} - 1)(y_{t-k} - 1)) + 1$$

Ze spostrzeżenia o ciągu y_k wynika, że

$$NWD((y_{t-k} - 1)(y_{t-k-1} - 1), (y_{t-k+1} - 1)(y_{t-k} - 1)) = y_{t-k} - 1$$

więc po podstawieniu widzimy, że ciąg spełnia warunki zadania. Wystarczy pokazać, że ma on dokładnie t różnych elementów.

Z definicji y_n wynika, że $y_0 = 2$, $y_1 = 4$, $y_2 = 3$ oraz $y_i > y_{i-1}$ dla każdego $i > 2$. Więc wszystkie $x_1, \dots, x_t$ są różne.

Ponadto z definicji wynika, że $x_t = 2 \cdot 2018$, $x_{t-1} = 4 \cdot 2018$ oraz $x_{t-2} = 3 \cdot 2018$. Wynika z tego, że $x_k = 2 \cdot 2018$ lub $x_k = 3 \cdot 2018$ dla $k > t$ co można pokazać za pomocą indukcji.

4. Dane są trzy niewspółliniowe punkty kratowe A, B, C układu współrzędnych, takie że długość każdego z odcinków AB, BC, CA jest liczbą całkowitą. Znaleźć najmniejszą możliwą długość odcinka AB .

Rozwiązanie:

Wykażemy, że najmniejsza możliwa długość, to $AB = 3$. Rozpatrzmy następujące punkty $A = (0, 0)$, $B = (3, 0)$, $C = (0, 4)$. Wówczas wszystkie punkty są punktami kratowymi oraz $AB = 3$, $AC = 4$ i na mocy Twierdzenia Pitagorasa $BC = 5$. Wystarczy więc wykazać, że długości 1 oraz 2 nie są możliwe.

Przypuśćmy najpierw, że $AB = 1$. Wówczas AC oraz BC to liczby całkowite dodatnie. Bez straty ogólności $AC \geq BC$. Wówczas na mocy nierówności trójkąta $AB + BC > AC$, co prowadzi do nierówności $AB > AC - BC \geq 0$. $AC - BC$ jest liczbą całkowitą nieujemną mniejszą od 1, więc $AC = BC$. Ponadto, żeby $AB = 1$, to ten odcinek musi być równoległy do jednej z osi układu współrzędnych. Wtedy C leży na symetralnej AB , więc ma pewną współrzędną niecałkowitą, więc sprzeczność. Zatem AB nie może być równe 1.

Przypuśćmy więc, że $AB = 2$. Wówczas AB analogicznie musi być równoległe do osi układu, gdyż jedyne rozwiązanie równania $a^2 + b^2 = 4$ to $(0, 2)$ lub $(2, 0)$. Ponadto analogicznie $AB > AC - BC \geq 0$, więc albo $AC = BC$ albo $AC = BC + 1$. Jeśli $AB = AC$, to szukamy rozwiązań równania $a^2 = h^2 + 1$, gdzie $a = AC$ oraz h to długość wysokości. Jako, że je ona w trójkącie równoramiennym także środkową to $h \in \mathbb{Z}$. Rozwiązanie $a^2 = h^2 + 1$ ma dokładnie jedno rozwiązanie w liczbach całkowitych i jest to $h = 0, a = 1$, czyli sprzeczność. Zatem $AC = BC + 1$. Zatem jeden bok jest dłuższy od drugiego o 1.

Umieścimy bez straty ogólności punkt $A = (0, 0)$. Ponadto bez straty ogólności AB jest równoległe do poziomej osi współrzędnych, czyli $B = (2, 0)$. Możemy to założyć, gdyż możemy nasz trójkąt sobie przemieścić równoległe i nic się nie zmieni. Wówczas $C = (x, y)$, gdzie $y > 0$. Wówczas na mocy Twierdzenia Pitagorasa $AC = \sqrt{x^2 + y^2}$ oraz $BC = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$. Mamy więc dwa przypadki $AC = k$ oraz $BC = k + 1$ i drugi przypadek, gdy $AC = k + 1$, $BC = k$. Rozpatrzmy pierwszy z nich, drugi jest dokładnie analogiczny.

$$x^2 + y^2 = k^2$$

$$(x-2)^2 + y^2 = (k+1)^2$$

Z tych dwóch równości wynika wniosek $4x - 4 = 2k + 1$, który jest sprzeczny, bo mówi o równości dwóch liczb, z których jedna jest parzysta, a druga nieparzysta. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $AB = 2$ nie może zajść, co kończy dowód.

5. Znaleźć wszystkie liczby pierwsze p takie, że liczba $p^2 - p + 1$ jest sześcianem liczby całkowitej.

Rozwiązanie:

Niech $p^2 - p + 1 = q^2$. Wówczas $p^3 > 2p^2 - p$, gdyż jest to równoważna nierówność do $p(p-1)^2 > 0$, która jest oczywista. Zatem $p^3 > 2p^2 - p > p^2 - p + 1 = q^3$, więc $p > q$. Ponadto z równania, wynika że $p(p-1) = (q-1)(q^2 + q + 1)$. Zauważmy, że $NWD(p, q-1) = 1$ ponieważ $p > q > q-1$ oraz p jest liczbą pierwszą. Więc musi zachodzić $q-1 | p-1$. Zatem $p-1 = (q-1) \cdot k$, gdzie k jest liczbą całkowitą dodatnią. Podstawmy to do wyjściowego równania

$$k(q-1)(k(q-1)+1) = (q-1)(q^2 + q + 1)$$

co po przekształceniu daje równanie kwadratowe postaci

$$q^2 + q(1-k^2) + k^2 - k + 1 = 0$$

Żeby to równanie kwadratowe miało rozwiązanie, to wyznacznik $\Delta = (1-k^2)^2 - 4(k^2 - k + 1)$ musi być kwadratem. Po przekształceniu otrzymamy

$$\Delta = k^4 - 6k^2 + 4k - 3$$

Widzimy, że dla $k < 3$ zachodzi $\Delta < 0$, czyli sprzeczność. Więc $k \geq 3$. Zauważmy, że dla $k \geq 3$ spełniona jest następująca nierówność

$$(k^2 - 3)^2 = k^4 - 6k^2 + 9 \geq k^4 - 6k^2 + 4k - 3 = \Delta$$

Ponadto zachodzi (co wynika z prostych przekształceń)

$$(k^2 - 1)^2 > \Delta \geq (k^2 - 3)^2$$

Jednakże Δ jest kwadratem, więc musi wynosić $(k^2 - 2)^2$ lub $(k^2 - 3)^2$. Przyrównując widzimy, że pierwszy przypadek nie może zajść, a w drugim $k = 3$. Więc $p = 3q - 2$. Po podstawieniu do wyjściowego równania otrzymamy, że $9q^2 - 15q + 7 = q^3$, więc $q|7$, więc $q = 1$ lub $q = 7$. Jeśli $q = 1$, to $p = 3 - 2 = 1$, nie jest liczbą pierwszą. Jeśli $q = 7$, to $p = 19$ oraz warunki zadania są spełnione. Zatem jest to jedyna para liczb, która spełnia warunki zadania.

