Warsztaty matematyczne w Porębie Wielkiej

Piotr Ambroszczyk, Dominik Burek,
Maciej Gawron

13-19 listopad 2016

Spis treści

1 Zadania

1.1 Zawody indywidualne

1.1.1 Grupa średnia

1. Rozwiąż w liczbach całkowitych dodatnich równanie:

$$xyz = 1 + x + y + z.$$

2. Punkt H jest ortocentrum $\triangle ABC$, natomiast M środkiem boku BC. Półprosta $MH^{\rightarrow}$ przecina okrąg opisany na $\triangle ABC$ w punkcie P. Pokazać, że $\angle HPA = 90°$.

3. Alfred pracuje w firmie składającej wielowkładowe długopisy. Każdego ranka nasz bohater dostaje dostawę 100 pudełek w których jest łącznie 1000 obudów i 3000 wkładów. Alfred chce tak posortować długopisy, żeby w każdym pudełku było dokładnie po 10 obudów i 30 wkładów. W jednym ruchu może on wybrać dwa dowolne pudełka i poprzekładać ich zawartość z jednego do drugiego. Jaka jest minimalna liczba ruchów w której Alfred jest w stanie otrzymać żądany stan?

4. Niech f będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych stopnia $n \geqslant 2$. Udowodnij, że wielomian $g(x) = f(f(x)) - x$ ma co najwyżej n pierwiastków całkowitych.

5. W trójkącie ABC średnicami okręgów ω_1 i ω_2 są odpowiednio odcinki AB i AC. Pokazać, że istnieje okrąg styczny do ω_1 i ω_2, którego środek jest środkiem odcinka BC.

6. Jaka jest najmniejsza możliwa liczba ruchów konika szachowego potrzebna aby przedostać się z lewego dolnego rogu szachownicy $n \times n$, gdzie $n \geqslant 4$, do prawego górnego rogu.

7. Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań

$$\begin{cases} \max\{1, x_1\} = x_2 \\ \max\{2, x_2\} = 2x_3 \\ \dots \\ \max\{n, x_n\} = nx_1. \end{cases}$$

8. Niech a, b, c, d będą takimi liczbami całkowitymi różnymi od zera, że jedyną czwórką liczb całkowitych (x, y, z, t) spełniającą równanie

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0$$

jest $x = y = z = t = 0$. Czy wynika stąd, że liczby a, b, c, d mają jednakowy znak?

9. W każde pole tablicy 4×4 wpisano 0 lub 1. Następnie obliczono sumy liczb w jednym wierszu, kolumnie lub na przekątnej. Pokazać, że w wyniku otrzymano co najmniej trzy równe sumy.

10. Liczby rzeczywiste a, b, c i d spełniają warunek $a^2 + b^2 + (a+b)^2 = c^2 + d^2 + (c+d)^2$. Pokazać, że $a^4 + b^4 + (a+b)^4 = c^4 + d^4 + (c+d)^4$.

11. Dana jest funkcja $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ taka, że $f(1) = p+1$ i $f(n+1) = f(1) \cdot f(2) \cdots f(n) + p$ gdzie p jest liczbą pierwszą. Znaleźć wszystkie takie p, że istnieje liczba dodatnia liczba całkowita k, że $f(k)$ jest kwadratem liczby całkowitej.

12. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB = AC$. Na półprostych $AB^{\rightarrow}$ i $AC^{\rightarrow}$ obrano odpowiednio takie punkty K i L leżące poza bokami trójkąta, że $4 \cdot BK \cdot CL = BC^2$. Punkt M jest środkiem boku BC. Proste KM i LM przecinają po raz drugi okrąg opisany na trójkącie AKL odpowiednio w punktach P i Q. Wykazać, że proste PQ i BC są równoległe.

13. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że:

$$f(xy + 2x) + f(y) - y^2 = x + y + f(x) + f(xy - y^2).$$

14. Dana jest liczba pierwsza $p > 2$. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele takich dodatnich liczb całkowitych n, że liczba $2^n - n$ jest podzielna przez p.

15. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w $\triangle ABC$. Prosta prostopadła do AI w punkcie I przecina BC w S. Niech P będzie punktem przecięcia okręgu opisanego na $\triangle ABC$ z prostą AS. Pokazać, że $\angle IPA = 90°$.

16. Wyznaczyć wszystkie pola na szachownicy rozmiaru 8×8 o następujacej własnosci: Po usunieciu tego pola można pokryć pozostałą część szachownicy klockami rozmiaru 3×1.

1.1.2 Grupa starsza

1. Alfred pracuje w firmie składającej wielowkładowe długopisy. Każdego ranka nasz bohater dostaje dostawę 100 pudełek w których jest łącznie 1000 obudów i 3000 wkładów. Alfred chce tak posortować długopisy, żeby w każdym pudełku było dokładnie po 10 obudów i 30 wkładów. W jednym ruchu może on wybrać dwa dowolne pudełka i poprzekładać ich zawartość z jednego do drugiego. Jaka jest minimalna liczba ruchów w której Alfred jest w stanie otrzymać żądany stan?

2. Niech f będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych stopnia $n \geqslant 2$. Udowodnij, że wielomian $g(x) = f(f(x)) - x$ ma co najwyżej n pierwiastków całkowitych.

3. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $m \geqslant 2$ takie, że każda liczba całkowita n, przy czym $\frac{m}{3} \leqslant n \leqslant \frac{m}{2}$ dzieli liczbę

$$\binom{n}{m-2n}.$$

4. Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w $\triangle ABC$. Wewnątrz $\triangle ABC$ wybieramy taki punkt P, że $\angle PIA = 90°$. Niech Q będzie punktem izogonalnie sprzężonym do P względem $\triangle ABC$. Na prostej BC wybieramy taki punkt D, że $PD \parallel AQ$. Udowodnij, że $\angle DIQ = 90°$.

