# Obóz przygotowawczy do Olimpiady Matematycznej

**Krynica Zdrój, 15 października – 19 października 2018**

Obóz Przygotowawczy do Olimpiady Matematycznej
Krynica Zdrój, 7 października – 11 października 2019

Pensjonat *Józefa* w Krynicy

Skład tekstu:

Dominik Burek
Filip Gawron
Jakub Węgrecki

# Treści zadań

## Zawody indywidualne grupy średniej

**1.** Dana jest nieparzysta liczba naturalna $k$. Udowodnić, że liczby $4^k \cdot (2k^2 + 5)$ nie da się zapisać jako sumy trzech kwadratów liczb całkowitych.

**2.** Dany jest ciąg liczb całkowitych dodatnich $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ oraz liczba całkowita dodatnia $k$. *Operacją 1* będziemy nazywać wybór dwóch sąsiednich liczb $(x_i, x_{i+1})$ takich, że $x_i > k$ i zamianę ich na parę $(x_i - 1, x_{i+1} + 1)$. *Operacją 2* będziemy nazywać wybór dwóch sąsiednich liczb $(x_i, x_{i+1})$ takich, że $x_{i+1} > k$ i zamianę ich na parę $(x_i + 1, x_{i+1} - 1)$. Spójny podciąg $x_i, x_{i+1}, ..., x_j$ będziemy nazywać *dobrym* jeśli można za pomocą operacji sprawdzić, by $x_t \geqslant k$ dla każdego $i \leqslant t \leqslant j$. Spójny podciąg nazwiemy *bardzo dobrym* jeśli można za pomocą operacji wykonanych wyłącznie na liczbach z tego podciągu sprawić, by $x_t \geqslant k$ dla każdego $i \leqslant t \leqslant j$. Udowodnić, że najdłuższy dobry podciąg ciągu $x$ jest zarazem jego najdłuższym bardzo dobrym podciągiem.

**3.** Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla każdych liczb rzeczywistych $x, y$ równanie

$$f(xy - 1) + f(x)f(y) = 2xy - 1$$

**4.** Wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$ leży punkt $P$, taki że

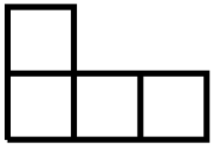
$$\sphericalangle PBC = \sphericalangle DBA \quad \text{i} \quad \sphericalangle PDC = \sphericalangle BDA.$$

Pokazać, że na czworokącie $ABCD$ da się opisać okrąg wtedy i tylko wtedy gdy $AP = CP$ (przyjmujemy, że przekątna $BD$ nie dzieli na pół ani $\sphericalangle ABC$ ani $\sphericalangle BDA$).

**5.** Dany jest prostokąt $ABCD$. Niech $M$ oraz $N$ to środki boków $CD$ oraz $CB$. Niech punkt $K$ będzie przecięciem prostych $MB$ oraz $DN$. Udowodnić, że $\sphericalangle NKB = \sphericalangle MAN$.

**6.** Niech $n, p > 1$ będą liczbami całkowitymi, a $p$ liczbą pierwszą. Zachodzi: $n \mid p - 1$ i $p \mid n^3 - 1$. Pokazać, że $4p - 3$ jest kwadratem liczby naturalnej.

**7.** Pokazać, że prostokąta o wymiarach $4 \times 11$ nie da się pokryć kostkami o poniższym kształcie:



**8.** Niech $P(x)$ będzie wielomianem stopnia $n$, o całkowitych współczynnikach i niech $k$ będzie liczbą całkowitą większą od 2. Niech Q będzie dane wzorem:

$$Q = \underbrace{P(P(\ldots(P(x)\ldots))}_{k}$$

Udowodnić, że istnieje co najwyżej $n$ liczb całkowitych $t$ takich, że $Q(t) = t$.

**9.**Na prostej leży 50 odcinków. Pokazać, że istnieje 8 odcinków, które mają jeden punkt wspólny, lub 8 parami rozłącznych odcinków.

**10.** Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, a okręgi wpisane w trójkąty $ABC$ i $BCD$ mają równe promienie. Udowodnić, że także okręgi wpisane w trójkąty $CDA$ i $DAB$ mają równe promienie.

**11.** Dany jest ciąg liczb rzeczywistych dodatnich spełniający następujące warunki $a_1 = 2$ oraz $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$. Wykazać, że zachodzi

$$S = \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leqslant 1$$

**12.** Niech $a, b$ będą liczbami całkowitymi dodatnimi takimi, że $b^n + n$ jest wielokrotnością $a^n + n$ dla każdego naturalnego $n$. Pokazać, że $a = b$.

## Zawody indywidualne grupy starszej

**1.** Dany jest trójkąt $ABC$ w którym $\sphericalangle BAC = 45^\circ$. Niech $A'$ będzie drugim końcem średnicy $AA'$ okręgu opisanego na trójkącie $ABC$. Punkty $E$ i $F$ leżą na bokach $AB$ i $AC$ odpowiednio tak, że $A'B = BE$ oraz $A'C = CF$. Niech $K$ będzie drugim punktem przecięcia okręgów opisanych na trójkątach $AEF$ i $ABC$. Pokazać, że $EF$ połowi odcinek $A'K$.

**2.** Wielomiany $P$ i $Q$ o współczynnikach rzeczywistych spełniają równość

$$P(x)^2 = 1 + Q(x)^3$$

dla dowolnej liczby rzeczywistej $x$. Pokazać, że $P$ i $Q$ są stałe.

**3.** Każdy wierzchołek $n$-kąta wypukłego $\mathcal{F}$ ($n \geqslant 4$) malujemy na biało lub czarno. Przekątną $\mathcal{F}$ nazwiemy *tęczową* jeśli jej końce są różnego koloru. Kolorowanie wszystkich wierzchołków $\mathcal{F}$ nazwiemy *dobrym* jeśli $\mathcal{F}$ można podzielić na trójkąty tęczowymi przekątnymi, które nie mają punktów wspólnych (oprócz wierzchołków $\mathcal{F}$). Wyznaczyć liczbę dobrych kolorowań.

**4.** Liczba całkowita dodatnia $N$ może być wyrażona jako

$$N = a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = c_1 - c_2 = d_1 - d_2,$$

gdzie $a_1$ i $a_2$ są kwadratami, $b_1$ i $b_2$ są sześcianami, $c_1$ i $c_2$ są piątymi potęgami oraz $d_1$ i $d_2$ są siódmymi potęgami liczb całkowitych. Czy wśród liczb $a_1$, $b_1$, $c_1$, $d_1$, $a_2$, $b_2$, $c_2$ i $d_2$ muszą być dwie równe liczby?

**5.** Wyznaczyć najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią $k$ taką, że wśród dowolnych $k$ różnych i parami względnie pierwszych liczb całkowitych dodatnich mniejszych od 2019 istnieje liczba pierwsza.

**6.** Prosty kij o długości $2M$ centymetrów pocięto na $N$ mniejszych patyczków, których długość jest wyrażona liczbą całkowitą w centymetrach. Jakie jest najmniejsze $N$, dla którego można zagwarantować, że przy użyciu wszystkich powstałych patyczków możliwe jest, bez ich łamania, złożenie konturu jakiegoś prostokąta?

**7.** Wielomian

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

o współczynnikach rzeczywistych ma $n$ pierwiastków w przedziale $(0,1)$. Pokazać, że dla $k = 1, 2, \ldots, n$ zachodzi nierówność

$$(-1)^k(a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n) > 0.$$

**8.** Dany jest sześciokąt $ABCDEF$ (niekoniecznie wypukły) w którym $AB = DE$, $BC = EF$, $CD = FA$ a ponadto

$$\sphericalangle FAB = 3\sphericalangle CDE, \ \sphericalangle BCD = 3\sphericalangle EFA \ \text{ oraz } \ \sphericalangle DEF = 3\sphericalangle ABC$$

(kąty odpowiadają kątom wewnętrznym sześciokąta, w szczególności niektóre z nich mogą być większe niż $180^\circ$). Załóżmy, że żadne dwa boki sześciokąta nie są równoległe. Pokazać, że proste $AD$, $BE$ i $CF$ przecinają się w jednym punkcie.

**9.** Liczby rzeczywiste $a$, $b$, $c$ i $d$ których wartość bezwzględna jest większa niż 1 spełniają równość

$$abc + abd + acd + bcd + a + b + c + d = 0.$$

Pokazać, że

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} > 0.$$

**10.** Niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą całkowitą. Pokazać że istnieje zbiór $\mathcal{S}$ składający się z $2n$ dodatnich liczb całkowitych taki, że: Dla każdego $m = 2, 3, \ldots, n$ zbiór $\mathcal{S}$ może być podzielony na dwa podzbiory o równej sumie elementów, z których jeden ma $m$ elementów.

**11.** W trójkącie $ABC$ punkty $N$, $K$ i $L$ leżą na bokach $AB$, $BC$ i $CA$, odpowiednio tak, że $AL = BK$ oraz $CN$ jest dwusieczną kąta $ACB$. Proste $AK$ i $BL$ przecinają się w punkcie $P$. Punkty $I$ i $J$ są środkami okręgów wpisanych w trójkąty $ALP$ i $BPK$, odpowiednio. Prosta $CN$ przecina $IJ$ w punkcie $Q$. Pokazać, że $IP = QJ$.

**12.** Początkowo na tablicy zapisywana jest liczba naturalna. Następnie co sekundę iloczyn wszystkich niezerowych cyfr jest dodawany do bieżącej liczby. Wykazać, że istnieje dodatnia liczba całkowita która jest dodana nieskończenie wiele razy.

# Mecz matematyczny grupy średniej

**1.** Funkcja ze zbioru liczb rzeczywistych, przyjmująca wartości rzeczywiste spełnia:

$$x + f(x) = f(f(x))$$

dla każdego $x$ rzeczywistego. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $f(f(x)) = 0$

**2.** Udowodnij, że:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqslant 1$$

**3.** Liczba naturalna $n_1$ zapisana jest w systemie dziesiętnym za pomocą 333 cyfr, z których żadna nie jest zerem. Dla $i - 1, 2, \cdots, 332$ liczba $n_{i+1}$ powstaje z liczby $n_i$ poprzez przeniesienie cyfry jedności na początek. Dowieść, że albo wszystkie liczby $n_1, n_2, \cdots, n_{333}$ są podzielne przez 333 albo żadna z nich.

**4.** Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele czwórek różnych liczb naturalnych $(a, b, c, d)$ o tej własności, że każdy z iloczynów $ab, bc, ac, bd, cd$ jest o 1 większy od kwadratu pewnej liczby naturalnej.

**5.** Pokazać, że dla każdego całkowitego $n \geqslant 1$ ciąg

$$2, 2^2, 2^{2^2}, ... \quad (mod\ n)$$

jest od pewnego miejsca stały.

**6.** Dwieście studentów rowiązywało 6 zadań. Każde zadanie rozwiązało przez conajmniej 120 uczestników. Pokazać, że istnieje dwóch studentów, którzy w sumie rozwiązali wszystkie zadania.

**7.** Niech $n$ będzie liczbą całkowitą dodatnią. Ciąg $n$ liczb całkowitych dodatnich (niekoniecznie różnych) nazwiemy ciągiem Masarni jeśli zachodzi warunek: dla każdego $k \geqslant 2$, jeśli w ciągu występuje $k$, to występuje też $k-1$, oraz pierwsze $k - 1$ jest wcześniej w ciągu niż ostanie $k$. Pokazać, że liczba ciągów Masarni jest równa $n$!

**8.** Dwa okręgi $O1$, $O2$ przecinają się w punktach $M, N$. Niech $l$ będzie prostą styczną do $O1$ w $A$ i do $O2$ w $B$ oraz taką, że $M$ jest bliżej $l$ niż $N$.

Niech prosta równoległa do $l$ i przechodząca przez $M$ przecina okręgi $O1, O2$ ponownie w punktach odpowiednio $C, D$. Proste $CA$ i $DB$ przecinają się w $E$, proste $AN$ i $CD$ przecinają się w $P$, proste $BN$ i $CD$ przecinają się w $Q$. Pokazać, że $EP{=}EQ$

**9.** W trójkącie $ABC$ punkt $H$ jest ortocentrum, $O$ środkiem okręgu opisanego, zaś $R$ promieniem tego okręgu. Punkt $D$ jest symetryczny do punktu $A$ względem $BC$, punkt $E$ jest symetryczny do $B$ względem $CA$ oraz punkt $F$ jest symetryczny do $C$ względem $AB$. Wykazać, że punkty $D, E, F$ leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy $OH = 2R$.