6. Prostokąt R o bokach nieparzystej długości jest podzielony na pewną liczbę prostokątów. Boki każdego z tych prostokątów są liczbami całkowitymi. Udowodnić, że istnieje prostokąt wewnątrz prostokąta R , dla którego odległości od boków R są albo wszystkie parzyste, albo nieparzyste.

Rozwiązanie:

Niech nieparzyste długości boków R to będą odpowiednio a oraz b . Podzielmy R na ab kwadracików jednostkowych i pokolorujmy je na dwa kolory - zielony i żółty we wzór szachownicy. Skoro a oraz b są nieparzyste, to rogi prostokąta R będą miały ten sam kolor, bez straty ogólności zielony. Nazwijmy prostokąt zielonym, jeśli wszystkie jego rogi są zielone, żółtym jeśli są żółte oraz mieszanym jeśli pewne jego rogi są żółte, a pewne zielone. Zauważmy, że

- każdy zielony prostokąt ma o jeden zielony kwadracik więcej,
- każdy żółty prostokąt ma o jeden żółty kwadracik więcej,
- każdy prostokąt mieszany ma dokładnie tyle samo kwadracików żółtych co zielonych.

Wynika z tego, że skoro R jest zielony, to istnieje prostokąt wewnątrz R , który także jest zielony. Niech to będzie prostokąt S . Niech odległości S od R to kolejno x, y, z, v . Lewy górny róg R ma ten sam kolor, co lewy górny róg S , co dzieje się wtedy i tylko wtedy gdy x oraz v mają tę samą parzystość. Analogicznie x oraz y mają tę samą parzystość (po analizowaniu prawego górnego rogu). Analogicznie y i z mają tę samą parzystość, co implikuje, że wszystkie x, y, z, v mają tę samą parzystość, co kończy dowód. $\square$

7. Udowodnić, że dla każdego n całkowitego dodatniego liczbę 2018^n można przedstawić jako sumę dwóch kwadratów liczb całkowitych.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że $2018 = 2 \cdot 1009$. Ponadto 1009 jest liczbą pierwszą postaci $4k + 1$, więc istnieją takie liczby całkowite a, b , że $1009 = a^2 + b^2$. Zatem $2018 = 2(a^2 + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2 = x^2 + y^2$. Zatem dla $n = 1$ teza jest prawdziwa. Załóżmy więc, że teza jest prawdziwa dla n . Wykażemy, że jest prawdziwa dla $n + 1$.

$$2018^{n+1} = 2018 \cdot 2018^n = (x^2 + y^2) \cdot (w^2 + z^2) = (xw + yz)^2 + (xz - yw)^2$$

gdyż na mocy założenia indukcyjnego $2018^n = w^2 + z^2$. Z faktu, że $xw + yz$ oraz $xz - yw$ są całkowite wynika teza.

8. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym $\sphericalangle ACB = 45$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC , punkt H jest punktem przecięcia wysokości trójkąta ABC . Prosta przechodząca przez punkt O i prostopadła do prostej CO przecina proste AC i BC odpowiednio w punktach K i L . Wykazać, że

$$OK + KH = OL + LH$$

Rozwiązanie:

Niech punkt D będzie spodkiem wysokości BH oraz punkt G odbiciem punktu H względem punktu D .

Lemat. *Punkt G leży na okręgu opisanym na ABC .*

Dowód. Niech punkt E będzie spodkiem wysokości AH . Wówczas czworokąt $ADEB$ jest cykliczny, bo $\sphericalangle ADB = \sphericalangle BEA = 90$, zatem $\sphericalangle HBE = \sphericalangle HAD$. Z definicji G mamy: $\sphericalangle GAD = \sphericalangle DAH = \sphericalangle GBC$, więc czworokąt $ABCG$ jest cykliczny, co kończy dowód. $\square$

Na mocy lematu punkt G leży na okręgu opisanym na ABC . Ponadto skoro $\sphericalangle DCB = 45$ oraz $\sphericalangle CDB = 90$, to $\sphericalangle DBC = 45$. Ponadto $\sphericalangle GOC = 2 \cdot \sphericalangle GBC = 2 \cdot 45 = 90$. Zauważmy, że $\sphericalangle KOC = 90$, więc punkty G, K, O są współliniowe. Z definicji punktu G wynika, że $GK = KH$, więc $OK + HK = OK + GK = GO = r$, gdzie r jest długością promienia opisanego na trójkącie ABC . Analogicznie dowodzimy, że $OL + LH = r$, co kończy dowód. $\square$

9. Znaleźć wszystkie pary funkcji $f, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, które dla każdych $x, y \in \mathbb{R}$ spełniają równanie

$$f(x^2 + yh(x)) = xh(x) + f(xy)$$

Rozwiązanie:

Podstawiając $x = 0$ dostajemy $f(yh(0)) = f(0)$. Jeśli $|h(0)| > 0$, to $f(y) = c$ dla każdego y oraz $h(0) = b$ oraz po podstawieniu tych wartości do wyjściowego równania dostaniemy $h(x) = 0$ dla $|x| > 0$. Widzimy, że pary funkcji tej postaci spełniają warunki zadania.

Przypuśćmy więc, że $h(0) = 0$. Przypuśćmy, że istnieje taki x różny od 0, że $h(x) = 0$. Wówczas po podstawieniu do wyjściowego równania dostaniemy $f(x^2) = f(xy)$. Skoro x jest różny od 0 oraz y jest dowolny, to dostajemy

$f(y) = f(x^2) = c$, czyli funkcja f jest stała. Po podstawieniu do wyjściowego równania otrzymujemy, że $h(x) = 0$ dla każdego x poza $x = 0$ oraz $h(x) = b$, gdzie b jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Przypuśćmy więc, że dla żadnego $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ nie zachodzi $h(x) = 0$. Podstawmy dla x różnego od 0:

$$y = \frac{x^2}{x - h(x)}$$

Dostaniemy następujące równanie

$$f(x^2 + \frac{x^2 h(x)}{x - h(x)}) = xh(x) + f(\frac{x^3}{x - h(x)})$$

co jest równoważne:

$$f(\frac{x^3}{x - h(x)}) = xh(x) + f(\frac{x^3}{x - h(x)})$$

więc $xh(x) = 0$ więc $h(x) = 0$, co jest sprzeczne, więc nie mogliśmy wykonać takiego podstawienia, więc $x = h(x)$. Podstawiając do głównego równania dostaniemy $f(x^2 + xy) = x^2 + f(xy)$. Podstawiając kolejno za $y = 0$ oraz $y = -x$ dostaniemy, że wówczas $f(x) = x + c$, gdyż każda liczba rzeczywista jest postaci t^2 lub $-t^2$ dla pewnej $t \in \mathbb{R}$. Podstawiając, widzimy, że funkcje tych postaci spełniają warunki zadania.

Zawody indywidualne grupy starszej

6. Dane są dwie funkcje kwadratowe

$$f(x) = x^2 + a_1x + b_1 \quad \text{oraz} \quad g(x) = x^2 + a_2x + b_2,$$

gdzie a_1, a_2, b_1, b_2 są liczbami rzeczywistymi. Wiadomo, że równania $f(g(x)) = 0$ oraz $g(f(x)) = 0$ nie mają rzeczywistego rozwiązania. Pokazać, że co najmniej jedno z równań $f(f(x)) = 0$ i $g(g(x)) = 0$ nie ma rozwiązania rzeczywistego.