5. Udowodnić, że dla dowolnej liczby natrualnej n i liczb całkowitych $0 < i \leqslant j < n/2$ zachodzi nierówność

$$\mathrm{NWD}\left(\binom{n}{i}, \binom{n}{j}\right) \geqslant 2^i.$$

6. W trójkącie ostrokątnym ABC ($AB \neq AC$) okrąg o średnicy BC przecina boki AB i AC w punktach odpowiednio M i N. Punkt O jest środkiem odcinka BC. Dwusieczne kątów $\angle BAC$ i $\angle MON$ przecinają się w punkcie R. Pokazać, że okręgi opisane na trójkątach BMR i CNR mają punkt wspólny leżący na boku BC.

7. Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą całkowitą. Pola szachownica $n \times n$ pomalowano na biało lub czarno, przy czym trzy pola narożne są białe i jedno czarne. Udowodnić, że istnieje kwadrat 2×2 z nieparzystą liczbą białych pól.

8. Ciąg liczb rzeczywistych $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ jest zdefiniowany następująco

$$a_0 = -1, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k+1} = 0 \quad \text{dla} \quad n \geqslant 1.$$

Pokazać, że $a_n > 0$ dla $n \geqslant 1$.

9. W mieście równości jest n kobiet i n mężczyzn oraz pewna liczba partii politycznych. Każda partia ma inny zbiór członków. Do każdej partii należy tyle samo kobiet co mężczyzn. Co więcej dla dowolnych dwóch partii dokładnie tyle samo kobiet co mężczyzn należy do obu tych partii. Jaka jest największa możliwa liczba partii w mieście równości?

10. Niech $n \geqslant 2$ będzie dodatnią liczbą całkowitą, a $a_1, \ldots, a_n$ dodatnimi liczbami rzeczywistymi, że $a_1 + ... + a_n = 1$. Pokazać, że:

$$\frac{a_1}{1+a_2+\cdots+a_n} + \cdots + \frac{a_n}{1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}} \geqslant \frac{n}{2n-1}$$

11. Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na $\triangle ABC$. Na bokach AB, AC wybieramy takie punkty P, Q, że prosta będąca obrazem BC w symetrii względem PQ jest styczna do okręgu opisanego na $\triangle APQ$. Pokazać, że okrąg opisany na $\triangle APQ$ jest styczny do okręgu opisanego na $\triangle BOC$.

12. Niech n i k będą liczbami całkowitymi dodatnimi takimi, że

$$1 = \underbrace{\phi(\phi(\ldots\phi}_{k \text{ razy}}(n))\ldots)).$$

Pokazać, że $n \leqslant 3^k$.

13. Niech BM środkową prostokątnego trójkąta ABC ($\angle B = 90^\circ$). Niech H_a, H_c będą ortocentrami odpowiednio trójkątów: ABM, CBM. Pokazać, że proste AH_c i CH_a przecinają się na prostej łączącej środki boków BA, BC.

14. Niech $\mathbb{N}_+$ oznacza zbiór liczb całkowitych dodatnich. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{N}_+ \longrightarrow \mathbb{N}_+$ takie, że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich m i n zachodzi podzielność

$$m^2 + f(n) \mid mf(m) + n.$$

15. Dana jest liczba całkowita n oraz niezerowe liczby całkowite $k_0, k_1, \ldots, k_{2n}$ takie, że $k_0 + k_1 + \ldots k_{2n} \neq 0$. Czy zawsze istnieje taka permutacja $(a_0, a_1, \ldots a_{2n})$ liczb $(k_0, k_1, \ldots, k_{2n})$, że równianie:

$$a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots + a_0 = 0.$$

nie ma pierwiastków całkowitych.

16. Z klocków $2 \times 2 \times 1$ zbudowano sześcian o krawędzi 20. Dowieść, że istnieje prosta równoległa do jednej z krawędzi sześcianu, przecinająca wnętrze sześcianu i nie przecinająca wnętrza żadnego z klocków.

1.1.3 Supergrupa

1. Niech S będzie zbiorem liczb całkowitych dodatnich n spełniających nierówność:

$$\phi(n) \cdot \tau(n) \geqslant \sqrt{\frac{n^3}{3}}.$$

Pokazać, że S jest skończony.

Uwaga: funkcja $\phi(n)$ oznacza ilość liczb całkowitych dodatnich $k < n$ względnie pierwszych z n, natomiast funkcja $\tau(n)$ oznacza ilość dodatnich dzielników n.

2. Dana jest liczba całkowita dodatnia n. Wielomian $W(x) = a_n x^n + \ldots a_1 x + a_0$ nazwiemy *względnym* gdy $\forall_i \; a_i \in \mathbb{Z}$ oraz $\mathrm{NWD}(a_n, \ldots a_1, a_0) = 1$. W zależności od n wyznaczyć maksymalne m takie, że istnieje *względny* wielomian P spełniający $\frac{P(x)}{m} \in \mathbb{Z}$ dla wszystkich $k \in \mathbb{Z}$.

3. Okrąg dopisany do $\triangle ABC$ naprzeciw wierzchołka A ma środek w punkcie I_a oraz jest styczny do AB, AC odpowiednio w punktach D, E. Oznaczmy przez O środek okręgu opisanego na $\triangle ABC$. Prosta OI_a oraz DE przecinają się w punkcie A'. Analogicznie definiujemy punkty B', C'. Pokazać, że proste AA', BB', CC' tną się w jednym punkcie.

4. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą różnymi liczbami naturalnymi. Dowieść, że zachodzi nierówność

$$a_1^7 + a_2^7 + \ldots + a_n^7 + a_1^5 + a_2^5 + \ldots + a_n^5 \geqslant 2(a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3)^2.$$

5. Niech $n > 6$ będzie liczbą doskonałą oraz $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, gdzie $1 < p_1 < p_2 < \ldots < p_k$. Pokazać, że liczba α_1 jest parzysta.