**10.** Dany jest trójkąt $ABC$ taki, że $\sphericalangle CAB > \sphericalangle ABC$. Punkt $I$ jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Niech $D$ będzie punktem na odcinku $BC$ takim, że $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ABC$. Niech $\omega$ będzie okręgiem stycznym do $AC$ w punkcie $A$ przechodzącym przez $I$, zaś $X$ będzie drugim punktem przecięcia $\omega$ i okręgu opisanego na $ABC$. Udowodnij, że dwusieczne kątów $\sphericalangle DAB$ i $\sphericalangle CXB$ przecinają się na prostej $BC$.

## Mecz matematyczny grupy starszej

**1.** Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takie, że

$$f(m-n) + 4mn$$

jest kwadratem liczby całkowitej dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich $m > n$.

**2.** Niech $m$ będzie liczbą całkowitą taką, że $|m| \geqslant 2$. Rozważmy ciąg $a_1, a_2, \ldots$ liczb całkowitych taki, że $a_1$, $a_2$ nie są zerami jednocześnie oraz dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej $n$ mamy $a_{n+2} = a_{n+1} - ma_n$. Pokazać, że jeśli liczby całkowite $r > s \geqslant 2$ spełniają równości $a_r = a_s = a_1$, to $r - s \geqslant |m|$.

**3.** Niech $\mathcal{S}$ będzie niepustym podzbiorem liczb całkowitych dodatnich taki, że dla dowolnych (niekoniecznie różnych) liczb całkowitych $a$ i $b$ ze zbioru $\mathcal{S}$, liczba $ab+1$ również należy do $\mathcal{S}$. Pokazać, że zbiór liczb pierwszych które nie dzielą żadnego elementu zbioru $\mathcal{S}$ jest skończony.

**4.** Niech $\mathbb{Q}_+$ oznacza zbiór wszystkich dodatnich liczb wymiernych. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{Q}_+$ spełniające równość

$$f\left(x^2 f(y)^2\right) = f(x)^2 f(y) \quad \text{dla dowolnych } x, y \in \mathbb{Q}_+.$$

**5.** Niech

$$P(x) = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \ldots + a_0$$

będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych takim, że dla pewnego $m \geqslant 2$ wszystkie rzeczywiste pierwiastki wielomianu

$$P^{(m)}(x) := \underbrace{P(P(\ldots P}_{m \text{ razy}}(x))\ldots)$$

są dodatnie. Pokazać, że wszystkie rzeczywiste pierwiastki wielomianu $P(x)$ są dodatnie.

**6.** W Arabii Saudyjskiej znajduje się 2019 miast, a wszystkie odległości między nimi są różne. Niektóre miasta są połączone lotami (w obie strony). Okazało się, że dokładnie dwa loty opuszczają każde miasto, a są to loty do dwóch najbardziej odległych miast. Udowodnij, że korzystając z lotów, z dowolnego miasta można dotrzeć do każdego innego.

**7.** Niech $n$ będzie liczbą całkowitą dodatnią, a $\mathcal{S}$ zbiorem mającym $2^n + 1$ elementów. Niech $f$ będzie funkcją prowadzącą z 2-elementowych podzbiorów $\mathcal{S}$ do zbioru $\{0, 1, 2, \ldots, 2^{n-1} - 1\}$. Przypuśćmy, że dla dowolnych $x, y, z \in \mathcal{S}$ jedna z liczb $f(\{x, y\})$, $f(\{y, z\})$, $f(\{z, x\})$ jest sumą dwóch pozostałych. Pokazać, że istnieją liczby $a, b, c \in \mathcal{S}$ takie że

$$f(\{a, b\}) = f(\{b, c\}) = f(\{c, a\}) = 0.$$

**8.** Płaszczyzna jest podzielona na wypukłe siedmiokąty o średnicy jednostkowej. Pokazać, że dowolny okrąg o promieniu 200 przecina co najmniej miliard siedmiokątów.

*Średnicą zbioru nazywamy największą odległość między dwoma punktami tego zbioru.*

**9.** W trójkącie $ABC$ punkty $A_1$ i $B_1$ leżą na bokach $BC$ i $CA$ tak, że na czworokącie $AA_1B_1B$ można opisać okrąg. Niech $S$ będzie punktem przecięcia $AA_1$ i $BB_1$. Punkty $X$ i $Y$ są obrazami $S$ względem prostych $CB$ i $CA$, odpowiednio. Okręgi opisane na trójkątach $CA_1B_1$ i $CAB$ przecinają się w punkcie $P \neq A$. Pokazać, że na czworokącie $XPCY$ można opisać okrąg.

**10.** Dany jest trójkąt $ABC$ $(AB > BC)$ wpisany w okrąg $\Omega$. Na bokach $AB$ i $BC$ wybrano punkty $M$ i $N$ odpowiednio takie, że $AM = CN$. Proste $MN$ i $AC$ przecinają się w punkcie $K$. Niech $P$ będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt $AMK$, a $Q$ jest środkiem okręgu $K$-dopisanego w trójkącie $CNK$. Pokazać, że środek łuku $AC$ okręgu $\Omega$, który zawiera punkt $B$ jest równo odległy od punktów $P$ i $Q$.

**11.** Dany jest ostrosłup $SA_1A_2 \ldots A_n$, którego podstawą jest $n$-kąt wypukły $A_1A_2 \ldots A_n$. Dla $i = 1, 2, \ldots, n$ w podstawie znajduje się trójkąt $X_iA_iA_{i+1}$ przystający do ściany $SA_iA_{i+1}$ leżący po tej samej stronie prostej $A_iA_{i+1}$ co podstawa (połóżmy $A_{n+1} := A_1$). Pokazać, że te wszystkie trójkąty pokrywają w całości podstawę ostrosłupa.

# Rozwiązania

## Zawody indywidualne grypy średniej

**1.** Dana jest nieparzysta liczba naturalna $k$. Udowodnić, że liczby $4^k \cdot (2k^2 + 5)$ nie da się zapisać jako sumy trzech kwadratów liczb całkowitych.

*Rozwiązanie:*

Przypuśćmy, że takie liczby istnieją, tzn. $4^k \cdot (2k^2 + 5) = a^2 + b^2 + c^2$. Korzystając z faktu, reszty kwadratowe modulo 4 to 0 i 1 widzimy, że $2 \mid a$, $2 \mid b$ oraz $2 \mid c$. Zatem $2a_1 = a$, $2b_1 = b$, $2c_1 = c$. Podstawiając do naszego równania i rozumując analogicznie dostaniemy, że $(2k^2 + 5) = a_k^2 + b_k^2 + c_k^2$. Jednakże jeśli $k$ jest nieparzyste, to lewa strona równania daje resztę 7 przy dzieleniu przez 8. Prawa strona nie może dawać reszty modulo 8, co można łatwo sprawdzić.

**2.** Dany jest ciąg liczb całkowitych dodatnich $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ oraz liczba całkowita dodatnia $k$. *Operacją 1* będziemy nazywać wybór dwóch sąsiednich liczb $(x_i, x_{i+1})$ takich, że $x_i > k$ i zamianę ich na parę $(x_i - 1, x_{i+1} + 1)$. *Operacją 2* będziemy nazywać wybór dwóch sąsiednich liczb $(x_i, x_{i+1})$ takich, że $x_{i+1} > k$ i zamianę ich na parę $(x_i + 1, x_{i+1} - 1)$. Spójny podciąg $x_i, x_{i+1}, ..., x_j$ będziemy nazywać *dobrym* jeśli można za pomocą operacji sprawdzić, by $x_t \geqslant k$ dla każdego $i \leqslant t \leqslant j$. Spójny podciąg nazwiemy *bardzo dobrym* jeśli można za pomocą operacji wykonanych wyłącznie na liczbach z tego podciągu sprawić, by $x_t \geqslant k$ dla każdego $i \leqslant t \leqslant j$. Udowodnić, że najdłuższy dobry podciąg ciągu $x$ jest zarazem jego najdłuższym bardzo dobrym podciągiem.

*Rozwiązanie:*

Każdy bardzo dobry fragment ciągu jest oczywiście także dobrym fragmentem ciągu. Odwrotna zależność niestety nie zachodzi, jednakże pokażemy, że każdy najdłuższy dobry fragment ciągu musi być bardzo dobry. Załóżmy przez sprzeczność, że najdłuższy dobry fragment $x_i, x_{i+1}, ..., x_j$ nie jest bardzo dobry. To oznacza, że podczas wykonywania operacji na ciągu $x$ prowadzących do przekształcenia tego fragmentu w poprawnie rozmieszczony, trafił do niego jakiś klocek spoza tego fragmentu. Załóżmy, że był to klocek pochodzący ze słupka $x_u$ dla $u < i$ (przypadek $u > j$ rozpatruje się analogicznie). Twierdzimy, że wówczas po wykonaniu wszystkich operacji wszystkie słupki $x_u, x_{u+1}, ..., x_{i-1}$ mają wysokość co najmniej $k$, co oznacza, że fragment $x_i, x_{i+1}, ..., x_j$ bynajmniej nie był najdłuższym dobrym, gdyż dobry jest także fragment $xu, x_{u+1}, ..., x_i, ..., x_j$. No dobrze, a dlaczego wszystkie te słupki mają wysokość co najmniej $k$? Aby ów klocek ze słupka $x_u$ mógł dostać się do rozważanego fragmentu, z każdego ze słupków $x_u, x_{u+1}, ..., x_{i-1}$ musiał zostać co najmniej raz przestawiony na słupek sąsiadujący z nim po prawej. To oznacza, że każdy z tych słupków musiał mieć wówczas wysokość przekraczającą $k$. Aby zakończyć dowód, wystarczy teraz zauważyć, że w wyniku wykonywania opisanych w zadaniu operacji nie da się obniżyć żadnego słupka o wysokości co najmniej $k$ do wysokości mniejszej niż $k$.

**3.** Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla każdych liczb rzeczywistych $x, y$ równanie

$$f(xy-1) + f(x)f(y) = 2xy - 1$$

*Rozwiązanie:*

Niech $P(x, y)$ będzie podstawieniem do wyjściowego równania. $f(xy-1) + f(x)f(y) = 2xy - 1$

- Jeśli $f(0) \neq 0$, $P(x, 0) \implies f(x) = -\frac{f(-1)+1}{f(0)}$ stała, która nie spełnia warunków zadania. Zatem $f(0) = 0$
- $P(0, 0) \implies f(-1) = -1$
- Niech $x \neq 0 : P(x, \frac{1}{x}) \implies f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{f(x)}$
- $P(x+1, \frac{1}{x}) \implies (f(x+1)+1)f(\frac{1}{x}) = \frac{x+2}{x}$ więc $f(x+1) = \frac{x+2}{x}f(x) - 1$
- $P(2, 1) \implies f(1)(f(2)+1) = 3$ więc (dla $f(1) \neq 0$) $P(x+1, 1) \implies f(x+1) = \frac{2x+1-f(x)}{f(1)}$
- Zatem zachodzi równość $\frac{x+2}{x}f(x) - 1 = \frac{2x+1-f(x)}{f(1)}$
- $P(1, 1) \implies f(1)^2 = f(0) + f(1)^2 = 1$, więc $f(1) = 1$ lub $f(1) = -1$.
- Jeśli $f(1) = -1$, to $f(x) = -x^2\ \forall x \neq 0$, prawdziwe także dla $x = 0$ oraz $\boxed{\text{S1} : f(x) = -x^2\ \forall x}$, które spełniają warunki zadania.
- Jeśli $f(1) = 1$, to $f(x) = x\ \forall x \notin \{0, -1\}$ Wiemy, że $f(0) = 0$ oraz $f(-1) = -1$ oraz $\boxed{\text{S2} : f(x) = x\ \forall x}$ co spełnia warunki zadania.

**4.** Wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$ leży punkt $P$, taki że

$$\sphericalangle PBC = \sphericalangle DBA \quad \text{i} \quad \sphericalangle PDC = \sphericalangle BDA.$$

Pokazać, że na czworokącie $ABCD$ da się opisać okrąg wtedy i tylko wtedy gdy $AP = CP$ (przyjmujemy, że przekątna $BD$ nie dzieli na pół ani $\sphericalangle ABC$ ani $\sphericalangle BDA$).