Rozwiązanie:

Załóżmy przeciwnie, że istnieje pierwiastek równań $f(f(x)) = g(g(x)) = 0$ tzn. istnieje miejsce zerowe a funkcji f takie, że równanie $f(x) = a$ ma rozwiązanie rzeczywiste. Zatem $\Delta_{f-a} \geq 0$, gdzie Δ_h oznacza wyróżnik funkcji kwadratowej h . Oznacza to, że $\Delta_f + 4a \geq 0$. Podobnie istnieje pierwiastek b funkcji g taki, że $\Delta_g + 4b \geq 0$. Wobec tego

$$\Delta_f + \Delta_g + 4a + 4b \geq 0. \quad (1)$$

Jednocześnie z warunków zdania wynika, że funkcje $g(x) - a$ oraz $f(x) - b$ nie mają pierwiastka rzeczywistego. Tym samym $\Delta_g + 4a < 0$ oraz $\Delta_f + 4b < 0$. Dodając je stronami otrzymamy sprzeczność z (1). $\square$

7. Dane są liczby całkowite dodatnie a, b i c takie, że

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2.$$

Pokazać, że $ab + bc + ca$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie:

Dana w treści zadania zależność jest równoważna

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca).$$

Rozpatrując powyższy związek jako równanie kwadratowe zmiennej a , widzimy, że jego wyróżnik równy $16bc$ musi być kwadratem liczby całkowitej. Zatem $bc = x^2$ dla pewnej liczby całkowitej x . Ze wzoru na pierwiastki równania kwadratowego mamy, że $a = b + c \pm 2x$, więc $b + c = a + \alpha \cdot 2x$, gdzie $\alpha \in \{-1, 1\}$. Ostatecznie

$$ab + bc + ca = x^2 + a(b + c) = x^2 + a(a + 2\alpha \cdot x) = (a + \alpha \cdot x)^2.$$

□

8. Punkt M jest środkiem boku BC trójkąta ABC . Środkowa AM przecina okrąg wpisany γ w trójkąt ABC , w punktach K i L . Proste przechodzące przez K, L równoległe do BC przecinają ponownie γ w punktach X i Y . Niech proste AX, AY przecinają BC w P i Q . Wykazać, że $BP = CQ$.

Rozwiązanie:

Lemat: Niech ABC będzie trójkątem, w którym $b \neq c$. M to środek BC . D, E, F to punkty styczności okręgu wpisanego (I, r) do boków AB, AC, AB . Środkowa AM przecina okrąg wpisany w punktach K, L . $S = EF \cap AM$

Teza: $I \in SD$ i $(A, K; S, L) = 1$

D: Niech T będzie spodkiem wysokości z A na BC

$$\frac{FB}{FA}MC + \frac{EC}{EA}MB = \frac{SM}{SA}BC \Rightarrow \frac{SM}{SA} = \frac{a}{b+c-a} \quad (1)$$

$$MD = \frac{1}{2}|b-c|, \quad DT = \frac{(p-a)|b-c|}{a}, \quad \frac{DM}{DT} = \frac{a}{b+c-a} \quad (2)$$

Z relacji (1) i (2) dostajemy $\frac{SM}{SA} = \frac{DM}{DT} \Rightarrow SD \parallel AT \Rightarrow I \in SD$.

Stosunek harmoniczny wynika z tego, że EF -biegunowa A względem wpisanego.

Dowód zadania:

$$KX \parallel LY \iff KXLY\text{-trapez równoramienny} \iff S = XY \cap KL \Rightarrow \frac{AK}{AL} = \frac{SK}{SL} = \frac{KX}{YL} \Rightarrow \frac{AK}{AL} = \frac{KX}{YL} \quad (1).$$

$$\text{Czyli } \frac{AM}{AK} = \frac{MP}{KX} \quad (2)$$

$$\frac{AL}{AM} = \frac{LY}{MQ} \quad (3)$$

Wymnażając (1), (2) i (3) dostajemy $MP = MQ \iff BP = CQ$

□

9. Rozwiązać w liczbach całkowitych następujące równanie

$$2x^6 = y^3 + 2.$$

Rozwiązanie:

Łatwo zauważyć, że $2 \mid y$. Niech $y = 2z$. Mamy

$$8z^3 = 2(x^6 - 1) \iff 4z^3 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) \iff z^3 = \frac{x^3 - 1}{2} \frac{x^3 + 1}{2}.$$

Iloczyn dwóch względnie pierwszych liczb jest sześcianem, więc obie są sześcianem liczby całkowitej. Czyli widzimy, że dwie kolejne liczby są sześcianami, a jedyne takie pary to $(-1, 0)$ i $(0, 1)$. Czyli $y = 0$, $x = \pm 1$

□

10. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie a, b, c i d takie, że $ab = cd$ oraz $a + b + c + d$ jest liczbą pierwszą.

Rozwiązanie:

Niech $\frac{a}{c} = \frac{m}{n}$, gdzie m i n są względnie pierwsze. Wtedy $mb = nd$, więc $n \mid b$, skąd $b = kn$ i $d = km$ dla pewnych k, m i n . Niech $l = \frac{c}{n}$, wtedy $a = lm$, $b = kn$, $c = ln$ i $d = km$. Wówczas $a + b + c + d = (l + k)(m + n)$ czyli jest liczbą złożoną. $\square$

11. Niech S będzie skończonym zbiorem punktów na płaszczyźnie, z których żadne 3 nie są współliniowe. Dla każdego wielokąta wypukłego P o wierzchołkach w S niech $a(P)$ =liczba wierzchołków P i $b(P)$ =liczba punktów z leżących na zewnątrz P . Odcinek, punkt i zbiór pusty uważamy jako wielokąt wypukły o odpowiednio 2,1,0 wierzchołkach. Wykazać, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_P x^{a(P)} (1-x)^{b(P)} = 1$$

gdzie suma jest po wszystkich P o wierzchołkach w S

Rozwiązanie:

Niech prawdopodobieństwo, że jakiś punkt jest czarny wynosi x . Teraz spójrzmy na pewien wielokąt P . Prawdopodobieństwo, że wszystkie jego wierzchołki są czarne wynosi $x^{a(P)}$, a prawdopodobieństwo, że wszystkie jego punkty na zewnątrz są białe wynosi $(1-x)^{b(P)}$. Nasza suma to oczekiwana liczba wielokątów P z wszystkimi wierzchołkami czarnymi i wszystkimi punktami na zewnątrz białymi. Dla każdego takiego kolorowania istnieje dokładnie jeden taki wielokąt, więc nasza suma wynosi 1 dla każdego $x \in (0,1)$ ale ta suma jest wielomianem, który nieskończenie wiele razy przyjmuje wartość 1 więc jest stale równy 1 c.k.d. $\square$

12. Dane są liczby rzeczywiste dodatnie a, b, c i d takie, że $a + b + c + d = 4$. Pokazać, że

$$\frac{a^4}{(a+b)(a^2+b^2)} + \frac{b^4}{(b+c)(b^2+c^2)} + \frac{c^4}{(c+d)(c^2+d^2)} + \frac{d^4}{(d+a)(d^2+a^2)} \geq 1.$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez X lewą stronę powyższej nierówności. Niech

$$Y = \frac{b^4}{(a+b)(a^2+b^2)} + \frac{c^4}{(b+c)(b^2+c^2)} + \frac{d^4}{(c+d)(c^2+d^2)} + \frac{a^4}{(d+a)(d^2+a^2)}.$$

Widzimy, że

$$X - Y = \sum_{\text{cyc}} \frac{a^4 - b^4}{(a+b)(a^2+b^2)} = \sum_{\text{cyc}} \frac{(a^2+b^2)(a+b)(a-b)}{(a+b)(a^2+b^2)} = \sum_{\text{cyc}} (a-b) = 0,$$

więc $X = Y$.