6. W każdym wierszu tablicy $n \times 2n$ znajduje się n zer i n jedynek. Dla $1 \leqslant k \leqslant n$ i $1 \leqslant i \leqslant n$ oznaczmy przez $a_{k,i}$ numer kolumny w której znajduje sie i–te zero k–tego wiersza. Niech $\mathcal{A}$ będzie zbiorem wszystkich takich tablic, że $a_{1,i} \geqslant a_{2,i} \geqslant \cdots \geqslant a_{n,i}$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$. Dowolnej tablicy $T \in \mathcal{A}$ przyporządkowujemy tablicę $f(T)$ wymiarów $n \times 2n$ taką, że w k–ty wiersz $f(T)$ wpisujemy n jedynek w kolumnach $a_{n,k} - k + 1, a_{n-1,k} - k + 2, \ldots, a_{1,k} - k + n$ (a w pozostałe pola zera). Pokazać, że $f(f(f(f(f(f(T)))))) = T$ dla dowolnego $T \in \mathcal{A}$.

7. Dane są ciągi okresowe $\{a_k\}_{k \geqslant 0}$ i $\{b_k\}_{k \geqslant 0}$ o okresach odpowiednio m i n, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$. Pokazać, że jeśli $a_l = b_l$ dla $m + n - \mathrm{NWD}(m, n)$ kolejnych liczb naturalnych l, to ciągi $\{a_k\}_{k \geqslant 0}$ i $\{b_k\}_{k \geqslant 0}$ są takie same.

8. Niech ω będzie okręgiem dopisanym do $\triangle ABC$ naprzeciw wierzchołka A o środku w I_a. Prosta prostopadła do AI_a i przechodząca przez I_a przecina AB, AC odpowiednio w punktach P, Q. Niech K, L będą odpowiednio odbiciami B względem P oraz C względem Q. Pokazać, że prosta KL jest styczna do ω.

9. Niech $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ będzie ciągiem liczb całkowitych dodatnich takim, że $a_n \leqslant P(n)$ dla $n \in \mathbb{N}$ i pewnego $P \in \mathbb{Z}[X]$. Załóżmy, że $m - n \mid a_m - a_n$ dla $m, n \in \mathbb{N}$ i $m \neq n$. Pokazać, że istnieje wielomian $Q \in \mathbb{Q}[X]$ taki, że $a_n = Q(n)$, dla $n \in \mathbb{N}$.

10. Dany jest $\triangle ABC$. Punkt P porusza się po okręgu opisanym na $\triangle ABC$ tak, że odcinki AP, BC przecinają się w punkcie U. Punkty I_1, I_2 to środki okręgów wpisanych odpowiednio w $\triangle PBU$, $\triangle PCU$. Posta I_1, I_2 przecina BC w punkcie Z. Pokazać, że wszystkie proste PZ przechodzą przez ustalony punkt.

11. Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną m o następującej własności: Spośród dowolnych m różnych ciągów o długości n złożonych z zer i jedynek można wybrać n ciągów i wpisać je w wiersze kwadratowej tabeli tak, by na głównej przekątnej tabeli wszystkie liczby były równe.

12. Dla dowolnej liczby pierwszej p podzbiór $\mathcal{S}_p$ reszt modulo p nazwiemy *wolnym*, jeśli istnieje niezerowe $\alpha \in \mathbb{F}_p$ takie, że $\mathcal{S}_p = \{1, \alpha, \alpha^2, \ldots\}$ oraz nie istnieją trzy elementy $a, b, c \in \mathcal{S}$ takie, że $a + b \equiv c \pmod{p}$. Pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej N istnieje liczba pierwsza p i zbiór wolny $\mathcal{S}_p$ taki, że $\#S \geqslant N$.

1.2 Mecz matematyczny

1.2.1 Grupa średnia

1. Wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, ..., a_n$ spełniona jest nierówność

$$\frac{a_1^3}{a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2} + \frac{a_2^3}{a_2^2 + a_2a_3 + a_3^2} + \ldots + \frac{a_n^3}{a_n^2 + a_na_1 + a_1^2} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{3}.$$

2. Niech n będzie dodatnią liczbą nieparzystą, a $x_1, x_2, \cdots, x_n$ będą nieujemnymi liczbami rzeczywistymi. Pokazać, że

$$\min_{i=1,\ldots,n}(x_i^2 + x_{i+1}^2) \leqslant \max_{j=1,\ldots,n}(2x_jx_{j+1})$$

gdzie $x_{n+1} = x_1$.

3. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równość:

$$f(xf(y)) + f(f(x) + f(y)) = yf(x) + f(x + f(y))$$

dla wszystkich x, $y \in \mathbb{R}$.

4. Udowodnić, że istnieje taka wielokrotność liczby 5^n, której zapis w systemie dziesiętnym składa się z dokładnie n cyfr różnych od zera.

5. Niech p_1, $p_2, \ldots$ będzie ciągiem kolejnym liczb pierwszych począwszy od $p_1 = 2$. Oznaczmy przez $s_n = \sum_{i=1}^{n} p_n$. Pokazać, że dla $n \geqslant 1$ pomiędzy s_n a s_{n+1} istnieje kwadrat liczby całkowitej.

6. Niech $p > 2$ będzie liczbą pierwszą. Dla każdej permutacji $\pi = (\pi(1), \pi(2), \cdots, \pi(p))$ zbioru $S = \{1, 2, \cdots, p\}$, niech $f(\pi)$ będzie liczbą liczb podzielnych przez p wśród liczb:

$$\pi(1), \pi(1) + \pi(2), \cdots, \pi(1) + \pi(2) + \cdots + \pi(p)$$

Znaleźć średnią wartość $f(\pi)$ po wszystkich permutacjach π zbioru S.

7. Rozstrzygnij, czy kwadratową szachownicę o boku 43 z wyciętym środkowym polem da się podzielić na prostokąty o wymiarach 1×6.