*Rozwiązanie:*

Najpierw pokażemy, że jeśli na $ABCD$ da się opisać okrąg to punkt $P$ leży na symetralnej $AC$. Niech proste $BP, DP$ przecinają okrąg opisany na $ABCD$ ponownie w punktach $B', D'$. Wtedy:

$$\sphericalangle ACD = \sphericalangle ABD = \sphericalangle PBC = \sphericalangle B'BC = \sphericalangle B'CD \Rightarrow \sphericalangle ACD = \sphericalangle B'CD$$

Z ostatniej równości kątów wynika, że $DB'$ jest równoległe do $AC$. Analogicznie $D'B$ jest równoległe do $AC$ więc $BD'B'D$ jest trapezem i punkt przecięcia jego przekątnych $P$ leży na wspólnej symetralnej $D'B$ i $B'D$ czyli na symetralnej $AC$ więc $AP = CP$. Teraz załóżmy że zachodzi $AP = CP$ czyli $P$ leży na symetralnej $AC$. Niech $D'$ będzie punktem na prostej $BD$, różnym od $B$, tak że $ABCD'$ jest wpisany w okrąg. Niech punkt $Q$ spełnia te same warunki co punkt $P$ tylko dla czworokąta $ABCD'$. Wtedy jak wcześniej udowodniliśmy punkt $Q$ musi leżeć na symetralnej $AC$. Ale zauważmy, że punkt $Q$ musi leżeć na prostej $BP$. Ale przecięcie symetralnej $AC$ i prostej $BP$ to punkt $P$ więc $Q = P \Rightarrow D' = D$ więc $ABCD$ jest wpisany w okrąg.

**5.** Dany jest prostokąt $ABCD$. Niech $M$ oraz $N$ to środki boków $CD$ oraz $CB$. Niech punkt $K$ będzie przecięciem prostych $MB$ oraz $DN$. Udowodnić, że $\sphericalangle NKB = \sphericalangle MAN$.

*Rozwiązanie:*

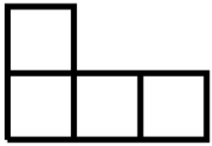
Niech $L$ to przecięcie $AM$ oraz $KD$. Niech $\sphericalangle MAN = a$ oraz $\sphericalangle NABb$. Wówczas $\sphericalangle DAM = 90 - a - b$, więc $\sphericalangle AMD = a + b$. $AM = BM$, więc $\sphericalangle AMB = 180-2a-2b$. Ponadto $\sphericalangle LDM = \sphericalangle BAN = b$, więc $\sphericalangle KLM = a+2b$. Zatem sumując kąty w trójkącie $KLM$ otrzymujemy tezę.

**6.** Niech $n, p > 1$ będą liczbami całkowitymi, a $p$ liczbą pierwszą. Zachodzi: $n \mid p - 1$ i $p \mid n^3 - 1$. Pokazać, że $4p - 3$ jest kwadratem liczby naturalnej.

*Rozwiązanie:*

Skoro $n \mid p - 1$ to $p = kn + 1$ dla pewnego $k$ całkowitego dodatniego. $p \mid n^3-1 \Rightarrow p \mid (n-1)(n^2+n+1)$. Skoro $n \mid p-1$ to $n < p$ czyli $NWD(n-1, p) = 1$, więc $p \mid n^2 + n + 1 \Leftrightarrow kn + 1 \mid n^2 + n + 1$. Mamy:
$kn + 1 \mid k(n^2 + n + 1) - n(kn + 1) - (kn + 1) = k - n - 1$
Dla $k = 1$ otrzymujemy $p = n + 1$ i $n + 1 \mid n(n + 1) + 1$ sprzeczność.
Dla $k > 1$ łatwo pokazać, że $kn + 1 > |k - n - 1|$.
Skoro tak to $k - n - 1 = 0 \Rightarrow k = n + 1 \Rightarrow 4p - 3 = (2n + 1)^2$

**7.** Pokazać, że prostokąta o wymiarach $4 \times 11$ nie da się pokryć kostkami o poniższym kształcie:



*Rozwiązanie:*

Ustalmy, że nasz prostokąt ma 4 wiersze i 11 kolumn (ponumerowanych po kolei od 1 do 11). Każdą nieparzystą kolumnę malujemy całą na czarno. W ten sposób otrzymujemy 24 pola czarne. Każdy klocek pokrywa 1 lub 3 pola czarne. Niech $A$ i $B$ to liczba klocków pokrywających odpowiednio 1 i 3 pola czarne. Mamy:

$$A + B = 11 \ (pole\ prostokta)$$

$$A + 3B = 24 \ (czarne\ pola)$$

Ten układ równań nie ma rozwiązania całkowitego więc zachodzi teza zadania.

**8.** Niech $P(x)$ będzie wielomianem stopnia $n$, o całkowitych współczynnikach i niech $k$ będzie liczbą całkowitą większą od 2. Niech Q będzie dane wzorem:

$$Q = \underbrace{P(P(\ldots(P(x)\ldots))}_{k}$$

Udowodnić, że istnieje co najwyżej $n$ liczb całkowitych $t$ takich, że $Q(t) = t$.

*Rozwiązanie:*

Przytoczymy tu znany lemat:

Lemat: Jeśli $P$ jest wielomianem o współczynnikach całkowitych to dla dowolnych liczb całkowitych a,b mamy:

$$a - b | P(a) - P(b)$$

Niech teraz $a_1, a_2, ...a_k$ będą takie, że $P(a_i) = a_{i+1}$ oraz $P(a_k) = a_1$. Wtedy z lematu mamy

$$a_2 - a_1 | a_3 - a_2, \ a_3 - a_2 | a_4 - a_3, \ \ldots \ , \ a_k - a_1 | a_2 - a_1$$

więc wartość $|a_i - a_{i+1}|$ jest stała co jest niemożliwe dla $k > 2$, w takim razie mamy dwa przypadki:

$$P(x) = x \ (1) \text{ albo } P(x) = y \text{ i } P(y) = x \ (2)$$

Weźmy zbiór tych $t$ dla których $Q(t) = t$. Takie $t$ musi spełniać (1) lub (2). Jeśli wszystkie takie $t$ spełniają (1) to są one pierwiastkami $P(x) - x$ czyli jest ich maksymalnie $n$. W takim razie istnieje $t_1$, które spełnia (2). Niech $(a, b) = (t_1, P(t_1))$. Niech $(c, d) = (t_2, P(t_2))$ dla innego $t_2$ (tutaj już niekoniecznie $c$ i $d$ muszą być różne). Wtedy z lematu dostajemy

$$a - c | b - d,\ \ b - d | a - c \Rightarrow |a - c| = |b - d|$$

Analogicznie $|a - d| = |b - c|$. Z tych dwóch równości dostajemy $a + b = c + d$ Czyli $a + b$ ma stałą wartość. Niech to będzie $u$. Wtedy każde nasze $t$ jest pierwiastkiem równania $P(x) + x = u$, a takich pierwiastków znowu może być co najwyżej $n$.

**9.**Na prostej leży 50 odcinków. Pokazać, że istnieje 8 odcinków, które mają jeden punkt wspólny, lub 8 parami rozłącznych odcinków.

*Rozwiązanie:*

Załóżmy, że nie istnieje 8 odcinków, które mają punkt wspólny. Weźmy lewe końce odcinków i posortujmy je od tego najbardziej na lewo do tego najbardziej na prawo. Tak posortowane odcinki ponumerujmy od 1 do 50. Zobaczmy na 8 odcinek. Jeśli ma on punkt wspólny z odcinkiem 1 to wszystkie odcinki 1,2,...,8 mają punkt wspólny (prawy koniec odcinka 1). Więc odcinki 1 i 8 są rozłączne. Analogicznie dla odcinka 15, potem 22,29,36,43,50. Łącznie dostajemy 9 odcinków rozłącznych c.k.d.

**10.** Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, a okręgi wpisane w trójkąty $ABC$ i $BCD$ mają równe promienie. Udowodnić, że także okręgi wpisane w trójkąty $CDA$ i $DAB$ mają równe promienie.

*Rozwiązanie:*

Niech $I, J$ będą środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty $ABC$ i $BCD$. Z równości promieni okręgów wpisanych w trójkąty $ABC$ i $BCD$ wynika, że proste $BC$ i $IJ$ są równoległe. Ponadto

$$\sphericalangle BIC = 90 + \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle BAC = 90 + \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle BDC = \sphericalangle BJC$$

Z tego wnioskujemy, że na czworokącie $BCJI$ można opisać okrąg. Zatem $BCJI$ jest trapezem równoramiennym. Stąd uzyskujemy równości $\sphericalangle ABC = 2\sphericalangle IBC = 2\sphericalangle JCB = \sphericalangle DCB$. W efekcie otrzymujemy, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem równoramiennym o podstawach $BC$ i $AD$. Stąd wynika, że trójkąty $CDA$ i $DAB$ są przystające, a więc okręgi wpisane w te trójkąty mają równe promienie.

**11.** Dany jest ciąg liczb rzeczywistych dodatnich spełniający następujące warunki $a_1 = 2$ oraz $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$. Wykazać, że zachodzi

$$S = \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leqslant 1$$

*Rozwiązanie:*

Zauważmy, że

$$\frac{1}{a_{n+1} - 1} = \frac{1}{a_n(a_n - 1)} = \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_n}$$

Zatem

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_{n+1} - 1}$$

Zatem

$$S = \frac{1}{a_{n+1} - 1} \geqslant 1$$

Co wynika z faktu, że $a_n$ jest rosnący i kończy dowód.

**12.** Niech $a, b$ będą liczbami całkowitymi dodatnimi takimi, że $b^n + n$ jest wielokrotnością $a^n + n$ dla każdego naturalnego $n$. Pokazać, że $a = b$.

*Rozwiązanie:*

$a^n + n \mid b^n + n \Leftrightarrow a^n + n \mid b^n - a^n$. Ustalmy liczbe pierwszą $p$ i weźmy $n$ takie, że $n \equiv -a \pmod{p}$ (1) oraz $n \equiv 1 \pmod{p}$ (2) Wtedy $a^n \equiv a \pmod{p}$ z (2) i małego twierdzenia Fermata. Łącząc to z (1) dostajemy $p \mid a^n + n$ skąd wynika, że $p \mid b^n - a^n$ ale $b^n \equiv b \pmod{p}$ z (2) i małego twierdzenia Fermata więc $p \mid b - a$. Ostatnia podzielność zachodzi dla dowolnego p więc $b - a = 0$ c.k.d.

## Zawody indywidualne grupy starszej

**1.** Dany jest trójkąt $ABC$ w którym $\sphericalangle BAC = 45^\circ$. Niech $A'$ będzie drugim końcem średnicy $AA'$ okręgu opisanego na trójkącie $ABC$. Punkty $E$ i $F$ leżą na bokach $AB$ i $AC$ odpowiednio tak, że $A'B = BE$ oraz $A'C = CF$. Niech $K$ będzie drugim punktem przecięcia okręgów opisanych na trójkątach $AEF$ i $ABC$. Pokazać, że $EF$ połowi odcinek $A'K$.

*Rozwiązanie:*

Niech $K'$ będzie obrazem punktu $A'$ w symetrii względem prostej $EF$. Ponieważ $\sphericalangle BA'E = \sphericalangle CA'F = 45^\circ$, to $\sphericalangle EK'F = \sphericalangle EA'F = 45^\circ$, więc czworokąt $AK'EF$ jest wpisany w okrąg. Wobec tego $\sphericalangle K'EB = \sphericalangle K'FC$. Ponadto

$$\frac{K'E}{EB} = \frac{A'E}{EB} = \sqrt{2} = \frac{A'F}{FC} = \frac{K'F}{FC},$$

więc trójkąty $K'EB$ i $K'FC$ są podobne. Zatem $\sphericalangle BK'C = 45^\circ$, czyli czworokąt $AK'BC$ jest wpisany w okrąg, skąd $K' \equiv K$.

**2.** Wielomiany $P$ i $Q$ o współczynnikach rzeczywistych spełniają równość

$$P(x)^2 = 1 + Q(x)^3$$

dla dowolnej liczby rzeczywistej $x$. Pokazać, że $P$ i $Q$ są stałe.

*Rozwiązanie:*

Z danej równości wynika, że $(P(x) - 1)(P(x) + 1) = Q(x)^3$, a ponieważ $P(x) - 1$ i $P(x) + 1$ nie mają wspólnych pierwiastków, to $P(x) - 1 = A(x)^3$ i $P(x) + 1 = B(x)^3$ dla pewnych wielomianów $A$ i $B$. Wtedy też

$$(B(x) - A(x))(B(x)^2 + A(x)B(x) + A(x)^2) = B(x)^3 - A(x)^3 = 2,$$

czyli wielomiany $B(x) - A(x)$ oraz $B(x)^2 + A(x)B(x) + A(x)^2$ są stałe. Ponieważ

$$B(x)^2 + A(x)B(x) + A(x)^2 = (B(x) - A(x))^2 + 3A(x)B(x),$$

to $A(x)B(x)$ jest również stały, skąd $A(x)$ i $B(x)$ są też stałe.