Zatem wystarczy pokazać, że $X + Y \geq 2$. Z drugiej strony

$$X + Y = \sum_{\text{cyc}} \frac{a^4 + b^4}{(a+b)(a^2 + b^2)},$$

więc jeśli pokażemy że

$$\frac{a^4 + b^4}{(a+b)(a^2 + b^2)} \geq \frac{a+b}{4},$$

to z równości $a + b + c + d = 4$ dostaniemy tezę.

Ostatnia nierówność jest równoważna nierówności

$$a^4 + b^4 \geq \frac{(a+b)^2}{4} \cdot \frac{a^2 + b^2}{2},$$

która jest konsekwencją nierówności $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ oraz $(a^2 + b^2)^2 \leq 2(a^4 + b^4)$. $\square$

13. Dany jest ciąg liczb całkowitych dodatnich $(a_n)_{n \geq 1}$ takie, że $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ oraz

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2 \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Pokazać, że dla dowolnego $m \geq 1$, liczba $a_m a_{m+1}$ jest wyrazem ciągu $(a_n)_{n \geq 1}$.

Rozwiązanie:

Przez indukcję łatwo pokazujemy, że $a_n = (n-1)^2 + 1$ dla $n \geq 1$. Wobec tego

$$a_m a_{m+1} = ((m-1)^2 + 1)(m^2 + 1) = (m(m-1) + 1)^2 + 1 = a_{m(m-1)+2}.$$

$\square$

14. Na bokach BC i CA trójkąta ABC zbudowano (po jego zewnętrznej stronie) trójkąty BCD i ACE , przy czym

$$AE = BD \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle BDC + \sphericalangle AEC = 180^\circ.$$

Punkt F leży na boku AB i jest wyznaczony przez warunek

$$\frac{AF}{FB} = \frac{DC}{CE}.$$

Dowieść, że z odcinków o długościach $CD + CE$, BC i AC można zbudować trójkąt, który jest podobny do trójkąta DEF .

Rozwiązanie:

Niech N będzie takim punktem leżącym na prostej AE , że $\sphericalangle ECN = \sphericalangle BCD$. Na mocy założeń, trójkąty BCD i NCE są podobne. Mamy następującą równość

$$\frac{AE}{EN} = \frac{BD}{EN} = \frac{DC}{CE} = \frac{AF}{FB},$$

co oznacza, że proste FE i BN są równoległe. Zatem

$$\frac{EF}{NB} = \frac{AF}{AF + FB} = \frac{1}{1 + \frac{FB}{AF}} = \frac{1}{1 + \frac{CE}{CD}} = \frac{CD}{CD + CE}. \quad (2)$$

Ponieważ $\sphericalangle BCN = \sphericalangle DCE$ oraz

$$\frac{NC}{CB} = \frac{EC}{CD},$$

więc trójkąty BCN i DCE są podobne. Stąd otrzymujemy równość

$$\frac{NB}{ED} = \frac{BC}{CD}, \quad (3)$$

jak również

$$\sphericalangle DEF = \sphericalangle DCB \quad (4)$$

(gdyż po obrocie prostej ED o kąt DCB , otrzymamy prostą równoległą do prostej EF).

Niech M będzie takim punktem leżącym na prostej CD , że $EC = DM$. Wtedy trójkąty BDM i AEC będą przystające. Mnożąc stronami równości 2 i 3 dostajemy

$$\frac{EF}{ED} = \frac{BC}{CD + CE} = \frac{BC}{CM},$$

co na mocy równości 4 dowodzi, że trójkąty DEF i MCB są podobne. Pozostaje zauważyć, że trójkąt MCB jest zbudowany z odcinków o długościach $CD + CE$, BC i AC . $\square$

15. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ takie, że dla dowolnych $x, y \in (0, \infty)$ zachodzi równość

$$xf(x^2)f(f(y)) + f(yf(x)) = f(xy)(f(f(x^2)) + f(f(y^2))).$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez $\mathcal{P}(x, y)$ powyższe równanie funkcyjne. Rozpatrując $\mathcal{P}(1, 1)$, $\mathcal{P}(x, 1)$, dostajemy

$$f(f(y)) = f(y)f(f(y^2)) \quad \text{oraz} \quad xf(x^2) = f(x).$$

Wobec tego mamy następującą równość

$$f(f(x^2)) = \frac{f(f(x))}{f(x)} = \frac{f(x) \cdot f(f(x)^2)}{f(x)} = f(f(x)^2). \quad (5)$$

Pokażemy teraz, że f jest iniekcją. Istotnie niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ będą takie, że $f(\alpha) = f(\beta)$. Wtedy

$$f(f(\alpha^2)) = \frac{f(f(\alpha))}{f(\alpha)} = \frac{f(f(\beta))}{f(\beta)} = f(f(\beta^2)).$$

Porównując teraz równania $\mathcal{P}(\alpha, y)$ oraz $\mathcal{P}(\beta, y)$, dostajemy że dla dowolnego $y \in \mathbb{R}^+$ zachodzi równość

$$\begin{aligned} f(\alpha y) &= \frac{\alpha f(\alpha^2) f(f(y)) + f(y f(\alpha))}{f(f(\alpha^2)) + f(f(y^2))} = \frac{f(\alpha) f(f(y)) + f(y f(\alpha))}{f(f(\alpha^2)) + f(f(y^2))} = \\ &= \frac{f(\beta) f(f(y)) + f(y f(\beta))}{f(f(\beta^2)) + f(f(y^2))} = \frac{\beta f(\beta^2) f(f(y)) + f(y f(\beta))}{f(f(\beta^2)) + f(f(y^2))} = f(\beta y). \end{aligned}$$

Wobec tego

$$\alpha y f(y^2) = \alpha y f(\alpha^2 y^2) = f(\alpha y) = f(y) = f(\beta y) = \beta y f(\beta^2 y^2) = \beta y f(y^2),$$

więc $\alpha = \beta$.

Iniektywność f wraz z równaniem (5) daje $f(x^2) = f(x)^2$, zatem

$$f(x) = x f(x^2) = x f(x)^2,$$

skąd

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}^+$$

jest jedynym rozwiązaniem równania $\mathcal{P}(x, y)$. □

Mecz matematyczny grupy średniej

1. Liczby rzeczywiste x, y, z spełniają warunki:

$$x + y + z = 9, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 33.$$

Wyznaczyć wartości jakie może przyjmować liczba xyz .