8. Dla każdego $n \in \mathbb{Z}_+$ znajdź liczbę permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ takich, że dla każdego $1 \leqslant k \leqslant n$ zachodzi: $k | 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)$.

9. Dany jest okrąg ω i jego cięciwa AB. Punkt W jest środkiem łuku AB okręgu ω. Punkt D leży na łuku AB okręgu ω, niezawierającym punktu W. Styczne do ω w punktach A i B

przecinają styczną do ω w D odpowiednio w punktach K i L. Proste WK i WL przecinają AB odpowiednio w P i Q. Wykazać, że długość odcinka PQ nie zależy od wyboru punktu D.

10. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC o ortocentrum w punkcie H. Punkt M jest środkiem boku BC. Prosta prostopadła do MH, przechodząca przez H, przecina boki AB, AC odpowiednio w punktach K, L. Wykaż, że $KH = HL$.

11. Okrąg wpisany ω w $\triangle ABC$ jest styczny do BC w punkcie D. Okrąg o średnicy BD przecina ω i dwusieczną wewnętrzną $\angle ABC$ odpowiednio w punktach C_1 i C_2. Okrąg o średnicy CD przecina ω i dwusieczną $\angle ACB$ odpowiednio w punktach B_1 i B_2. Pokazać, że proste BC, B_1C_1, B_2C_2 przecinają się w jednym punkcie.

1.2.2 Grupa starsza

1. Udowodnij, że dla wszystkich liczb $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}_+$ zachodzi nierówność:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geqslant 2.$$

2. Ciąg $\{a_i\}_{i\geqslant 0}$ określony jest przez warunki: $a_0 = 2,\ a_1 = 4$ oraz

$$a_{n+1} = \frac{a_n a_{n-1}}{2} + a_n + a_{n-1}$$

dla każdego całkowitego dodatniego n. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p o tej własności, że $p \mid a_k - 1$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}_+$.

3. Pokazać, że dla każdego $k \in \mathbb{Z}_+$ istnieje takie $x \in \mathbb{R}$, że dla każdego $m \in \mathbb{Z}_+$ zachodzi podzielność: $k | \lfloor x^m \rfloor + 1$.

4. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych a, b takie, że $a^3 = 6b^2 + 2$.

5. Znaleźć wszystkie iniekcje $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ spełniające następujący warunek: Jeżeli S jest skończonym podzbiorem $\mathbb{Z}_+$ oraz $\sum\limits_{s\in S} \frac{1}{s}$ jest liczbą całkowitą, wtedy: $\sum\limits_{s\in S} \frac{1}{f(s)}$ również jest liczbą całkowitą.

6. Radek i Maciek grają w pewną grę używając prostokątnej tabliczki czekolady. Czekolada składa się z jednakowych kwadratowych kostek ułożonych w 60 rzędów i 40 kolumn. Gracze w tej grze wykonują ruchy na przemian, a każdy ruch polega na podzieleniu jednego z kawałków czekolady wzdłuż linii podziału kostek na dwie części. Radek może wykonywać jedynie cięcia wzdłuż linii pionowych, a Maciek jedynie wzdłuż linii poziomych. Przegrywa ten z graczy, który nie może wykonać żadnego ruchu zgodnego z zasadami gry. Grę rozpoczyna Radek. Który z graczy ma strategię wygrywającą?

7. Każdą liczbę naturalną pomalowano na jeden z dwóch kolorów. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n istnieją różne liczby naturalne $a, b > n$ takie, że liczby a, b i $a+b$ są jednego koloru.

8. Niech A to n-elementowy zbiór dodatnich liczb całkowitych. Udowodnij, że istnieje n-elementowy zbiór dodatnich liczb całkowitych B, że:

1. Dla dowolnych różnych podzbiorów $B_1, B_2 \subseteq B$ suma wszystkich elementów B_1 jest różna od sumy wszystkich elementów B_2.
2. Każdy element zbioru A jest sumą wszystkich elementów pewnego podzbioru B.

9. W $\triangle ABC$ punkty $H,\ O$ to odpowiednio ortocentrum i środek okręgu opisanego. Symetralna odcinka BC przecina okrąg opisany na $\triangle AHO$ w punkcie A_1. Analogicznie definiujemy punkty $B_1,\ C_1$. Pokazać, że proste $AA_1,\ BB_1,\ CC_1$ przecinają się w jednym punkcie.

10. W trójkącie ABC punkt M jest środkiem boku BC, natomiast H to ortocentrum. Punkty E i F są spodkami wysokości odpowiednio z B, C. Okręgi opisane na $\triangle BCH$ i $\triangle EFM$ przecinają się w punktach P oraz Q. Wykaż, że proste $MP,\ HQ,\ EF$ przecinają się w jednym punkcie.

11. Ostrosłup $SABCD$ jest wpisany w sferę, a AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 są prostymi prostopadłymi z wierzchołków A, B, C, D odpowiednio do prostych SC, SD, SA, SB (X_1 leży na prostej SX). Punty S, A_1, B_1, C_1, D_1 są różne i leżą na sferze. Pokazać, że punty A_1, B_1, C_1 oraz D_1 leżą na jednej płaszczyźnie.

1.2.3 supergrupa

1. Niech $f(x)$ będzie wielomianem stopnia n którego wszystkie współczynniki są równe ± 1. Co więcej, 1 jest m-krotnym pierwiastkiem f. Załóżmy, że $m \geqslant 2^k$ ($k \geqslant 2$ i $k \in \mathbb{Z}_+$), pokazać, że $n \geqslant 2^{k+1} - 1$.

2. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w $\triangle ABC$. Oznaczmy przez T_a punkt styczności A-*mixtilinear incircle* z okręgiem opisanym na $\triangle ABC$. Prosta IT_a przecina BC w D. Analogicznie definiujemy punkty E, F. Pokazać, że proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

3. Pokazać, że da się tak pokolorować wierzchołki grafu plenarnego na 3 kolory, że nie zawiera on jednokolorowych cykli.

4. Pokazać, że dla różnych $a,\ b \in \mathbb{Z}_+$ istnieje takie $n \in \mathbb{Z}_+$, że:

$$n \not| a^{2^n} + b^{3^n}$$

5. Dany jest wielomian $W \in \mathbb{C}[x]$. Niech ω będzie taką liczbą zespoloną, że $f'(\omega) = 0$. Pokazać, że ω leży w otoczce wypukłej pierwiastków W.

2 Rozwiązania

2.1 Zawody indywidualne

2.1.1 Grupa średnia

1. Niech $x \geqslant y \geqslant z \geqslant 1$. Przekształcając równoważnie początkowe równanie dostajemy:

$$x(yz-1) = 1 + y + z$$

Z maksymalności dostajemy, że $yz - 1 \leqslant 2$ czyli $yz = 3 \vee yz = 2 \vee yz = 1$. Pierwsze dwa przypadki łatwo prowadzą do sprzeczności, natomiast w drugim dostajemy $(x, y, z) = (1, 2, 4)$.

2. Niech H'' będzie odbiciem H względem M. Licząc kąty łatwo dostajemy, że H'' leży na okręgu opisanym na $\triangle ABC$. Co więcej $CH'' \parallel BH \perp AC$ czyli AH'' jest średnicą tego okręgu. Oznacza to, że $\angle HPA = \angle H''PA = 90°$.

3. Algorytm który zapewnia Alfredowi zwycięstwo jest następujący: najpierw odrzuca na bok wszystkie pudełka w których jest dokładnie 10 obudów i 30 wkładów. Spośród pozostałych znajduje on takie pudełko w którym jest co najmniej 10 obudów (gdyby wszystkie pudełka miały mniej niż 10 obudów to nie uzyskalibyśmy łącznie 1000 obudów). Potem wybiera on drugie pudełko w którym jest co najmniej 30 wkładów. Za pomocą jednego ruchu zamienia zawartości tak uzyskanych pudełek tak, aby w jednym było dokładnie 10 wkładów i 30 długopisów. Postępując tak z każdego początkowego ustawienia jest on w stanie otrzymać żądany stan w co najwyżej 99 operacjach.

Przykład, gdy 99 pudełek jest pusta, a w jednym jest 1000 wkładów i 3000 długopisów pokazuje, że liczba ruchów 99 jest minimalna.

4.Załóżmy, że $n_1,\ n_2, \ldots n_k$ będą różnymi pierwiastkami g, wtedy $n_1 - n_2 | f(n_1) - f(n_2) | f(f(n_1)) - f(f(n_2)) = n_1 - n_2$ Dostaliśmy więc, że: $f(n_1) - f(n_2) = \pm(n_1 - n_2)$. Załóżmy, że istnieje taki pierwiastek n_3 różny od $n_1,\ n_2$, że: $f(n_1) - f(n_2) = n_1 - n_2$ oraz $f(n_3) - f(n_1) = n_1 - n_3$. Po dodaniu stronami dostajemy $\pm(n_3 - n_2) = 2n_1 - n_2 - n_3$ co oczywiście jest sprzeczne.

Udowodniliśmy więc, że dla każdego i wartości jednego z wielomianów $r_-(x) = f(x) - x,\ r_+(x) = f(x) + x$ w punktach n_i są równe. Implikuje to, że $k \leqslant n$ co jest tezą zadania.

5. Niech K, M i N będą środkami boków BC, AC i AB odpowiednio. Wówczas $KN - \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AC - KM$, więc okrag o środku w K i promieniu $KN - \frac{1}{2}AB$ spełnia warunki zadania.

6. Niech k będzie szukaną liczbą ruchów. W jednym ruchu skoczek szachowy przechodzi z pola białego na pole czarne lub z pola czarnego na pole białe. Na początku oraz na końcu swej wędrówki skoczek stoi na polu tego samego koloru. To oznacza, że k musi być liczbą parzystą. W każdym ruchu skoczek pokonuje trzy pola: dwa w kierunku pionowym, jedno w kierunku poziomym lub odwrotnie: dwa w kierunku poziomym, jedno w kierunku pionowym. Aby dostać się do przeciwległego rogu, skoczek musi łącznie przebyć co najmniej $n-1$ pól w kierunku pionowym, jak również co najmniej $n-1$ pól w kierunku poziomym. To oznacza, że $3k \geqslant 2(n-1)$, skąd $k \geqslant 2\lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor$. Wykażemy indukcyjnie, że skoczek szachowy może odbyć swą podróż przy użyciu dokładnie $2\lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor$ ruchów. Dla $n=4$, $n=5$ oraz $n=6$ powyższe zdanie jest prawdziwe — dowodzą tego poniższe rysunki.

Załóżmy teraz, że skoczek szachowy może odbyć swą podróż po szachownicy $n \times n$ używając dokładnie $2\lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor$ ruchów. Skoczek szachowy może przejść z jednego rogu szachownicy $(n+3) \times (n+3)$ do rogu przeciwległego używając $2\lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor + 2 = 2\lfloor \frac{n+4}{3} \rfloor$ skoków. To kończy dowód indukcyjny.

7. Z warunków zadania mamy

$$x_i = \max\left\{1, \frac{1}{i-1}x_i\right\}, \quad \forall i \in \{2,3,\ldots\} \quad \text{oraz} \;\; x_1 = \max\left\{1, \frac{1}{n}x_n\right\}.$$

Zatem

$$x_1 = \max\left\{1, \frac{1}{n}x_n\right\} = \max\left\{1, \frac{1}{n}\max\left\{1, \frac{1}{n-1}x_{n-1}\right\}\right\} = \max\left\{1, \frac{1}{n(n-1)}x_{n-1}\right\} = \ldots = \max\left\{1, \frac{1}{n!}x_1\right\}.$$

Stąd $x_1 = 1$, a to łatwo daje pozostałe rozwiązania

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1.$$

8. Nie. Dla $a=b=-1$, $c=d=3$ rozważając uzyskane równanie (mod 3) otrzymamy, że $x=y=z=t=0$, ale a, b, c i d nie są tego samego znaku.