**3.** Każdy wierzchołek $n$-kąta wypukłego $\mathcal{F}$ ($n \geqslant 4$) malujemy na biało lub czarno. Przekątną $\mathcal{F}$ nazwiemy *tęczową* jeśli jej końce są różnego koloru. Kolorowanie wszystkich wierzchołków $\mathcal{F}$ nazwiemy *dobrym* jeśli $\mathcal{F}$ można podzielić na trójkąty tęczowymi przekątnymi, które nie mają punktów wspólnych (oprócz wierzchołków $\mathcal{F}$). Wyznaczyć liczbę dobrych kolorowań.

*Rozwiązanie:*

Od razu zauważamy, że pokolorowanie wszystkich wierzchołków jednym kolorem nie jest dobre; takie pokolorowanie nie jest rozważane poniżej.

Mówimy, że bok wielokąta jest *kolorowy*, jeśli jego końce są kolorowe w różnych kolorach, a *niekolorowy*– w przeciwnym razie. Kolorowanie wierzchołków nazywamy uporządkowanym jeśli istnieje blok sąsiednich czarnych wierzchołków wielokąta a reszta z wierzchołków jest biała.

**Lemat.** *Pokolorowanie wierzchołków wypukłego $n$-kąta (dla $n \geqslant 3$) jest dobre, wtedy i tylko wtedy, gdy jest uporządkowane.*

*Dowód.* Istotnie, załóżmy, że pokolorowanie wierzchołków wypukłego $n$-kąta jest dobre, i rozważmy odpowiedni podział wielokąta na trójkąty tęczowymi przekątnymi. Jak wiadomo, w takiej partycji są dokładnie $n-2$ trójkąty. W każdym z tych trójkątów można wybrać odcinek łączący wierzchołki tego samego koloru; taka prosta nie może być przekątną $n$-kąta, dlatego jest to niekolorowy bok $n$-kąta. Tak więc dla każdego z $n-2$ trójkątów istnieje niekolorowy bok $n$-kąta (dla różnych trójkątów boki te są oczywiście różne), dlatego w naszym $n$-kącie jest co najmniej $n-2$ niekolorowych boków, zatem łatwo zauważyć, że kolorowanie to jest uporządkowane.

Załóżmy teraz że kolorowanie wierzchołków wypukłego $n$-kąta jest uporządkowane, oznaczmy kolejno wierzchołki białe $A_1$, $A_2$, $\ldots$, $A_k$, i wierzchołki czarne $B_1$,, $B_2$, $\ldots$, $B_l$. Narysujmy wszystkie przekątne od $A_1$ do czarnych wierzchołków i wszystkie przekątne od $B_1$ do białych wierzchołków. Oczywiście wymagany podział uzyskuje się za pomocą wielokolorowych przekątnych. $\square$

W świetle lematu pozostaje tylko obliczyć liczbę uporządkowanych kolorowań $n$-kąta. Dla każdej możliwej liczby $k$ czarnych wierzchołków ($k$ przyjmuje wartości od 1 do $n-1$) spośród wszystkich $n$ wierzchołków, można $n$ sposobów wybrać układ bloków $k$ kolejnych czarnych wierzchołków, tj. liczba wyborów wynosi $n(n-1)$.

**4.** Liczba całkowita dodatnia $N$ może być wyrażona jako

$$N = a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = c_1 - c_2 = d_1 - d_2,$$

gdzie $a_1$ i $a_2$ są kwadratami, $b_1$ i $b_2$ są sześcianami, $c_1$ i $c_2$ są piątymi potęgami oraz $d_1$ i $d_2$ są siódmymi potęgami liczb całkowitych. Czy wśród liczb $a_1$, $b_1$, $c_1$, $d_1$, $a_2$, $b_2$, $c_2$ i $d_2$ muszą być dwie równe liczby?

*Rozwiązanie:*

Niech

$$N = (3^2 - 2^2)^{105}(3^3 - 2^3)^{70}(3^5 - 2^5)^{126}(3^7 - 2^7)^{120}$$

i wprowadźmy liczby $M_2$, $M_3$, $M_5$, $M_7$ takie, że

$$N = M_2^2(3^2 - 2^2) = M_3^3(3^3 - 2^3) = M_5^5(3^5 - 2^5) = M_7^7(3^7 - 2^7).$$

Wtedy

$$N = (3M_2)^2 - (2M_2)^2 = (3M_3)^3 - (2M_3)^3 = (3M_5)^5 - (2M_5)^5 = (3M_7)^7 - (2M_7)^7.$$

Osiem liczb zaangażowanych w powyższy zapis są różne, gdyż każde dwie z nich mają zawierają różne potęgi 2 i 3.

**5.** Wyznaczyć najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią $k$ taką, że wśród dowolnych $k$ różnych i parami względnie pierwszych liczb całkowitych dodatnich mniejszych od 2019 istnieje liczba pierwsza.

*Rozwiązanie:*

Niech $\mathbb{P}$ oznacza zbiór liczb pierwszych. Ponieważ

$$\#\left\{p^2 \colon p \in \mathbb{P},\ \ p^2 < 2019\right\} \cup \{1\} = 15,$$

widzimy, że $k > 15$. Przypuśćmy, że zbiór $S$ ma 16 różnych parami względnie pierwszych liczb mniejszych niż 2019. Załóżmy, że wszystkie liczby są złożone, prócz 1 (jeśli $1 \in S$). Dla $n > 0$, niech $f(n)$ będzie najmniejszym dzielnikiem pierwszym liczby $n$ oraz $f(1) = 1$.

Jeśli $n$ jest złożoną oraz $n < 2019$, to $f(n) \leqslant 43$. Zatem dla $n \in S$ zachodzi $f(n) \leqslant 43$. Ponieważ

$$\#\{p \in \mathbb{P} \colon p \leqslant 43\} \cup \{1\} = 15,$$

to z Zasady Szufladkowej Dirichleta istnieje $(x, y) \in S \times S$ takie, że $f(x) = f(y)$ oraz $x \neq y$. Oczywiście jest to sprzeczne z założeniem, że 16 wybranych liczb są parami różne. $\square$

**6.** Prosty kij o długości $2M$ centymetrów pocięto na $N$ mniejszych patyczków, których długość jest wyrażona liczbą całkowitą w centymetrach. Jakie jest najmniejsze $N$, dla którego można zagwarantować, że przy użyciu wszystkich powstałych patyczków możliwe jest, bez ich łamania, złożenie konturu jakiegoś prostokąta?

*Rozwiązanie:*

Niech $N \leqslant M+1$. Połammy patyk $N-1$ części długości 1 długi i jedną część długości $2M+1-N$. Z tego zestawu patyków nie można złożyć prostokąt, gdyż kij długości $2M+1-N$ jest nie mniejszy od połowy obwodu potencjalnego prostokąta. Wobec tego $N \geqslant M+2$. Pokażemy, że $M+2$ jest najmniejszą żądaną wartością $N$.

Rozważmy okrąg $\omega$ o długości $2M$. Utożsammy go z "wygiętym kijem, którego końce zostały sklejone". Wpiszmy w ten okrąg $2M$-kąt foremny. Dostajemy $M$ głównych przekątnych tego wielokąta czyli $M$ par punktów, które są końcami średnicy $\omega$. Ponieważ łamanie odpowiada wyborowi wierzchołka $2M$-kąta foremnego, to łamiąc kij w $M+2$ punktach wybierzemy zawsze dwie główne przekątne czyli średnice $\omega$. Te dwie przekątne dzielą $\omega$ na 4 równe części, więc rozbiliśmy wszystkie patyki na cztery grupy $A$, $B$, $C$ i $D$ patyków o długości całkowitej i takie, że suma długości w $A$ i $C$ są równe oraz sumy długości w $B$ i $D$ są równe. Jest jasne, że z tych grup złożymy prostokąt. $\square$

**7.** Wielomian

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

o współczynnikach rzeczywistych ma $n$ pierwiastków w przedziale $(0,1)$. Pokazać, że dla $k = 1, 2, \ldots, n$ zachodzi nierówność

$$(-1)^k(a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n) > 0.$$

*Rozwiązanie:*

Dla $n = 1$ mamy wielomian $x + a_1$, który posiada pierwiastek w przedziale $(0,1)$, czyli $a_1 < 0$, więc $(-1)^1 a_1 > 0$. Przeprowadzimy dowód indukcyjny, załóżmy że teza zachodzi dla wielomianów stopnia $n-1$. Chcemy stwierdzić, że teza zachodzi dla dowolnego wielomianu stopnia n, ustalmy go

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

i niech

$$P(x) = (x-t_1)(x-t_2) \cdot \ldots \cdot (x-t_n),$$

gdzie $t_i \in (0,1)$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$.

Rozpatrzmy wielomian

$$Q(x) := (x-t_2) \cdot \ldots \cdot (x-t_n) = x^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}$$

stopnia $n-1$. Z założenia indykcyjnego wiemy, że

$$(-1)^k(b_k + b_{k+1} + \ldots + b_{n-1}) > 0 \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Ponieważ $P(x) = Q(x)(x - t_1)$, to współczynniki $a_i$ możemy obliczyć za pomocą współczynników $b_j$ wielomianu $Q$. Zatem

$$(-1)^n a_n = (-1)^n(-t_1 b_{n-1}) = (-1)^{n-1} b_{n-1} t_1 > 0.$$

Dla $1 < k < n$ mamy

$$\begin{aligned}(-1)^k(a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n) &= (-1)^k((b_k + b_{k+1} + \ldots + b_{n-1}) - t_1(b_{k-1} + b_k + \ldots + b_n \\ &= (-1)^k(b_k + b_{k+1} + \ldots + b_{n-1}) + (-1)^{k-1}(b_{k-1} + b_k + \ldots\end{aligned}$$

Dla $k = 1$ mamy

$$-(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = -(b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1}) + t_1(1 + b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1}).$$

Pierwszy ze składników jest dodatni na mocy założenia indukcyjnego, drugi zaś jest równy $Q(1)$.

Wielomian ma tylko pierwiastki w przedziale $(0, 1)$, więc nie zmienia znaku. A ponieważ $\lim\limits_{x \to +\infty} Q(x) = +\infty$, to $Q(1) > 0$. $\square$

**8.** Dany jest sześciokąt $ABCDEF$ (niekoniecznie wypukły) w którym $AB = DE$, $BC = EF$, $CD = FA$ a ponadto

$$\sphericalangle FAB = 3\sphericalangle CDE, \ \sphericalangle BCD = 3\sphericalangle EFA \ \text{ oraz } \ \sphericalangle DEF = 3\sphericalangle ABC$$

(kąty odpowiadają kątom wewnętrznym sześciokąta, w szczególności niektóre z nich mogą być większe niż $180°$). Załóżmy, że żadne dwa boki sześciokąta nie są równoległe. Pokazać, że proste $AD$, $BE$ i $CF$ przecinają się w jednym punkcie.

*Rozwiązanie:*

Z danych równości kątów wynika, że suma kątów sześciokąta to $4(\sphericalangle ABC + \sphericalangle CDE + \sphericalangle EFA)$, jednakże z drugiej strony suma ta wynosi $4 \cdot 180°$, więc $\sphericalangle ABC + \sphericalangle CDE + \sphericalangle EFA = 180°$. Ponieważ kąty sześciokąta są mniejsze niż $360°$, więc każdy z kątów $ABC$, $CDE$, $EFA$ jest mniejszy niż $120°$. Bez utraty ogólności, założymy, że $\sphericalangle EFA < 60°$.

Konstruujemy trójkąt $A'C'E'$, w którym kąty $A'$, $C'$, $E'$ są równe odpowiednio kątom $CDE$, $EFA$, $ABC$. Niech punkty $D'$, $F'$, $B'$ będą odpowiednio symetryczne do punktów $A'$, $C'$ i $E'$ względem prostych odpowiednio $C'E'$, $A'E'$ oraz $A'C'$. Odpowiednie kąty sześciokątów $ABCDEF$ i $A'B'C'D'E'F'$ są równe, a ponadto w sześciokącie $A'B'C'D'E'F'$ przeciwległe boki są równe i przekątne $AD'$, $B'E'$ oraz $C'F'$ przecinają się w jednym punkcie, ponieważ są to wysokości w trójkącie $A'C'E'$.

Przekształćmy teraz jednokładnie sześciokąt $A'B'C'D'E'F'$ w sześciokąt $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ i przesuńmy, tak aby $A_1 = A$ oraz $B_1 = B$ i niech $C \neq C_1$.