Rozwiązanie:

Oznaczmy $xyz = c$. Rozważmy wielomian $P(t) = (t - x)(t - y)(t - z) = t^3 - (x + y + z)t^2 + (xy + yz + zx)t - xyz$. Mamy $x + y + z = 9$ oraz $xy + yz + zx = \frac{1}{2}[(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)] = 24$. Zatem $P(t) = t^3 - 9t^2 + 24t - c$.

Otrzymaliśmy, że jeśli liczby x, y, z spełniają nałożone warunki, to wielomian P rozkłada się na czynniki liniowe. Odwrotnie, jeśli P rozkłada się na czynniki liniowe, to jego pierwiastki x, y, z spełniają podane warunki. Pozostaje stwierdzić, dla jakich c wielomian P ma trzy pierwiastki rzeczywiste (z uwzględnieniem krotności).

$P'(t) = 3(t^2 - 6t + 8) = 3(t - 2)(t - 4)$, więc P jest rosnący na przedziale $(-\infty; 2]$, malejący na przedziale $[2; 4]$ i rosnący na przedziale $[4; +\infty)$.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym rozkładalności na czynniki liniowe jest więc układ nierówności $P(2) \geq 0$, $P(4) \leq 0$, co jest równoważne $16 \leq c \leq 20$. Zatem xyz może przyjmować wartości z przedziału $[16; 20]$.

2. Niech liczby całkowite dodatnie $a_1, a_2, \dots, a_n, k$ i M spełniają warunki:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = k \quad \text{ i } \quad a_1 a_2 \dots a_n = M.$$

Udowodnić, że jeśli $M > 1$ to wielomian

$$P(x) = M(x + 1)^k - (x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n)$$

nie ma pierwiastków dodatnich.

Rozwiązanie:

Ponieważ $x > 0$, to z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną

$$\frac{x + a_i}{a_i} = \frac{x + 1 + a_i - 1}{a_i} \geq \sqrt[a_i]{(x + 1) \cdot 1^{a_i - 1}} = (x + 1)^{\frac{1}{a_i}}$$

czyli $x + a_i \geq a_i(x + 1)^{\frac{1}{a_i}}$ dla $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Zatem

$$(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n) \geq a_1 a_2 \dots a_n (x + 1)^{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} = M(x + 1)^k$$

Założmy, że dla pewnego $x_1 > 0$ zachodzi równość w powyższej nierówności. Wtedy dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ musiałoby zachodzić $x_1 + a_i = a_i(x_1 + 1)^{\frac{1}{a_i}}$. Równość średniej arytmetycznej i geometrycznej zachodzi, gdy wszystkie liczby, z których wyciągamy średnie, są sobie równe. Jeżeli zatem dla pewnego i $a_i > 1$ (któraś z liczb a_i będzie większa od 1, bo $M > 1$), to równość $x_1 + a_i = a_i(x_1 + 1)^{\frac{1}{a_i}}$ implikuje $x_1 + 1 = 1$, czyli $x_1 = 0$, sprzeczność z dodatniością x_1 . Stąd $\forall x \in \mathbb{R}$

$$(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n) > M(x + 1)^k$$

3. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające równanie

$$f(xf(x) + 2y) = f(x^2) + f(y) + x + y - 1$$

dla każdych $x, y \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie:

Niech $P(x, y)$ będzie podstawieniem w tym równaniu. Z $P(0, 0)$ dostajemy $f(0) = 0$. Z podstawienia $P(x, -xf(x))$ otrzymujemy $f(x^2) = xf(x) - x + 1$ (1). Natomiast z $P(0, x)$ wynika, że $f(2x) = f(x) + x$ (2). Obliczymy teraz wartość $f(4x^2)$ na dwa sposoby.

Podstawiając $2x$ do równania (1) dostajemy $f(4x^2) = 2xf(2x) - 2x + 1 = 2xf(x) + 2x^2 - 2x + 1$. Korzystając z równania (2) otrzymujemy $f(4x) = f(2x) + 2x = f(x) + 3x$. Podstawiając x^2 za x do tego równania otrzymujemy $f(4x^2) = f(x^2) + 3x^2 = xf(x) - x + 1 + 3x^2$. Porównując te wartości dostajemy $xf(x) = x^2 + x$, czyli $f(x) = x + 1$. Łatwo sprawdzić, że ta funkcja spełnia warunki zadania.

4. Znajdź wszystkie n całkowite dodatnie, że $1 + \lfloor \sqrt{2n} \rfloor$ dzieli $2n$.

Rozwiązanie:

Niech k będzie taką liczbą całkowitą, że $k \leq \sqrt{2n} < k + 1$, więc $\lfloor \sqrt{2n} \rfloor = k$. Mamy też, że $k^2 \leq 2n < (k + 1)^2$. Zauważmy, że $k + 1 \mid (k - 1)(k + 1) = k^2 - 1 < 2n$. Następnymi wielokrotnościami $k + 1$, są $k(k + 1)$ oraz $(k + 1)^2 > 2n$. Zatem jedyną możliwą wartością jaką może przyjmować $2n$ jest $k(k + 1)$.

Czyli otrzymaliśmy, że wszystkie n postaci $\frac{k(k + 1)}{2}$ dla k całkowitego dodatniego spełniają podzielność z treści.

5. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych (a, b) , że

$$a! + b! = a^b + b^a.$$

Rozwiązanie:

Jeśli $a = b$ to $a! = a^a$, czyli $a = 1$.

Teraz, bez starty ogólności, możemy założyć, że $a > b$. Rozpatrzmy dwa przypadki:

I. $NWD(a, b) > 1$

Zatem istnieje p pierwsze takie, że $p | NWD(a, b)$. Niech $a = pm$, $b = pn$. Czyli $(pm)! + (pn)! = (pm)^{pn} + (pn)^{pm}$ dla $m > n$. Zatem $v_p((pn)!) < v_p((pm)!)$. Ze wzoru Legendre'a otrzymujemy $v_p(\text{LHS}) = v_p((pn)!) = \lfloor \frac{pn}{p} \rfloor + \lfloor \frac{pn}{p^2} \rfloor + \dots < n + \frac{n}{p} + \dots = \frac{pn}{p-1} \leq pn \leq v_p(\text{RHS})$ - sprzeczność.

II. $NWD(a, b) = 1$

Niech $a = b + k$, $k > 0$, $NWD(b, k) = 1$. Otrzymujemy $(b+k)! + b! = (b+k)^b + b^{b+k}$, zatem $b | (b+k)^b$, co daje nam, że $b | k^b$, czyli $b = 1$. Otrzymujemy z tego parę $(2, 1)$.

Dostaliśmy, że rozwiązaniami tego równania są pary $(1, 1)$, $(1, 2)$ oraz $(2, 1)$, co kończy dowód.