9. Przypuśćmy, że wśród uzyskanych 10 sum żadna nie powtarza się więcej niż dwa razy. Dodając cztery liczby, z których każda równa się 0 lub 1 możemy uzyskać 5 możliwych wyników: 4, 3, 2, 1 lub 0. Ponieważ wszystkich sum jest 10, więc każda z nich musiałaby wystąpić dokładnie dwa razy. Tymczasem wśród uzyskanych 10 sum nie mogą się pojawić dwie równe 4 i jednocześnie dwie równe 0. Jeśli bowiem sumę 4 uzyskamy dodając liczby z pewnej przekątnej, to na tej przekątnej muszą występować same jedynki. W efekcie otrzymamy co najwyżej jedną sumę równą 0 (tę na drugiej przekątnej). Jeśli natomiast wynik 4 otrzymamy dodając cztery jedynki stojące w pewnej kolumnie, to sumę 0 możemy uzyskać jedynie dodając cztery zera w innej kolumnie. Wobec tego drugą sumę 4 oraz drugą sumę 0 uzyskamy dodając liczby stojące w pozostałych dwóch kolumnach. Wtedy jednak w wierszach otrzymamy cztery sumy równe 2. Analogicznie rozumujemy, jeśli wynik 4 uzyskamy sumując cztery jedynki stojące w pewnym wierszu. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że co najmniej trzy uzyskane sumy są jednakowe.

10. $a^4 + b^4 + (a+b)^4 = 2(a^2+ab+b^2)^2 = 2(c^2+cd+d^2)^2 = c^4 + d^4 + (c+d)^4$.

11. Dla $p = 3$ działa. Dla $p > 3$ widzimy, ze $f(n+1) = f(n)^2 - pf(n) + p$, więc z indukcji $f(n) = 2pQ_n(p)+1$, gdzie $Q_n(p)$ jest nieparzystą wartością pewnego wielomianu Q na p. Wobec tego modulo 4 dostajemy sprzeczność. Dla $p = 2$ mamy $f(n+1) = (f(n)-1)^2+1$, więc nie może być kwadratem, gdzyż kwadraty dwóch liczb nie mogą różnić się o 1.

12. Na mocy powyższej zależności mamy

$$\frac{BM}{MK} = \frac{BC}{2 \cdot BK} = \frac{2 \cdot CL}{BC} = \frac{CL}{CM}. \tag{1}$$

Ponadto z założeń zadania wynika, że trójkąt BAC jest równoramienny, skąd uzyskujemy równość kątów $\angle KBM = \angle MCL$. Wraz z warunkiem (4) oznacza to, że trójkąty KBM i MCL są podobne (cecha bok-kąt-bok). Korzystając z tego podobieństwa otrzymujemy

$$\angle KML = 180^\circ - \angle BMK - \angle LMC = 180^\circ - \angle BMK - \angle MKB = \angle KBM \tag{2}$$

oraz

$$\frac{KM}{ML} = \frac{KB}{MC} = \frac{KB}{BM}. \tag{3}$$

Zależności (5) i (6) dowodzą, że trójkąty KML i KBM są podobne (cecha bok-kąt-bok), co implikuje równość

$$\angle BMK = \angle MLK. \tag{4}$$

Z drugiej strony równość kątów wpisanych opartych na tym samym łuku daje

$$\angle MLK = \angle QLK = \angle QPK. \tag{5}$$

Łącząc zależności (7) i (8) stwierdzamy, że $\angle BMK = \angle QPK$, skąd wprost wynika równoległość prostych BC i PQ.

13. Podstawienie $y = -1$ daje $f(-1) - 1 = x - 1 + f(-x-1)$ czyli $f(x) = x + c$ dla pewnego $c \in \mathbb{R}$. Sprawdzamy, że dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$ taka funkcja spełnia warunki zadania.

14. Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej k przyjmijmy $n = (p-1)(kp-1)$. Wówczas na podstawie małego twierdzenia *Fermata* otrzymujemy

$$2^n - n = 2^{(p-1)(kp-1)} - (p-1)(kp-1) \equiv 1^{kp-1} - (-1) \cdot (-1) \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

skąd wynika, że liczby n zdefiniowane powyższym wzorem spełniają warunki zadania.

15. Niech ω - okrąg o średnicy AI przecina o- opisany na $\triangle ABC$ w punkcie P'. Z lematu o trójliściu wiemy, że środek okręgu τ - opisanego na $\triangle BIC$ jest środkiem łuku BC okręgu o. Z twierdzenia o trzech osiach potęgowych zastosowanego dla o, ω τ stwierdzamy, że: BC, AP, oraz prosta styczna do ω i τ w punkcie I przecinają się w jednym punkcie S'. Oczywiście $IS' \perp AI$ (bo AI jest prostą łączącą środki ω oraz τ więc $S = S'$, czyli $P = P'$.

16. Wypełnijmy pola danej szachownicy liczbami w następujacy sposób:

1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
0	0	2	0	0	2	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
0	0	2	0	0	2	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1

Wówczas każdy klocek przykrywa pola o łącznej sumie 2. Wobec tego suma liczb wpisanych w pola przykryte przez 21 klocków wynosi 42, zaś suma liczb we wszystkich polach jest równa 44. Zatem jedynymi polami o zadanej własności mogą być tylko cztery pola z liczba 2. W istocie maja one taką własność: każde z nich jest środkiem pewnej szachownicy 5×5 i po jego usunięciu można ja pokryć 8 klockami; pozostała część wyjściowej szachownicy rozpada się na prostokąty 3×5 i 3×8, które oczywiście również można pokryć klockami.