Niech orientacje obydwu sześciokątów będą zgodne z ruchem wskazówek zegara. Z konstrukcji wynika, że punkty $B = B_1$, $C$, $C_1$ oraz $A = A_1$, $F$, $F_1$ leżą na jednej prostej. Ponadto $E_1F_1 \parallel EF$, $ED \parallel E_1D_1$, $CD \parallel C_1D_1$. Niech $X$ i $Y$ leżą na $C_1D_1$ i $E_1F_1$, odpowiednio tak, że czworokąty $YFEE_1$ oraz $E_1EDD_1$ są równoległobokami. Wtedy łatwo zauważyć, że trójkąty z konstrukcji wynika że trójkąty $F_1EY$ i $C_1XC$ są przestające – sprzeczność, gdyż wtedy $\sphericalangle EFA = \sphericalangle YF_1F = \sphericalangle CC_1X = \sphericalangle BCD = 3\sphericalangle EFA$.

Zatem sześciokąty $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ i $ABCDEF$ się pokrywają, stąd teza na podstawie pierwszego akapitu. $\square$

**9.** Liczby rzeczywiste $a$, $b$, $c$ i $d$ których wartość bezwzględna jest większa niż 1 spełniają równość

$$abc + abd + acd + bcd + a + b + c + d = 0.$$

Pokazać, że

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} > 0.$$

*Rozwiązanie:*

Niech

$$x = \frac{a+1}{a-1}, \quad y = \frac{b+1}{b-1}, \quad z = \frac{c+1}{c-1}, \quad t = \frac{d+1}{d-1}.$$

Ponieważ moduły liczb $a$, $b$, $c$ i $d$ są większe od 1, to liczby $x$, $y$, $z$ i $t$ są dodatnie i różne od 1. Łatwo również zauważyć że nie wszystkie z nich są równe.

Ponadto z warunków zadania wynika, że

$$(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) = (a-1)(b-1)(c-1)(d-1),$$

więc $xyzt = 1$. Ponieważ $\dfrac{1}{a-1} = \dfrac{x-1}{2}$, to

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} = \frac{x+y+z+t-4}{4}.$$

Wobec tego wystarczy pokazać, że $x+y+z+t > 4$, jednakże na mocy AM-GM mamy

$$x + y + z + t > 4\sqrt[4]{xyzt} = 4.$$

**10.** Niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą całkowitą. Pokazać że istnieje zbiór $\mathcal{S}$ składający się z $2n$ dodatnich liczb całkowitych taki, że: Dla każdego $m = 2, 3, \ldots, n$

zbiór $\mathcal{S}$ może być podzielony na dwa podzbiory o równej sumie elementów, z których jeden ma $m$ elementów.

*Rozwiązanie:*

Pokażemy, że zbiorem spełniającym warunki zadania jest zbiór

$$\mathcal{S} = \{1 \cdot 3^k, 2 \cdot 3^k : k = 1, 2, \ldots, n-1\} \cup \left\{1, \frac{3^n + 9}{2} - 1\right\}.$$

Suma elementów zbioru $\mathcal{S}$ jest równa $2 \cdot 3^n$, więc aby pokazać zadanie wystarczy dla każdego $m = 2, 3, \ldots, n$ znaleźć $m$-elementowy podzbiór zbioru $\mathcal{S}$, którego suma jest równa $3^n$. Takim podzbiorem jest

$$A_m := \{2 \cdot 3^k : k = n-m+1, n-m+2, \ldots, n-1\} \cup \left\{1 \cdot 3^{n-m+1}\right\}.$$

**11.** W trójkącie $ABC$ punkty $N$, $K$ i $L$ leżą na bokach $AB$, $BC$ i $CA$, odpowiednio tak, że $AL = BK$ oraz $CN$ jest dwusieczną kąta $ACB$. Proste $AK$ i $BL$ przecinają się w punkcie $P$. Punkty $I$ i $J$ są środkami okręgów wpisanych w trójkąty $ALP$ i $BPK$, odpowiednio. Prosta $CN$ przecina $IJ$ w punkcie $Q$. Pokazać, że $IP = QJ$.

*Rozwiązanie:*

Jeśli $CA = CB$, to rozwiązanie jest jasne. Jeśli $CA \neq CB$, to załóżmy bez szkody, że $CN$ przecina $PK$. Oznaczmy przez $\omega_1$ i $\omega_2$ okręgi opisane na trójkątach $APL$ i $BPK$, które przecinają się po raz drugi w punkcie $T \neq P$. Wtedy

$$\sphericalangle LAT = \sphericalangle TPB = \sphericalangle TKB \quad \text{and} \quad \sphericalangle ALT = \sphericalangle APT = \sphericalangle TBK, \tag{1}$$

więc trójkąty $ALT$ i $KBT$ są przystające, więc $AT = TK$. Z **??** mamy, że $ACKT$ jest wpisany w okrąg stąd $T$ leży na dwusiecznej kąta $CN$.

Niech $IJ$ przecina $\omega_1$ i $\omega_2$ ponownie w $I_1$ i $J_1$, odpowiednio. Ponieważ trójkąty $AI_1L$ i $KJ_1B$ są podobne i $AL = BK$, to są przystające. Z twierdzenia o trójliściu mamy, że

$$II_1 = I_1L = I_1A = KJ_1 = J_1B = JJ_1,$$

więc $I_1I = JJ_1$. Ponadto $I_1T = J_1T$, ponieważ $AI_1LT$ jest przystający do $KJ_1BT$. Zatem, $T$ leży na symetralnej odcinka $IJ$,. Pozostaje pokazać, że $T$ leży na symetralnej $PQ$. Niech $R = AK \cap CT$. Wtedy

$$\begin{aligned} &\sphericalangle PRT = \sphericalangle ART = \sphericalangle RAC + \sphericalangle ACR = \\ &= \sphericalangle RAC + \sphericalangle AKT = \sphericalangle RAC + \sphericalangle KAT = \sphericalangle LAT = \sphericalangle BPT. \end{aligned}$$

Ponieważ $PQ$ połowi kąt $RPB$ mamy, że

$$\sphericalangle PQT = \sphericalangle PRT + \sphericalangle RPQ = \sphericalangle BPT + \sphericalangle RPQ = \sphericalangle BPT + \sphericalangle QPB = \sphericalangle QPT,$$

więc $T$ leży na symetralnej odcinka $PQ$.

**12.** Początkowo na tablicy zapisywana jest liczba naturalna. Następnie co sekundę iloczyn wszystkich niezerowych cyfr jest dodawany do bieżącej liczby. Wykazać, że istnieje dodatnia liczba całkowita która jest dodana nieskończenie wiele razy.

*Rozwiązanie:*

Zauważmy, że $9^{100} < 10^{99}$, gdyż

$$\left(1 + \frac{1}{9}\right)^{100} \geqslant 1 + \frac{100}{9} > 10.$$

Przez indukcję łatwo pokazać, że dla dowolnego $m \geqslant 100$ zachodzi nierówność $9^m < 10^{m-1}$. Oznaczamy przez $P(d)$ iloczyn wszystkich niezerowych cyfr liczby $d$.

Zastanówmy się, kiedy po raz pierwszy pojawiła się liczba $B$, nie mniejsza niż $\underbrace{11\ldots1}_{n+1}$, gdzie $n > 200$. Niech ta liczba powstała z liczby $A$. Ponieważ $P(A) \leqslant 9^n < 10^{n-1}$, to $A > B - 10^{n-1} > 10^n$. Znajdziemy takie $k$, że

$$\underbrace{11\ldots1}_{k}\underbrace{00\ldots0}_{n-k+1} \leqslant A < \underbrace{11\ldots1}_{k}0\underbrace{99\ldots9}_{n-k}.$$

Iloczyn niezerowych liczb $A$ nie przekracza $9^{n-k}$, z drugiej strony

$$A + p(A) \geqslant \underbrace{11\ldots1}_{n+1},$$

więc

$$P(A) \geqslant \underbrace{11\ldots1}_{n+1} - \underbrace{11\ldots1}_{k}0\underbrace{99\ldots9}_{n-k} > \underbrace{11\ldots1}_{n-k} > 10^{n-k-1},$$

więc $n - k \leqslant 99$, czyli $P(A) \leqslant 9^{99}$.

Wobec tego mamy nieskończenie wiele momentów w których dodawana jest liczba nie większa od $9^{99}$, więc pewna liczba dodawana jest nieskończenie wiele razy.

## Mecz matematyczny grupy średniej

**1.** Funkcja ze zbioru liczb rzeczywistych, przyjmująca wartości rzeczywiste spełnia:

$$x + f(x) = f(f(x))$$

dla każdego $x$ rzeczywistego. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $f(f(x)) = 0$

*Rozwiązanie:*

Zauważmy, że jeśli $f(a) = f(b)$ to

$$a + f(a) = f(f(a)) = f(f(b)) = b + f(b) \Rightarrow a = b$$

czyli $f$ jest różnowartościowa. Podstawiając za $x - 0$ dostajemy:

$$f(0) = f(f(0)) \Rightarrow f(0) = 0$$

Implikacja wynika z różnowartościowości. Więc $x = 0$ jest rozwiązaniem równania z zadania i ze względu na różnowartościowość $f$ jest to jedyne rozwiązanie.

**2.** Udowodnij, że:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geqslant 1$$

*Rozwiązanie:*

Pokażemy, że:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} \geqslant \frac{a^{4/3}}{a^{4/3} + b^{4/3} + c^{4/3}}$$

Mamy:

$$(a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}})^2 = (a^{\frac{4}{3}})^2 + (b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}})(a^{\frac{4}{3}} + a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}}) \geqslant (a^{\frac{4}{3}})^2 + 2b^{\frac{2}{3}} c^{\frac{2}{3}} 4a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3}} c^{\frac{1}{3}} =$$

$$a^{\frac{8}{3}} + 8a^{\frac{2}{3}} bc = a^{\frac{2}{3}}(a^2 + 8bc)$$

Analogicznie z b i c. Sumując otrzymujemy:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{a^{4/3}}{a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}} + \frac{b^{4/3}}{a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}} + \frac{c^{4/3}}{a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}} = 1$$

**3.** Liczba naturalna $n_1$ zapisana jest w systemie dziesiętnym za pomocą 333 cyfr, z których żadna nie jest zerem. Dla $i - 1, 2, \cdots, 332$ liczba $n_{i+1}$ powstaje z liczby $n_i$ poprzez przeniesienie cyfry jedności na początek. Dowieść, że albo wszystkie liczby $n_1, n_2, \cdots, n_{333}$ są podzielne przez 333 albo żadna z nich.

*Rozwiązanie:*

Niech $j_i (i = 1, 2, 3, ..., 333)$ oznacza cyfrę jedności liczby $n_i$. Wówczas dla $i = 1, 2, ..., 332$ mamy (1):

$$n_{i+1} = \frac{n_i + 10^{333} j_i - j_i}{10}$$

skąd $10n_{i+1} = n_i + (10333 - 1)j_i$. Liczba

$$10^{333} - 1 = (10^3 - 1)(10^{330} + 10^{327} + 10^{324} + ... + 10^3 + 1)$$

jest podzielna przez 333 oraz liczby 10 i 333 są względnie pierwsze. Z drugiej równości (1) wynika zatem, że liczba $n_i$ jest podzielna przez 333 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $n_{i+1}$ jest podzielna przez 333.

**4.** Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele czwórek różnych liczb naturalnych $(a, b, c, d)$ o tej własności, że każdy z iloczynów $ab, bc, ac, bd, cd$ jest o 1 większy od kwadratu pewnej liczby naturalnej.

*Rozwiązanie:*

Rozpatrzmy dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej $k$ następującą czwórkę liczb: $a = k^2 + (k+1)^2$, $b = (k+1)^2 + (k+2)^2$, $c = 2$, $d = (k+2)^2 + (k+3)^2$. Wykażemy, że taka czwórka spełnia warunki zadania. Z dowolności $k$ będzie wynikać teza. Korzystając z Tożsamości Diofantosa:

$$\begin{aligned}
ab &= (k^2 + (k+1)^2)((k+1)^2 + (k+2)^2) \\
&= ((k+1)^2 - k(k+2))^2 + (k(k+1) + (k+1)(k+2))^2 \\
&= 1 + (2(k+1)^2)^2 \\
bc &= 2((k+1)^2 + (k+2)^2) = (2k+3)^2 + 1 \\
ca &= 2(k^2 + (k+1)^2) = (2k+1)^2 \\
bd &= ((k+1)^2 + (k+2)^2)((k+2)^2 + (k+3)^2) \\
&= ((k+2)^2 - (k+1)(k+3))^2 + ((k+1)(k+2) + (k+2)(k+3))^2 \\
&= 1 + (2(k+2)^2)^2 \\
cd &= 2((k+2)^2 + (k+3)^2) = (2k+5)^2 + 1
\end{aligned}$$

**5.** Pokazać, że dla każdego całkowitego $n \geqslant 1$ ciąg

$$2, 2^2, 2^{2^2}, \ldots \ (mod\ n)$$

jest od pewnego miejsca stały.