6. Liczba $p = 4k + 1$ jest pierwsza. Wykaż, że $p | k^k - 1$.

Rozwiązanie:

Udowodnijmy najpierw następujący lemat: istnieje liczba $a \in \mathbb{Z}$ taka, że $k \equiv a^4 \pmod{p}$. a spełnia ten warunek, jeżeli $\frac{p-1}{4} \equiv a^4 \pmod{p} \iff 0 \equiv 4a^4 + 1 \pmod{p}$. Z tożsamości Sophie Germain $4a^4 + 1 = (2a^2 + 2a + 1)(2a^2 - 2a + 1)$. Równanie kwadratowe ma rozwiązanie modulo $p \neq 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy jego wyróżnik jest resztą kwadratową modulo p . Ponieważ dla równania $2a^2 + 2a + 1 \Delta = -4$, a $(\frac{-1}{p}) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{2k} = 1$, to $(\frac{-4}{p}) = (\frac{-1}{p}) \cdot (\frac{2^2}{p}) = 1$. Stąd istnieje a będące rozwiązaniem $2a^2 + 2a + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, więc również równania $4a^4 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$.

Na mocy powyższego lematu $k^k - 1 \equiv (a^4)^{\frac{p-1}{4}} - 1 = a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$, gdzie ostatnie przystawanie wynika z małego twierdzenia Fermata.

7. Na tablicy jest napisane $n \geq 3$ liczb całkowitych dodatnich. Ruch polega na wybraniu trzech liczb a, b, c takich, że istnieje niezdegenerowany nierównoboczny trójkąt o bokach a, b, c i zamianie tych liczb na $a+b-c, b+c-a, c+a-b$. Udowodnić, że można wykonać jedynie skończenie wiele ruchów.

Rozwiązanie:

Będziemy rozważać iloczyn wszystkich liczb na tablicy. Weźmy a, b, c takie, że możemy wykonać ruch. Skoro a, b, c są długościami boków trójkąta to istnieją

takie x, y, z , że $a = x + y, b = y + z, c = z + x$. Z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną otrzymujemy $(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) = 8xyz \leq (x + y)(y + z)(z + x) = abc$. Równość nigdy nie zachodzi, bo a, b, c są różne, więc x, y, z też. Zatem po każdym ruchu iloczyn wszystkich liczb na tablicy się zmniejsza. Ponieważ jest on zawsze dodatni to nie może istnieć nieskończony ciąg ruchów, co kończy dowód.

8. Dana jest tablica o wysokości m i szerokości n . W pola tej tablicy wpisano liczby $1, 2, \dots, n$, przy czym każda z tych liczb występuje w dokładnie m polach tablicy. Wykaż, że można tak poprzestawiać liczby wewnątrz każdej z kolumn, aby każdy wiersz zawierał każdą z liczb $1, 2, \dots, n$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że wystarczy wykazać, że możemy tak poprzestawiać liczby wewnątrz kolumn, aby pierwszy wiersz od góry zawierał wszystkie liczby $\{1, 2, \dots, n\}$. Możemy wtedy bowiem zastosować indukcję ze względu na m : gdy pierwszy wiersz będzie spełniał warunki zadania, liczby z pozostałej tablicy $(m - 1) \times n$ możemy poprzestawiać na mocy założenia indukcyjnego.

W dowodzie wykorzystamy twierdzenie Halla. Niech kolumny będą chłopcami, zaś liczby $1, 2, \dots, n$ - dziewczętami. Powiemy, że kolumna lubi liczbę i , jeżeli liczba ta znajduje się w tej kolumnie. Zauważmy, że dowolne k kolumn zawiera $m \cdot k$ liczb. Wśród $k \cdot m$ liczb musi być co najmniej k różnych, zatem każda grupa k chłopców lubi co najmniej k dziewcząt. Stąd możemy zastosować tw. Halla, a więc każdej kolumnie można przyporządkować znajdującą się w niej liczbę, którą umiejscowimy na samej górze. W ten sposób w górnym wierszu znajdą się wszystkie liczby $\{1, 2, \dots, n\}$.

9. Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg ω . Różne okręgi ω_1, ω_2 leżą wewnątrz ω , są styczne do ω , BC i dwusiecznej kąta $\sphericalangle BAC$ oraz leżą po tej samej stronie prostej BC co A . Wykaż, że okręgi ω_1 i ω_2 są styczne.

Rozwiązanie:

Niech M będzie środkiem łuku BC okręgu ω niezawierającego punktu A . Wtedy AM jest dwusieczną kąta $\sphericalangle BAC$. Rozważmy inwersję o środku w M i promieniu MB . Okrąg ω przejdzie w tej inwersji na prostą BC , natomiast prosta BC przejdzie na ω . Ponadto prosta AM przejdzie na samą siebie. Okręgi ω_1 i ω_2 będą w związku z tym musiały przejść na same siebie. Jeżeli zatem X_1 i X_2 to punkty styczności ω_1 i ω_2 z AM , to $MX_1^2 = MX_2^2$, czyli $X_1 = X_2$.

10. Dany jest trójkąt ABC . I i O to odpowiednio środek okręgu wpisanego i opisanego. Wykaż, że $\sphericalangle AIO \leq 90^\circ$ wtedy i tylko wtedy, gdy $AB + AC \geq 2BC$.

Rozwiązanie:

Niech M będzie środkiem łuku okręgu opisanego na ABC niezawierającego punktu A oraz niech N będzie środkiem odcinka AM . Ponieważ AM to cięciwa okręgu opisanego, $\sphericalangle ANO = 90^\circ$. Skoro $\sphericalangle AIO \leq 90^\circ$, I leży na odcinku MN , czyli $AI \geq IM$. Niech $\sphericalangle BAC = 2\alpha$. Wtedy $AF = \cos \alpha \cdot AI$, gdzie F to punkt styczności okręgu wpisanego w $\triangle ABC$ z AC . Na mocy twierdzenia o trójkącie, $MI = MB$. Ponadto $\frac{1}{2}BC = \cos \alpha \cdot BM$ ($\sphericalangle CBM = \sphericalangle CAM = \alpha$). Zatem $AF = \cos \alpha \cdot AI \geq \cos \alpha \cdot MB = \frac{1}{2}BC$, czyli $BC \leq 2AF = AC + AB - BC$, skąd teza.

11. W trójkącie ABC niech ω będzie okręgiem dopisanym stycznym do odcinka BC . Niech punkty D , E i F to punkty styczności ω odpowiednio z prostymi BC , CA i AB . Okrąg opisany na trójkącie AEF przecina prostą BC w P i Q . Niech M to środek odcinka AD . Wykaż, że okrąg MPQ jest styczny do ω .