2.1.2 Grupa starsza

1. Algorytm który zapewnia Alfredowi zwycięstwo jest następujący: najpierw odrzuca na bok wszystkie pudełka w których jest dokładnie 10 obudów i 30 wkładów. Spośród pozostałych znajduje on takie pudełko w którym jest co najmniej 10 obudów (gdyby wszystkie pudełka miały mniej niż 10 obudów to nie uzyskalibyśmy łącznie 1000 obudów). Potem wybiera on drugie pudełko w którym jest co najmniej 30 wkładów. Za pomocą jednego ruchu zamienia zawartości tak uzyskanych pudełek tak, aby w jednym było dokładnie 10 wkładów i 30 długopisów. Postępując tak z każdego początkowego ustawienia jest on w stanie otrzymać żądany stan w co najwyżej 99 operacjach.

Przykład, gdy 99 pudełek jest pusta, a w jednym jest 1000 wkładów i 3000 długopisów pokazuje, że liczba ruchów 99 jest minimalna. $\square$

2.Załóżmy, że $n_1,\ n_2, \dots n_k$ będą różnymi pierwiastkami g, wtedy $n_1-n_2|f(n_1)-f(n_2)|f(f(n_1))-f(f(n_2)) = n_1 - n_2$ Dostaliśmy więc, że: $f(n_1) - f(n_2) = \pm(n_1 - n_2)$. Załóżmy, że istnieje taki pierwiastek n_3 różny od $n_1,\ n_2$, że: $f(n_1) - f(n_2) = n_1 - n_2$ oraz $f(n_3) - f(n_1) = n_1 - n_3$. Po dodaniu stronami dostajemy $\pm(n_3 - n_2) = 2n_1 - n_2 - n_3$ co oczywiście jest sprzeczne.

Udowodniliśmy więc, że dla każdego i wartości jednego z wielomianów $r_-(x) = f(x)-x,\ r_+(x) = f(x) + x$ w punktach n_i są równe. Implikuje to, że $k \leqslant n$ co jest tezą $\square$

3. Odpowiedź: $m \in \mathbb{P}$. Jeśli $m = 2n$ lub $m = 3n$ otrzymujemy, że $n \mid 1$, co jest niemożliwe (przypadki gdy $m = 2, 3$ są jasne). Załóżmy, że m nie jest wielokrotnością liczb 2 lub 3 jednakże nie jest liczbą pierwszą tzn. $m = (2k + 1)q$ dla $q \in \mathbb{P}$ i $k \in \mathbb{N}$ $(k \neq 1, q > 3)$. Dla $n = kq$ widzimy, że

$$n \nmid \binom{kq}{q} = k \cdot \frac{(kq-1)(kq-2)\cdots(kq-q+1)}{(q-1)!},$$

co jest sprzeczne z warunkami zdania. Zatem $m \in \mathbb{P}$. Bez trudu stwierdzamy, że

$$n \mid \binom{n}{m-2n} = \frac{n}{3n-m} \cdot \binom{n-1}{m-2},$$

gdyż $\mathrm{NWD}(n, 3n - m) = 1$ oraz $\mathrm{NWD}(n, m) = 1$. $\square$

4. Udowodnimy najpierw lemat:

Niech ω będzie okręgiem opisanym na $\triangle ABC$. Punkty $P,\ Q$ są izogonalnie sprzężone względem tego trójkąta. Prosta AP przecina ω w punkcie M. Niech prosta QM przecina BC w E, wtedy $PE \parallel AQ$.

Niech prosta AQ przecina $\omega,\ BC$ odpowiednio w punktach $N,\ H$. Z tego, że $P,\ Q$ są izogonalnie sprzężone dostajemy: $\triangle CHN \sim \triangle ACM$ oraz $\triangle CPM \sim \triangle QCN$. Stwierdzamy stąd, że: $HN \cdot$

$AM = CM \cdot CN = QN \cdot PM$. Korzystając z równoległości MN i BC oraz poprzednich wniosków dostajemy: $\dfrac{MP}{MA} = \dfrac{NH}{NQ} = \dfrac{ME}{MQ}$, czyli $PE \parallel AQ$ co chcieliśmy pokazać.

Wróćmy do naszego zadania. Niech X będzie przecięciem AP z okręgiem opisanym na $\triangle ABC$, a M przecięciem AI z tym samym okręgiem. Prosta MX przecina BC w punkcie T. Z potęgi punktu i lematu o trójliściu stwierdzamy, że okrąg opisany na $\triangle TXI$ jest styczny do prostej AI. Oznaczmy przez K punkt przecięcia tego okręgu z prostą BC.

Rozważając inwersję względem okręgu o środku w M i promieniu MB dostajemy, że $\angle XTK = \angle XAI$. Możemy więc zapisać, że $\angle XIK = \angle XAI$. Co więcej $\angle KXI = \angle KIM = \angle IXP$ (dostajemy to licząc kąty w $\triangle XIA$. Zauważmy teraz, że $\angle PIK = 90^\circ - \angle KIM = 90^\circ - \frac{\angle KXP}{2}$ co dowodzi, że I jest środkiem okręgu dopisanego do $\triangle XKP$.