*Rozwiązanie:*

Zdefiniujmy ciąg $\{a_k\}$ taki, że $a_1 = 2$ oraz $a_{k+1} = 2^{a_k}$. Oczywiście ciąg ten jest tym samym ciągiem co w tezie zadania. Dodatkowo niech ciąg $\{b_k\}$ będzie taki, że $b_1$ to największy dzielnik nieparzysty $n$ oraz $b_{i+1}$ to największy dzielnik nieparzysty $\varphi(b_i)$ gdzie $\varphi$ to funkcja Eulera. Oczywistym jest, że ciąg $b_k$ od pewnego miejsca jest stale równy 1. Weźmy teraz nasz wyjściowy ciąg. Jeśli ma być on od pewnego miejsca stały to musimy mieć

$$a_{m+1} \equiv a_m\ (mod\ n)\ (*)$$

$n$ możemy zapisać jako $2^{k_1}b_1$. Wtedy by mieć (*) wystarczy nam:

$$a_{m+1} \equiv a_m\ (mod\ 2^{k_1})\ i\ a_{m+1} \equiv a_m\ (mod\ b_1)$$

Dla odpowiednio dużego $m$ mamy $a_{m+1} \equiv a_m \equiv 0\ (mod\ 2^{k_1})$, więc wystarczy by $a_{m+1} \equiv a_m\ (mod\ b_1)$. Skoro 2 i $b_1$ są względnie pierwsze to:

$$a_{m+1} = 2^{a_m} \equiv 2^{a_m\ mod\ \varphi(b_1)}\ (mod\ b_1)$$

Czyli to czego teraz chcemy to by $a_m \equiv a_{m-1}\ (mod\ \varphi(b_1))$. Analogiczne rozumowanie jak wcześniej pokazuje, że jeśli $\varphi(b_1) = 2^{k_2}b_2$ to chcemy mieć:

$$a_{m+1} \equiv a_m\ (mod\ 2^{k_2})\ i\ a_{m+1} \equiv a_m\ (mod\ b_2)$$

Zauważmy, że to jest praktycznie to samo wcześniej. Kontynuując nasze rozumowanie idziemy "w dół" po ciągu $b_k$, aż dojdziemy do jedynki dla której będziemy mieli przystawanie. Czyli nasz wyjściowy ciąg od pewnego miejsca rzeczywiście będzie stały.

**6.** Dwieście studentów rowiązywało 6 zadań. Każde zadanie rozwiązało przez conajmniej 120 uczestników. Pokazać, że istnieje dwóch studentów, którzy w sumie rozwiązali wszystkie zadania.

*Rozwiązanie:*

Dla każdej pary studentów rozważmy zbiór problemów, których nie rozwiązał żaden z nich. Chcemy pokazać, że co najmniej jeden taki zbiór jest pusty. Z jednej strony mamy $\binom{200}{2} = 19900$ zbiorów. Z drugiej strony, dla każdego problemu istnieje co najwyżej 80 studentów, którzy go nie zrobili, więc taki problem może należeć do co najwyżej $\binom{80}{2} = 3160$ zbiorów. Jest 6 problemów więc to daje w sumie $6 \cdot 3160 = 18960$ zbiorów czyli co najmniej $19900 - 18960 = 940$ zbiorów jest pustych.

**7.** Niech $n$ będzie liczbą całkowitą dodatnią. Ciąg $n$ liczb całkowitych dodatnich (niekoniecznie różnych) nazwiemy ciągiem Masarni jeśli zachodzi warunek: dla każdego $k \geqslant 2$, jeśli w ciągu występuje $k$, to występuje też $k-1$, oraz pierwsze $k-1$ jest wcześniej w ciągu niż ostanie $k$. Pokazać, że liczba ciągów Masarni jest równa $n!$

*Rozwiązanie:*

Pokażemy, że istnieje bijekcja między permutacjami zbioru $\{1, 2, .., n\}$ oraz ciągami Masarni co oczywiście da tezę. Otóż weźmy dowolny ciąg Masarni i skonstruujmy pewną permutację $s$ według zadanego przepisu:

1.Ponumerujmy jedynki w kolejności od prawej do lewej (jedynka najbardziej na prawo dostaje liczbę 1, następna jedynka dostaje 2 itd. ostatnia jedynka dostaje $k$) i w naszej permutacji $s$ wstawiamy te numery, które dostały jedynki, na te miejsca które te jedynki zajmowały, czyli jeśli na a-tym miejscu w ciągu Masarni jest b-ta jedynka licząc od prawej, to w naszej permutacji $s$ na a-tym miejscu kładziemy liczbę b.

2.Dla dwójek robimy to samo, z tym że zamiast numerować dwójki poczynając od numeru 1, numerujemy je zaczynając od $k+1$ gdzie $k$ było liczbą jedynek.

3.I tak dalej...

Np. dla ciągu Masarni 2211124334 dostajemy permutację 653214(10)879. Inny przykład: ciąg Masarni 213244 przejdzie na 314265.

Załóżmy, że dla pewnych dwóch ciągów Masarni $A$ i $B$, powyższa konstrukcja zwraca tę samą permutację. Niech $m$ będzie najmniejszym numerem, dla którego ciągi $A$ i $B$ się różnią. Do momentu dotarcia do numeru $m$, konstrukcja odpowiadających permutacji przebiega dokładnie tak samo dla obu ciągów. Skoro $A$ i $B$ dają tę samą permutację więc pozycje liczb $m$ w obu ciągach muszą być takie same za wyjątkiem ostatniego $m$. Ale jeśli ostatniemu w $A$ przypisujemy liczbę $w$. To w ciągu $B$ w tym samym miejscu musi być albo $m$ albo pierwsze (skrajne prawe) $m+1$. Symetrycznie z ostatnim $m$ w $B$. Ale wtedy w którymś z ciągów ostatnie wystąpienie $m+1$ poprzedza pierwsze wystąpienie $m$ co jest sprzeczne z definicją ciągu Masarni. Więc nasza konstrukcja jest iniekcją. Poza tym widzimy, że dla dowolnej permutacji, możemy naszą konstrukcję przeprowadzić "od tył" otrzymując ciąg Masarni więc nasza konstrukcja jest suriekcją co daje bijektywność i tezę.

**8.** Dwa okręgi $O1$, $O2$ przecinają się w punktach $M, N$. Niech $l$ będzie prostą styczną do $O1$ w $A$ i do $O2$ w $B$ oraz taką, że $M$ jest bliżej $l$ niż $N$.

Niech prosta równoległa do $l$ i przechodząca przez $M$ przecina okręgi $O1, O2$ ponownie w punktach odpowiednio $C, D$. Proste $CA$ i $DB$ przecinają się w $E$, proste $AN$ i $CD$ przecinają się w $P$, proste $BN$ i $CD$ przecinają się w $Q$. Pokazać, że $EP{=}EQ$

*Rozwiązanie:*

Mamy

$$\sphericalangle EAB = \sphericalangle ECD = \sphericalangle ACD = \sphericalangle BAM$$

gdzie ostatnia równość wynika z twierdzenia o kącie dopisanym. Analogicznie $\sphericalangle EBA = \sphericalangle ABM$. Więc trójkąty $EAB$ i $ABM$ są przystające (kbk) czyli $EM$ jest prostopadła do $AB$, czyli też do $PQ$. Prosta $MN$ jest osią potęgową więc przecina odcinek $AB$ w połowie, więc z twierdzenia Talesa tnie też w połowie $PQ$ więc $M$ to środek $PQ$. Skoro prosta $EM$ jest prostopadła do $PQ$ i przechodzi przez środek, to musi być symetralną, więc $EP = EQ$.

**9.** W trójkącie $ABC$ punkt $H$ jest ortocentrum, $O$ środkiem okręgu opisanego, zaś $R$ promieniem tego okręgu. Punkt $D$ jest symetryczny do punktu $A$ względem $BC$, punkt $E$ jest symetryczny do $B$ względem $CA$ oraz punkt $F$ jest symetryczny do $C$ względem $AB$. Wykazać, że punkty $D, E, F$ leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy $OH = 2R$.

*Rozwiązanie:*

Niech $G$ będzie środkiem ciężkości trójkąta $ABC$, zaś $K, L, M$ obrazami odpowiednio punktów $A, B, C$ w jednokładności o środku $G$ i skali 4. Wówcza punkt $D$ leży na prostej $LM$, punkt $E$ leży na prostej $MK$, zaś punkt $F$ leży na prostej $KL$. Warunek $OH = 2R$ jest równoważny stwierdzeniu, że środek $X$ odcinka $OH$ leży na okręgu opisanym na trójkącie $ABC$. Punkty $O, G, H$ leżą w tej właśnie kolejności na jednej prostej oraz $GH = 2OG$ (prosta Eulera). Skoro $X$ jest środkiem odcinka $OH$, to $GH = 4GX$, więc punkt $H$ jest obrazem punktu $X$ w rozważanej jednokładności. Teza zadania jest zatem równoważna stwierdzeniu, że punkt $H$ leży na okręgu opisanym na trójkącie $KLM$. Zauważmy teraz, że punkty $D, E, F$ są rzutami prostokątnymi punktu $H$ na proste zawierające boki trójkąta $KLM$. Z twierdzenia o prostej Simsona wnosimy więc, że warunek leżenia punktów $K, L, M, H$ na jednym okręgu jest równoważny współliniowości punktów $D, E, F$, co kończy rozwiązanie zadania.

**10.** Dany jest trójkąt $ABC$ taki, że $\sphericalangle CAB > \sphericalangle ABC$. Punkt $I$ jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Niech $D$ będzie punktem na odcinku $BC$ takim, że $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ABC$. Niech $\omega$ będzie okręgiem stycznym do $AC$ w punkcie $A$ przechodzącym przez $I$, zaś $X$ będzie drugim punktem przecięcia $\omega$ i okręgu opisanego na $ABC$. Udowodnij, że dwusieczne kątów $\sphericalangle DAB$ i $\sphericalangle CXB$ przecinają się na prostej $BC$.

*Rozwiązanie:*

Niech $M$ to środek łuku $BC$ okręgu opisanego na $ABC$ oraz $Y$ punkt przecięcia dwusiecznej $\sphericalangle BXC$ z prostą $BC$. Wówczas $A, I, M$ są współliniowe oraz $X, Y, M$ także. Niech $\sphericalangle IAC = a$ oraz $\sphericalangle IAD = b$. Wtedy $\sphericalangle BAD = a - b$ oraz $\sphericalangle AXI = a$. Ponadto $aABC = \sphericalangle CAD = a + b$ oraz $\sphericalangle BXY = \sphericalangle YXC = \sphericalangle MBC = \sphericalangle MCB = a$. Zauważmy, że $\sphericalangle CXA = \sphericalangle CBA = a + b$, więc $\sphericalangle IXC = b$. Z lematu o trójliściu mamy równość odcinków $MB = MI = MC$ Ponadto $MYB$ oraz $MBX$ są podobne na mocy cechy kąt-kąt-kąt. Zatem $MI^2 = MB^2 = MY \cdot MX$. Zatem $MI$ jest styczna do okręgu opisanym na $XYI$, więc $\sphericalangle MIY = a + b = \sphericalangle IXY = \sphericalangle ABY$. Zatem czworokąt $AYIA$ jest cykliczny. Zatem

$$\sphericalangle IBY = \frac{a + b}{2} = \sphericalangle YAI$$

Z tego wynika, że $\sphericalangle BAY = \frac{a-b}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle BAD$, co kończy dowód.

## Mecz matematyczny grupy starszej

**1.** Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takie, że

$$f(m-n) + 4mn$$

jest kwadratem liczby całkowitej dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich $m > n$.

*Rozwiązanie:*

Niech $x$ będzie liczbą całkowitą dodatnią taką, że $f(x) > x^2$. Wtedy dla wszelkich $m, n$ takich, żę $m - n = x$ mamy

$$f(m-n) + 4mn > (m-n)^2 + 4mn = (m+n)^2$$

więc $f(m-n)+4mn \geqslant (m+n+1)^2$ skąd $f(m-n) \geqslant (m-n)^2+2(m+n)+1$. Jeśli weźmiemy $m, n$ odpowiednio duże to prawa strona dąży do nieskończoności więc dla dowolnego $x$ mamy $x^2 \geqslant f(x)$.