Rozwiązanie:

Niech J to środek ω , X to drugi punkt przecięcia AD z ω , S to drugi punkt przecięcia prostej AD z okręgiem opisanym na trójkącie MPQ . Wykażemy, że X jest punktem styczności ω i okręgu opisanego na MPQ . Zauważmy, że punkt J leży na ω , ponieważ $\sphericalangle JFA = \sphericalangle JEA = 90^\circ$. Wynika stąd jeszcze, że $\sphericalangle JSA = 90^\circ$, więc S jest rzutem J na odcinek DX . Z symetrii otrzymujemy, że punkt S jest środkiem odcinka DX . Z potęgi punktu

$$DP \cdot DQ = DA \cdot DS = 2DM \cdot \frac{1}{2}DX = DM \cdot DS,$$

czyli punkty M, P, Q, X leżą na jednym okręgu. Niech R to taki punkt na prostej BC , że prosta RX jest styczna do ω . Zauważmy, że DX i EF to odpowiednio biegunowe R i A względem ω . Skoro A leży na prostej DX to z twierdzenia La Hire'a EF przechodzi przez R . Z potęgi punktu $RP \cdot RQ = RE \cdot RF = RX^2$. Zatem prosta RX również jest styczna do okręgu MPQ , co kończy dowód.

Mecz matematyczny grupy starszej

1. Rozstrzygnąć, czy istnieje liczba naturalna $n > 1$ o następującej własności: Dowolna liczba n -cyfrowa zapisana trzy razy z rzędu tworzy liczbę $(3n)$ -cyfrową podzieloną przez n^2 .

Rozwiązanie:

Liczba $n = 37$ spełnia warunki zadania. Istotnie własność podana w zadaniu wynika z podzielności $37^2 \mid 10^{74} + 10^{37} + 1$, która wynika z podzielności $37^2 \mid 10^{111} - 1$, którą uzyskamy podnosząc $1000 = 27 \cdot 37 + 1$ do potęgi 37. $\square$

2. Niech a, b, c będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Pokazać, że istnieje liczba całkowita dodatnia n taka, że liczba

$$(a^2 + n)(b^2 + n)(c^2 + n)$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie:

Niech $n = ab + bc + ca$, wtedy

$$\begin{aligned}(a^2 + n)(b^2 + n)(c^2 + n) &= (a^2 + ab + bc + c)(b^2 + ab + bc + ca)(c^2 + ab + bc + ca) = \\ &= (a + b)^2(b + c)^2(c + a)^2.\end{aligned}$$

$\square$

3. Niech a, b, c, d, e będą różnymi liczbami całkowitymi dodatnimi, że $a^4 + b^4 = c^4 + d^4 = e^5$. Pokazać, że $ac + bd$ jest liczbą złożoną.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że $ac + bd$ dzieli

$$a^4c^4 - b^4d^4 = (e^5 - b^4)c^4 - b^4(e^5 - c^4) = e^5(c^4 - b^4) = e(b + c)(b - c)(b^2 + c^2).$$

Jeśli $ac + bd$ byłoby liczbą pierwszą, to $ac + bd$ musi dzielić co najmniej jedną z liczb $e, b+c, b-c, b^2+c^2$. Ponieważ $\max\{e, b+c, b-c\} < ac+bd$, to $ac+bd \mid b^2+c^2$. W szczególności $ac + bd$ dzieli

$$a(b^2 + c^2) - c(ac + bd) = b(ab - cd).$$

Jednakże $ac + bd$ nie dzieli b więc $ac + bd \nmid ab - cd$. Bez szkody załóżmy, że $ab > cd$, więc $ac + bd \leq ab - cd$ lub inaczej $a(b - c) \geq d(b + c)$. Ostatnia nierówność implikuje, że $b > c$ oraz $a > d$, co przeczy równości $a^4 + b^4 = c^4 + d^4$. $\square$

4. Liczby rzeczywiste nieujemne $x, y, z \geq 0$ są takie, że $x^2 + y^2 + z^2 = 2(xy + yz + zx)$. Udowodnić, że

$$\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{2xyz}.$$

Rozwiązanie:

Mamy, że

$$\frac{x + y + z}{3} \geq \frac{\frac{x+y-z}{2} + \frac{x+y-z}{2} + 2z}{3} \geq \sqrt[3]{2z \frac{(x+y-z)^2}{4}} = \sqrt[3]{2xyz}.$$

$\square$

5. Niech $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$. Udowodnić, że istnieją $b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{Z}_+$ takie, że dla każdego $0 \leq i \leq n$ zachodzi nierówność $a_i \leq b_i \leq 2a_i$ oraz

$$P(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$$

jest nierozkładalny w $\mathbb{Q}[x]$.

Rozwiązanie:

Możemy wybrać takie b_i , że $b_0 \equiv b_1 \equiv \dots \equiv b_{n-1} \equiv 2 \pmod{4}$ oraz $b_n \equiv 1 \pmod{2}$. Wtedy $P(x)$ jest nierozkładalny na mocy kryterium Eisensteina. $\square$

6. Ciąg liczb rzeczywistych $\{a_n\}_{n \geq 0}$ jest zdefiniowany następująco

$$a_0 = -1, \quad \sum_{k=0}^n \frac{a_{n-k}}{k+1} = 0 \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Pokazać, że $a_n > 0$ dla $n \geq 1$.

Rozwiązanie:

Indukcja. Dla $n = 1$ teza jest oczywista. Przypuśćmy, że teza jest prawdziwa dla liczb $m \leq n$. Zauważmy, że

$$(n+1)a_n + \frac{n+1}{2}a_{n-1} + \dots + a_0 = 0 \quad \text{oraz} \quad (n+2)a_{n+1} + \frac{n+2}{2}a_n + \dots + a_0 = 0.$$

Zatem

$$(n+2)a_{n+1} = \sum_{i=0}^n a_i \left(\frac{n+1}{n+1-i} - \frac{n+2}{n+2-i} \right) = \sum_{i=0}^n a_i \frac{i}{(n+1-i)(n+2-i)} > 0.$$

□

7. Rozstrzygnąć, czy sześciian o krawędzi 100 można podzielić na prostopadłościany o wymiarach $1 \times 1 \times 51$ i $1 \times 1 \times 53$.

Rozwiązanie:

Podzielmy sześciian na milion sześciianów o krawędzi 1. Położenie każdego sześciianu podziału możemy opisać przy pomocy trójki współrzędnych ze zbioru $\{1, 2, \dots, 100\}$. Niech

$$a_n = \begin{cases} (-1)^n & \text{dla } 1 \leq n \leq 49, \\ \frac{1}{2} & \text{dla } 50 \leq n \leq 51, \\ (-1)^{n+1} & \text{dla } 52 \leq n \leq 100. \end{cases}$$

Wpiszmy w sześciian o współrzędnych (x, y, z) liczbę $a_x a_y a_z$. Wówczas każdy prostopadłościan o wymiarach $1 \times 1 \times 51$ i $1 \times 1 \times 53$ pokrywa sześciiany o sumie liczb 0, podczas gdy suma wszystkich liczb wpisanych w sześciiany podziału jest równa 1. □

8. W pokoju jest n lamp i 5 przełączników przy czym każdy przełącznik jest podpięty do minimum jednej lampy i nie ma dwóch tak samo działających przełączników. Po wciśnięciu przełącznika wszystkie lampy połączone z nim zmieniają stan (świeci-nie świeci). Na początku wszystkie lampy są wyłączone. Wykazać, że można włączyć dokładnie 3 przełączniki tak, że co najmniej 2 lampy będą świecić.

Rozwiązanie:

Mamy n lamp $L_1, L_2, \dots, L_n$ i 5 przełączników $S_1, S_2, \dots, S_5$. Niech $(L_m, (S_i, S_j, S_k))$ będzie dobrą parą jeśli L_m zapala się przy włączeniu S_i, S_j, S_k . Zakładając nie wprost tezę zadania dostaniemy, że dla każdego zbioru $\{S_i, S_j, S_k\}$ istnieje maksymalnie 1 dobra para. Czyli dobrych par jest max 10. Z drugiej strony jeśli L_m jest podpięte do l_m przełączników to L_m należy do $X_m = \binom{l_m}{1} \binom{5-l_m}{2} + \binom{l_m}{3}$ dobrych par. Łatwo zauważyć, że $X_m \geq 4$ czyli liczba dobrych par jest $\geq 4n$ czyli $n \leq 2$ ale wtedy możemy mieć max 2^2 różnych przełączników. Sprzeczność. □

9. Każda liczba całkowita dodatnia została pomalowana na niebiesko lub czerwono. Udowodnić, że istnieje nieskończony ciąg $a_1 < a_2 < \dots$ taki, że liczby

$$a_1, \frac{a_1 + a_2}{2}, a_2, \frac{a_2 + a_3}{2}, a_3, \dots$$

są jednego koloru.

Rozwiązanie:

Niech $a_1 = 1$ będzie niebieskie. Zdefiniujmy tak dużo a_i jak możemy (tak, że nasz ciąg jest taki jak w tezie). Jeśli zdefiniowaliśmy a_k ale nie możemy zdefiniować a_{k+1} to dla każdego $y > 0$ $a_k + y$ lub $a_k + 2y$ jest czerwone(*). Zauważmy, że istnieje jakieś nieparzyste czerwone $b_1 > a_k$ (inaczej teza zachodzi od razu). Zaczynając od b_1 znowu definiujemy tak dużo b_i jak możemy przy czym tym razem dodajemy, że b_i ma być nieparzyste. Jeśli zdefiniowaliśmy b_m , ale nie możemy zdefiniować b_{m+1} , to dla każdego $z > 0$ $b_m + z$ albo $b_m + 2z$ jest niebieskie(**). Teraz założymy, że $X > b_m$ jest czerwone. Wtedy $2X - b_m$ jest niebieskie(**). Dalej $\frac{2X - b_m + a_k}{2} = X - \frac{b_m - a_k}{2}$ jest czerwone(*) więc dla $T = \frac{b_m - a_k}{2}$ mamy:

Dla każdego $X > b_m$ jeśli X jest czerwone to $X - b_m$ też. Więc jeśli $Y > b_m - T$ jest niebieskie to $Y + T$ też jest niebieskie. Dostajemy ciąg arytmetyczny jednego koloru i ciąg będący co drugim wyrazem naszego ciągu arytmetycznego spełnia wymagania tezy c.k.d. $\square$

10. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Proste AI i BI przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach P i Q , różnych od A i B . Punkt F jest takim punktem, że czworokąt $CPFQ$ jest równoległobokiem. Dowieść, że jeśli $I \neq F$, to proste IC i IF są prostopadłe.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$\sphericalangle ICQ = \sphericalangle ICA + \sphericalangle ACQ = \sphericalangle ICB + \sphericalangle ABQ = \sphericalangle ICB + \sphericalangle IBC = \sphericalangle CIQ,$$

skąd otrzymujemy $CQ = IQ$. Analogicznie dostajemy $CP = IP$. Wobec tego punkty C oraz I są symetryczne względem prostej PQ .

Oznaczmy przez S punkt przecięcia przekątnych CF i PQ równoległoboku $PCQF$. Wówczas $SF = SC = SI$. Stąd wynika, że punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ICF , a więc $\sphericalangle CIF = 90^\circ$. $\square$

11. Wewnątrz czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg dany jest taki punkt P , że

$$\sphericalangle BPC = \sphericalangle BAP + \sphericalangle PDC.$$

Oznaczmy przez E, F, G rzuty prostokątne punktu P odpowiednio na proste AB, AD, DC . Udowodnić, że trójkąt FEG jest podobny do trójkąta PBC .

Rozwiązanie:

Przedstawimy rozwiązanie w przypadku, gdy proste AB i CD nie są równoległe. Niech T będzie takim punktem leżącym wewnątrz kąta BPC , że $\sphericalangle BPT =$

$\sphericalangle PAB$. Wówczas $\sphericalangle CPT = \sphericalangle CDP$. Zatem okręgi k_1 i k_2 opisane odpowiednio na trójkątach ABP i CDP są styczne do prostej PT w punkcie T . Ponadto proste AB , CD i PT przecinają się w jednym punkcie Q , gdyż proste te są osiami potęgowymi odpowiednio par okręgów (k_1, k) , (k_2, k) i (k_1, k_2) , gdzie k oznacza okrąg opisany na czworokącie $ABCD$.

Bez straty ogólności przyjmijmy, że punkt Q leży na półprostych BA i CD . Wówczas

$$\begin{aligned}\sphericalangle FEG &= \sphericalangle FEP - \sphericalangle GEP = \sphericalangle DAP - \sphericalangle GQP = \\ &= \sphericalangle QDA - \sphericalangle QPA = \sphericalangle QBC - \sphericalangle ABP = \sphericalangle PBC.\end{aligned}$$

Analogicznie dowodzimy, że $\sphericalangle FGE = \sphericalangle PCB$, skąd uzyskujemy tezę. $\square$

12. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest opisany na okręgu o promieniu r . Jaka największą możliwą wartość może przyjąć

$$\frac{1}{AC^2} + \frac{1}{BD^2}?$$

Rozwiązanie:

Załóżmy, że AC i BD przecinają się w punkcie O i założmy bez szkody, że $\sphericalangle AOB \geq 90^\circ$. Niech E będzie takim punktem, że $BECD$ jest równoległobokiem. Wtedy

$$AC \cdot BD \geq 2[ABCD] = r \cdot \text{Obwód}(ABCD) = 2r \cdot (AC + BD),$$

gdzie $[F]$ i $\text{Obw}(F)$ oznaczają odpowiednio pole i obwód wielokąta F .

Ponadto $AB + CD = AB + BE \geq AE$. A ponieważ $\sphericalangle ECA \geq 90^\circ$, to

$$AE^2 \geq AC^2 + CE^2 = AC^2 + BD^2.$$

Zatem

$$AC^2 \cdot BD^2 \geq 4r^2 \cdot (AC^2 + BD^2),$$

skąd

$$\frac{1}{AC^2} + \frac{1}{BD^2} \leq \frac{1}{4r^2}.$$

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$AC \cdot BD = 2[ABCD] \iff AC \perp BD \quad \text{ i } \quad AB + BE = AE \iff AB \parallel CD,$$

czyli gdy $ABCD$ jest rombem. $\square$

Spis treści

Treści zadań	2
Zawody indywidualne grupy średniej	2
Zawody indywidualne grupy starszej	4
Mecz matematyczny grupy średniej	6
Mecz matematyczny grupy starszej	8
Rozwiązania	10
Zawody indywidualne grupy średniej	10
Zawody indywidualne grupy starszej	17
Mecz matematyczny grupy średniej	23
Mecz matematyczny grupy starszej	28