Niech teraz $x$ będzie liczbą całkowitą dodatnią, że $x^2 > f(x)$, wtedy dla dowolnych $m, n$ takich, że $m - n = x$ mamy $f(m-n) + 4mn < (m-n)^2 + 4mn = (m+n)^2$ więc $(m+n-1)^2 \geqslant f(m-n) + 4mn$ and $f(m-n) \geqslant (m-n)^2 - 2(m+n) + 1$. Biorąc $m, n$ odpowiednio duże $f(m-n)$ maleje w nieskończoność – sprzeczność. Zatem $f(x) = x^2$ dla dowolnego $x$ i łatwo sprawdzić że funkcja ta spełnia warunki zadania.

**2.** Niech $m$ będzie liczbą całkowitą taką, że $|m| \geqslant 2$. Rozważmy ciąg $a_1, a_2, \ldots$ liczb całkowitych taki, że $a_1$, $a_2$ nie są zerami jednocześnie oraz dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej $n$ mamy $a_{n+2} = a_{n+1} - ma_n$. Pokazać, że jeśli liczby całkowite $r > s \geqslant 2$ spełniają równości $a_r = a_s = a_1$, to $r - s \geqslant |m|$.

*Rozwiązanie:*

Załóżmy, że $\mathrm{NWD}(a_1, a_2) = 1$, w przeciwnym wypadku wszystkie wyrazy będą podzielne przez $\mathrm{NWD}(a_1, a_2) > 1$ i możemy rozpatrywać ciąg mający te same własności co powyższy a którego wyrazy są podzielny przez $\mathrm{NWD}(a_1, a_2)$.

Na podstawie rekurencji dostajemy

$$a_2 \equiv a_3 \equiv a_4 \equiv \ldots \pmod{|m|}.$$

Ponadto

$$a_n \equiv a_2 - (a_1 + (n-3)a_2)m \pmod{m^2} \quad \text{for} \quad n \geqslant 3. \tag{2}$$

Istotnie, jeśli $n = 3$ to jest to prawdą. Przypuśćmy, że kongruencja zachodzi dla $n$. Zauważmy, że

$$ma_{n-1} \equiv ma_2 \pmod{m^2},$$

więc

$$a_{n+1} = a_n - ma_{n-1} \equiv a_2 - (a_1 + (n-3)a_2)m - ma_2 \equiv a_2 - (a_1 + (n-2)a_2) \pmod{m^2}.$$

Ponadto jeśli $a_1 = a_2$, to powyższa równość jest również prawdą dla $n = 2$.

Weźmy teraz $r > s \geqslant 2$ takie, że $a_r = a_s = a_1$. Jeśli $s = 2$, to $a_1 = a_2$ i

$$a_2 - (a_1 + (r-3)a_2)m \equiv a_r = a_s \equiv a_2 - (a_1 + (s-3)a_2)m \pmod{m^2}.$$

Zatem

$$(r-s)a_2 \equiv 0 \pmod{|m|}. \tag{3}$$

Jeśli $a_1 \neq a_2$, to dostajemy tę samą rekurencję jak w **??**.

Ostatecznie zauważmy, że $\mathrm{NWD}(a_2, m) = 1$. Istotnie, jeśli liczba pierwsza $p$ dzieli $a_2$ i $m$, to $p \mid a_n$ dla $n \geqslant 2$ (z **??**). Jednakże $p \nmid a_1$, więc $p \nmid a_1 = a_r = a_s$ – sprzeczność. Wobec tego z **??** mamy $|m| \mid (r-s)$, więc $|m| \leqslant r - s$.

**3.** Niech $\mathcal{S}$ będzie niepustym podzbiorem liczb całkowitych dodatnich taki, że dla dowolnych (niekoniecznie różnych) liczb całkowitych $a$ i $b$ ze zbioru $\mathcal{S}$, liczba $ab+1$ również należy do $\mathcal{S}$. Pokazać, że zbiór liczb pierwszych które nie dzielą żadnego elementu zbioru $\mathcal{S}$ jest skończony.

*Rozwiązanie:*

Niech $p$ będzie liczbą pierwszą która nie dzieli żadnego elelemntu zbioru $S$. Pokażemy, że $p \mid \min\{S\}^2 - \min\{S\} + 1$.

Niech $R = \{r_1, r_2, r_3, \ldots, r_k\}$ będzie zbiorem składającym się z reszt elementów $S$ modulo $p$, ($r_i$'s są różne modulo $p$). Załóżmy, że $k \geqslant 2$. Ponieważ $p$ nie dzieli żadnego elementu $S$, to $k \leqslant p - 1$. Rozpatrzmy zbiór

$$R' = \{r_1^2 + 1, r_1r_2 + 1, r_1r_2 + 1, \ldots, r_1r_k + 1\},$$

i zauważmy, że wszystkie jego wyrazy są różne modulo $p$. Również z definicji $R$, wynika, że $R' \subseteq R$ czyli $R = R'$. Dodając teraz wszystkie elementy $R$ dostajemy $s = r_1 + r_2 + \ldots + r_k$ natomiast dodając wszystkie elementy z $R'$ mamy $k + r_1 s$, więc

$$s \equiv k + r_1 s \pmod{p}.$$

Nie może być $p \mid s$ jako, że $k \leqslant p - 1$. Podobnie uzyskujemy, że $s \equiv k + r_i s \pmod{p}$ dla dowolnego $i = 1, 2, 3, \ldots, k$, więc $r_i$'s są równe modulo $p$ – sprzeczność! Wobec tego $k = 1$, jednakże wtedy

$$r_1 \equiv r_1^2 + 1 \pmod{p} \implies p \mid r_1^2 - r_1 + 1.$$

Ponieważ $\min\{S\}^2 - \min\{S\} + 1 \neq 0$, liczb pierwszych $p$ jest skończenie wiele.

**4.** Niech $\mathbb{Q}_+$ oznacza zbiór wszystkich dodatnich liczb wymiernych. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{Q}_+$ spełniające równość

$$f\left(x^2 f(y)^2\right) = f(x)^2 f(y) \quad \text{dla dowolnych } x, y \in \mathbb{Q}_+.$$

*Rozwiązanie:*

Oznaczmy przez $P(x,y)$ nasze równanie funkcje. Robiąc podstawienie $P\left(f(x), y\right)$ dostajemy

$$f\left(f(x)^2 f(y)^2\right) = f(f(x))^2 f(y).$$

Zamieniając miejscami $x$, $y$ mamy:

$$f(f(x))^2 f(y) = f(f(y))^2 f(x) \Rightarrow \frac{f(f(x))^2}{f(x)} = \frac{f(f(y))^2}{f(y)} = c$$

dla pewnej stałej $c \in \mathbb{Q}_{>0}$. Pokażemy teraz, że

$$\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{\text{n razy}}(x) = f^n(x) = c \cdot \left(\frac{f(x)}{c}\right)^{1/2^{n-1}}$$

dla wszystkich całkowitych $n \geqslant 1$.

Istotnie, zachodzi to dla $n = 1$. Poprzez indukcję, dla $n \geqslant 2$ mamy

$$f^n(x) = f(f(f^{n-2}(x))) = \left(cf(f^{n-2}(x))\right)^{1/2} = \left(cf^{n-1}(x)\right)^{1/2} =$$
$$= \left(c^2 \left(\frac{f(x)}{c}\right)^{1/2^{n-2}}\right)^{1/2}$$

co oczywiście potwierdza nasza tezę indukcyjną.

Jednakże wtedy:

$$\left(\frac{f(x)}{c}\right)^{1/2^{n-1}} = \frac{f^n(x)}{c} \in \mathbb{Q}_{>0}$$

dla każdego $n$. Jeśli $p$ jest liczbą pierwszą to dla dowolnego $n$:

$$2^{n-1} \mid v_p\left(\frac{f(x)}{c}\right) \Longrightarrow v_p\left(\frac{f(x)}{c}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{f(x)}{c} = 1.$$

Zatem $f$ jest stała i równa $c$ która spełnia równość $c = c^3$, więc $c = 1$ zatem: $\boxed{f(x) \equiv 1}$ jest jedynym rozwiązaniem.

**5.** Niech

$$P(x) = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \ldots + a_0$$

będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych takim, że dla pewnego $m \geqslant 2$ wszystkie rzeczywiste pierwiastki wielomianu

$$P^{(m)}(x) := \underbrace{P(P(\ldots P}_{m \text{ razy}}(x))\ldots)$$

są dodatnie. Pokazać, że wszystkie rzeczywiste pierwiastki wielomianu $P(x)$ są dodatnie.

*Rozwiązanie:*

Jeśli wielomian $P(x)$ nie ma dodatnich pierwiastków rzeczywistych, to dla $x > 0$ mamy $P(x) > 0$, więc $P^{(k)}(x) > 0$, czyli $P^{(k)}(x)$ nie ma dodatnich rzeczywistych pierwiastków. Zatem $P(x)$ ma dodatnie pierwiastki rzeczywiste. Ponadto, jeśli $P(0) = 0$, to $P^{(k)}(0) = 0$ — sprzeczność! Rozpoczniemy od następującego lematu:

**Lemat.** *Niech $P(x)$ ma pierwiastki zarówno dodatnie jak i ujemne. Wtedy dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej $k$, wielomian $P^{(k)}(x)$ ma pierwiastki rzeczywiste ujemne i dodatnie.*

*Dowód.* Indukcja. Dla $k = 1$ jest to założenie. Załóżmy, że teza zachodzi dla $k \leqslant j$. Niech $x_1$, $x_2$ będą odpowiednio najmniejszym i największym pierwiastkiem wielomianu $P$ a $x_3$, $x_4$ odpowiednio najmniejszym i największym pierwiastkiem wielomianu $P^{(j)}$. Wtedy $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, $x_3 < 0$, $x_4 > 0$.

Jeśli $d$ jest nieparzyste, to $P(x)$ przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $(-\infty, x_1]$, wtedy istnieje $x_5 \in (-\infty, x_1]$ takie, że $P(x_5) = x_3$. Jeśli $d$ jest parzysty to $P(x)$ przyjmuje wszystkie wartości z przedziału od 0 do $+\infty$ wobec tego istnieje $x_5 \in (-\infty, x_1]$, taka, że $P(x_5) = x_4$. W obu przypadkach $P(x)$ przyjmuje wszystkie wartości od 0 do $+\infty$ on $[x_2, +\infty)$, więc istnieje $x_6 \in (x_2, +\infty)$ taki $P(x_6) = x_4$.

Teraz

$$P^{(j+1)}(x_5) = P^{(j)}(P(x_5)) \in \{P^{(j)}(P(x_3)), P^{(j)}(P(x_4))\}.$$

Wtedy $P^{(j+1)}(x_5) = 0$ i $x_5 < 0$, więc $P^{(j+1)}(x)$ ma ujemny pierwiastek. Ponadto

$$P^{(j+1)}(x_6) = P^{(j)}(P(x_6)) = P^{(j)}(x_4) = 0$$

oraz $x_6 > 0$, więc $P^{(j)}(x)$ ma dodatni pierwiastek. □

Na podstawie naszego lematu, jeśli $P(x)$ ma również pierwiastek ujemny, to $P^{(m)}(x)$ również – sprzeczność.

**6.** W Arabii Saudyjskiej znajduje się 2019 miast, a wszystkie odległości między nimi są różne. Niektóre miasta są połączone lotami (w obie strony). Okazało się, że dokładnie dwa loty opuszczają każde miasto, a są to loty do dwóch najbardziej odległych miast. Udowodnij, że korzystając z lotów, z dowolnego miasta można dotrzeć do każdego innego.

*Rozwiązanie:*

Rozważmy graf $G$, którego wierzchołkami są miasta, a krawędziami są loty. Musimy pokazać, że graf $G$ jest spójny. Załóżmy, że $G$ składa się z kilku spójnych składowych. Pokażemy, że każda z tych składowych ma parzystą liczbę wierzchołków, co oczywiście zakończy dowód, gdyż 2019 jest liczbą nieparzystą.

**Lemat.** *Niech $AB$ i $XY$ będą dwiema różnymi odcinkami między dwiema różnymi składowymi $G$. Wtedy odcinki $AB$ i $XY$ przecinają się w ich punkcie wewnętrznym*

*Dowód.* Załóżmy, że jest odwrotnie, są dwa przypadki.

- Proste $AB$ i $XY$ przecinają się w punkcie wewnętrznym dokładnie jednego z odcinków $AB$, $XY$, dla ustalenia uwagi, niech to będzie odcinek $XY$. Możemy założyć (po zmianie nazw wierzchołków), że odcinek $AB$ leży w trójkącie $AXY$. Wtedy ponieważ $AB < \max(AX, AY)$, to wierzchołek $A$ musi być połączony z co najmniej jednym z wierzchołków $X$, $Y$. Jest to sprzeczne z faktem, że $A$ i $X$ (lub $Y$) są w różnych składowych grafu $G$.

- Proste $AB$ i $XY$ przecinają się poza odcinkami $AB$ i $XY$ (lub w jednym z punktów końcowych $A$, $B$, $X$,Y), lub proste $AB$ i $XY$ są równoległe. Po ewentualnej zmianie nazewnictwa wierzchołków możemy założyć, że $ABXY$ jest czworokątem wypukłym oraz odcinki $AX$ i $BY$ mają wspólny punkt $O$. Wówczas

  $$AX+BY = (OA+OX)+(OB+OY) = (OA+OB)+(OX+OY) \geqslant AB+XY.$$

  Dlatego spełniony jest co najmniej jeden z warunków $AX \geqslant AB$, $BY \geqslant XY$. Ale w pierwszym przypadku wierzchołek $A$ musi być połączony z wierzchołkiem $X$, a w drugim przypadku wierzchołek $Y$ z wierzchołkiem $B$ – sprzeczność.

□

Wróćmy do zadania. Ponieważ każdy wierzchołek ma stopień 2, to składowymi grafu $G$ są cykle. Niech $\mathcal{C}$ będzie jednym z takich cykli i niech $XY$ będzie krawędzią grafu $G$, którego końce $X$ i $Y$ nie należą do cyklu $\mathcal{C}$. Zgodnie z lematem, dowolne dwa kolejne wierzchołki cyklu $C$ leżą po przeciwnych stronach prostej $XY$; dlatego cykl $C$ ma parzystą liczba wierzchołków.

**7.** Niech $n$ będzie liczbą całkowitą dodatnią, a $\mathcal{S}$ zbiorem mającym $2^n + 1$ elementów. Niech $f$ będzie funkcją prowadzącą z 2-elementowych podzbiorów $\mathcal{S}$ do zbioru $\{0, 1, 2, \ldots, 2^{n-1} - 1\}$. Przypuśćmy, że dla dowolnych $x, y, z \in \mathcal{S}$ jedna z liczb $f(\{x, y\})$, $f(\{y, z\})$, $f(\{z, x\})$ jest sumą dwóch pozostałych. Pokazać, że istnieją liczby $a, b, c \in \mathcal{S}$ takie że

$$f(\{a, b\}) = f(\{b, c\}) = f(\{c, a\}) = 0.$$

*Rozwiązanie:*

Rozpatrzmy graf pełny o $2^n + 1$ wierzchołkach w którym każda krawędź ma przypisana liczbę ze zbioru $\{0, 1, 2, \ldots, 2^{n-1} - 1\}$. Wiemy, że w dowolnym trójkącie suma liczba na dwóch bokach jest równa trzeciemu. Należy pokazać, że istnieje trójkąt którego wszystkie boki mają przypisaną liczbę 0. Pokażemy to indukcyjnie, dla $n = 1$ jest to jasne. Załóżmy, że teza jest prawdziwa dla grafu pełnego o $2^{n-1} + 1$ wierzchołkach.

Zauważmy, że znajdziemy podgraf mający $2^{n-1} + 1$ wierzchołków i taki, że każda liczba przypisana do jego krawędzi jest parzysta. Istotnie: każdy trójkąt zawiera parzystą liczbę krawędzi z przypisaną liczbą nieparzystą. To samo zachodzi dla dowolnego cyklu, gdyż cykl $A_1 A_2 \ldots A_n$ może być rozłożony na $n - 2$ trójkąty

$$A_1 A_2 A_3,\ A_1 A_3 A_4,\ \ldots, A_1 A_{n-1} A_n.$$

W szczególności nie istnieje nieparzysty cykl w którym liczby przypisane do krawędzi są wszystkie nieparzyste. Wobec tego graf utworzony z naszego wyjściowego grafu i taki, że jego wierzchołki są połączone wtedy i tylko wtedy, gdy ich krawędź w oryginalnym grafie ma przypisaną liczbę nieparzystą, nie posiada cyklu o nieparzystej długości. Wobec tego jest dwudzielny. Zatem jedna z jego części zawiera co najmniej $2^{n-1} + 1$ wierzchołków.

Aplikując założenie indukcyjne do tego podgrafu dostajemy tezę.

**8.** Płaszczyzna jest podzielona na wypukłe siedmiokąty o średnicy jednostkowej. Pokazać, że dowolny okrąg o promieniu 200 przecina co najmniej miliard siedmiokątów.

*Średnicą zbioru nazywamy największą odległość między dwoma punktami tego zbioru.*

*Rozwiązanie:*

Niech $O$ będzie środkiem danego okręgu i $K_R$ okręgiem o promieniu $R$ i środku $O$. Niech $\mathcal{C}$ będzie zbiorem kątów wszystkich siedmiokątów a $\mathcal{C}_R \subset \mathcal{C}$ zbiorem kątów których wierzchołki należą do $K_R$. Wystarczy pokazać, że $|\mathcal{C}_{200}| \geqslant 7 \cdot 10^9$.

Pokażemy, że średnia wartość kąta w kole $\mathcal{C}_R$ nie przekracza $2/3\pi$. Istotnie, jeśli trzy lub więcej kątów siedmiokątów schodzi się w jednym punkcie to jest to jasne, a jeśli dwa to średnio dostajemy kąt nie większy niż $\pi/2$. Z drugiej strony rozpatrzmy zbiór kątów $\mathcal{T}_R$ siedmiokątów mających niepuste przecięcie z $K_R$. Ponieważ średnica każdego z siedmiokątów jest nie większa od 1, to $\mathcal{T}_R \subset \mathcal{C}_{R+1}$. Średnia wartość kąta siedmiokąta wypukłego to $5/7\pi$; więc średnia wartość kątów w $\mathcal{T}_R$ to $5/7\pi$.

Niech $k = |\mathcal{C}_R|$, $m = |\mathcal{T}_R|$, wtedy $|\mathcal{T}_R \setminus \mathcal{C}_R| = m - k$. Ponieważ dowolny kąt w $\mathcal{T}_R \setminus \mathcal{C}_R$ jest mniejszy od $\pi$, to na podstawie powyższych rozważań mamy nierówność

$$(m-k)\pi + k \cdot 2\pi/3 > m \cdot 5\pi/7.$$

Wobec tego $m > 7k/6$, czyli w szczególności $|\mathcal{C}_{R+1}| > |\mathcal{C}_R|$. Ponieważ

$$\left(\frac{7}{6}\right)^6 > 2 \quad \text{i} \quad 2^{10} > 10^3,$$

to

$$|\mathcal{C}_{R+60}| > 2^{10}|\mathcal{C}_r| > 10^3|\mathcal{C}_R|.$$

Jednakże $|\mathcal{C}_2| \geqslant 1$, więc

$$|\mathcal{C}_{200}| = |\mathcal{C}_{2+6+6+6+60+60+60}| > 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^3 > 7 \cdot 10^9.$$

□

**9.** W trójkącie $ABC$ punkty $A_1$ i $B_1$ leżą na bokach $BC$ i $CA$ tak, że na czworokącie $AA_1B_1B$ można opisać okrąg. Niech $S$ będzie punktem przecięcia $AA_1$ i $BB_1$. Punkty $X$ i $Y$ są obrazami $S$ względem prostych $CB$ i $CA$, odpowiednio. Okręgi opisane na trójkątach $CA_1B_1$ i $CAB$ przecinają się w punkcie $P \neq A$. Pokazać, że na czworokącie $XPCY$ można opisać okrąg.

*Rozwiązanie:*

Na podstawie dobrze znanego lematu o spiralnym podobieństwie widzimy, że $PA_1B$ i $PB_1C$ są podobne. W szczególności czworokąty $PXBA_1$ i $PSAB_1$ są spiralnie podobne (trójkąty $PAS$ i $PBX$ są spiralnie podobne gdyż trójkąty $PA_1B$ i $PB_1C$ są spiralnie podobne). Wobec tego

$$\sphericalangle XPS = \sphericalangle APB = \sphericalangle ACB$$

i podobnie $\sphericalangle SPY = \sphericalangle BCA$, więc $\sphericalangle XPY = 2\sphericalangle BCA$.

Zatem

$$\begin{aligned}\sphericalangle XCY = \sphericalangle XCB + \sphericalangle BCA + \sphericalangle ACY = \sphericalangle BCS + \sphericalangle ACB + \sphericalangle ACS = \\ = 2\sphericalangle ACB = \sphericalangle XPY,\end{aligned}$$

skąd teza.

**10.** Dany jest trójkąt $ABC$ ($AB > BC$) wpisany w okrąg $\Omega$. Na bokach $AB$ i $BC$ wybrano punkty $M$ i $N$ odpowiednio takie, że $AM = CN$. Proste $MN$ i $AC$ przecinają się w punkcie $K$. Niech $P$ będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt $AMK$, a $Q$ jest środkiem okręgu $K$-dopisanego w trójkącie $CNK$. Pokazać, że środek łuku $AC$ okręgu $\Omega$, który zawiera punkt $B$ jest równo odległy od punktów $P$ i $Q$.

*Rozwiązanie:*

Niech $S$ będzie środkiem łuku $ABC$ okręgu $\Omega$. Mamy $SA = SC$ (ponieważ $S$ leży na symetralnej $AC$), $AM = CN$ i $\sphericalangle BCS = \sphericalangle BAS$. Zatem trójkąty $AMS$ i $CNS$ są przystające. W szczególności sa przystające spiralnie tzn. można jeden z nich obrócić wokół $S$ o kąt $\sphericalangle ASC = \sphericalangle ABC$ by otrzymać drugi. Zatem $SM = SN$ i $\sphericalangle MSN = \sphericalangle ABC$. Z ostatniej równości kątów wynika, że czworokąt $MSBN$ jest wpisany w pewien okrąg, który nazwiemy $\gamma$.

Niech $\Omega_a$ i $\Omega_c$ będą okręgami opisanymi na trójkątach $AMS$ i $CNS$, odpowiednio. One również są przystające spiralnie. Niech $U$ i $V$ będą środkami łuków $AM$ i $CN$ (nie zawierających $S$) tych okręgów. Z przystawania dostajemy $SU = SV$ (ponieważ punkt $S$ leży na symetralnej $UV$) i $UA = VC$. Ponadto

$$\sphericalangle SAK = \sphericalangle SBC = \sphericalangle SMK,$$

więc $K$ leży na $\Omega_a$. Analogicznie $K$ leży na $\Omega_c$.

Wobec tego punkty $U$ i $V$ oraz $P$ i $Q$ leżą na dwusiecznej kąta $CKN$. Z twierdzenia o trójliściu (dla trójkątów $KAM$ i $KCN$) dostajemy, że $UP = UA$ i $VQ = VC$. Jednakże $UA = VC$, więc punty $P$ i $Q$ sa symetryczne względem symetralnej odcinka $UV$, na którym leży $S$. Zatem $S$ jest równooddalony od punktów $P$ i $Q$.

**11.** Dany jest ostrosłup $SA_1A_2 \dots A_n$, którego podstawą jest $n$-kąt wypukły $A_1A_2 \dots A_n$. Dla $i = 1, 2, \dots, n$ w podstawie znajduje się trójkąt $X_iA_iA_{i+1}$ przystający do ściany $SA_iA_{i+1}$ leżący po tej samej stronie prostej $A_iA_{i+1}$ co podstawa (połóżmy $A_{n+1} := A_1$). Pokazać, że te wszystkie trójkąty pokrywają w całości podstawę ostrosłupa.

*Rozwiązanie:*

Rozpatrzmy dowolny punkt podstawy $A_1A_2 \dots A_n$ i rozważmy sferę, która jest styczna do podstawy w punkcie $P$. Zwiększamy jej promień tak aby była styczna do pewnej ściany $ABS$ w punkcie $Q$ (podstawa jest wypukła więc zawsze się tak zdarzy). Wtedy na podstawie twierdzenia o równości odcinków stycznych widzimy, że $ABP$ i $ABQ$ są przystające. Jednakże $ABQ$ znajduje się w trójkącie $ABS$, więc $ABS$ pokryje punkt $P$ gdy obrócimy go wokół prostej $AB$ na podstawę ostrosłupa.

# Spis treści