Dostaliśmy więc, że PI jest dwusieczną $\angle KPA$, czyli $PK \parallel AQ$ co daje $K = D$. Prosta AI jest dwusieczną kąta PAQ czyli w czworokąt $APDQ$ można wpisać okrąg o środku w I. Teraz już łatwo przeliczyć kąty i pokazać, że $\angle DIQ = 90^\circ$. $\square$

5. W rozwiązaniu będziemy korzystać z oznaczenia potęgi zstępującej

$$n^{\underline{k}} = n(n-1)\ldots(n-(k-1)).$$

Wówczas $\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$. Zauważmy, że

$$\binom{n}{j} = \frac{n^{\underline{j}}}{j!} = \frac{n^{\underline{i}}(n-i)^{\underline{j-i}}}{j^{\underline{j-i}} \cdot i!} = \binom{n}{i} \cdot \frac{(n-i)^{\underline{j-i}} \cdot (j-i)!}{j^{\underline{j-i}} \cdot (j-i)!} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{n-j} \Big/ \binom{j}{j-i}.$$

Równoważnie $\binom{n}{j} = \binom{n}{i} \cdot \binom{n-i}{n-j} / \binom{j}{i}$. Oznacza to, że

$$\mathrm{NWD}\left(\binom{n}{i}, \binom{n}{j}\right) \geqslant \frac{\binom{n}{i}}{\binom{j}{i}} = \frac{n^{\underline{i}}}{j^{\underline{i}}}.$$

Z nierówności $n/2 > j$ wynika, że $\frac{n}{j} \geqslant 2$, $\frac{n-1}{j-1} \geqslant 2$, $\ldots$, $\frac{n-(i-1)}{j-(i-1)} \geqslant 2$. Mnożąc te nierówności stronami otrzymujemy

$$\frac{n^{\underline{i}}}{j^{\underline{i}}} \geqslant 2^i,$$

co należało udowodnić.

6. Na podstawie dobrze znanego lematu dwusieczne ABC i MON tną się na okręgu opisanym na trójkącie AMN. Wobec tego teza wynika z twierdzenia Miquela.

7. Zliczając liczbę par (a, C), gdzie C jest kwadratem 2×2 i a jest białym polem C. Dochodzimy do wniosku, że jest ona parzysta. Jednkaże każdy biały kwadracik przy brzegu występuje w dwóch parach akażdy wewnątrz w 4 parach. Ponadto istnieją 3 białe kwadraty w rogach i każdy jest w dokładnie jednej parze, więc liczba wszystkich takich par jest nieparzysta. Sprzeczność.

8. Indukcja. Dla $n = 1$ teza jest oczywista. Przypuśćmy, że teza jest prawdziwa dla liczb $m \leqslant n$. Zauważmy, że

$$(n+1)a_n + \frac{n+1}{2}a_{n-1} + \ldots + a_0 = 0 \quad \text{oraz} \quad (n+2)a_{n+1} + \frac{n+2}{2}a_n + \ldots + a_0 = 0.$$

Zatem

$$(n+2)a_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} a_i \left(\frac{n+1}{n+1-i} - \frac{n+2}{n+2-i} \right) = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{i}{(n+1-i)(n+2-i)} > 0.$$

9. Udowodnimy, że największa możliwa liczba partii w mieście równości wynosi 2^n. Istotnie jeżeli oznaczymy kobiety przez $k_1, k_2, \ldots, k_n$ oraz mężczyzn przez $m_1, m_2, \ldots, m_n$. To możemy skonstruować 2^n partii po jednej dla dowolnego podzbioru S liczb $\{1, 2, \ldots, n\}$. Podzbiorowi $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_t\}$ przypisujemy partię $P_S = \{k_{s_1}, k_{s_2}, \ldots, k_{s_t}, m_{s_1}, m_{s_2}, \ldots, m_{s_t}\}$. Widzimy, że wówczas warunki zadania są spełnione.
Udowodnimy teraz, że nie da się skonstruować więcej niż 2^n partii. Załóżmy dla dowodu nie wprost, że istnieją partie $P_1, P_2, \ldots, P_{2^n+1}$ o żądanych własnościach. Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że przynajmniej dwie spośród tych partii mają taki sam zbiór mężczyzn. Bez straty ogólności przyjmijmy, że są to P_1 i P_2. Wspólny zbiór mężczyzn oznaczymy przez M zaś zbiory kobiet to odpowiednio K_1 i K_2. Z założeń wynika, że $|M| = |K_1| = |K_2|$ ponadto do obu partii P_1 i P_2 należy tyle samo mężczyzn co kobiet, stąd $|M| = |K_1 \cap K_2|$. Ostatecznie $|K_1| = |K_2| = |K_1 \cap K_2|$, stąd $K_1 = K_2$. Oznacza to, że partie P_1 i P_2 mają ten sam zbiór członków, co jest sprzeczne z założeniem. Otrzymana sprzeczność dowodzi tezy zadania.

10. Zauważmy, że wyjściowa nierówność przekształca się do $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2-a_i} \geqslant \frac{n}{2n-1}$, czyli stosując nierówność Cauchy'ego Schwarza w formie Engela dostajemy:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{a(2-a_i)} \geqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{2\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i^2} = \frac{1}{2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2}.$$

Wystarczy teraz zauważyć, że na mocy nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną i kwadratową mamy $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geqslant \frac{1}{n}$ dostajemy żądaną nierówność.

11. Niech obraz symetryczny okręgu opisanego na $\triangle APQ$ będzie styczny do BC w D. Niech T będzie przecięciem okręgów opisanych na $\triangle APQ$, $\triangle BDP$, $\triangle DCQ$ (punkt Miquela). Zauważmy, że $\angle BTD + \angle DTC = \angle BPD + \angle DQC$. Uwzględniając, że $\angle PDQ = \angle PAQ$ i licząc kąty w czworokącie $APDQ$ dostajemy, że $\angle BTC = \angle BOC$ czyli $BPOC$ jest cykliczny.

Styczność okręgów opisanych na $\triangle APQ$ oraz $\triangle BOC$ w punkcie T wynika z następującej równości kątów:

$$\angle PTB = \angle PDB = \angle PQD = \angle PQT + \angle TQD = \angle PQT + \angle TCD.$$

12. Jeżeli $n = 1$ to teza jest spełniona. Niech teraz $n \geqslant 2$. Definiujemy funkcję

$$f(n) = \min_{k \in \mathbb{N}} \{\varphi^{(k)}(n) = 2\}.$$

Niech $n = 2^l p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$. Udowodnimy poprzez indukcję dwa następujące wzory na $f(n)$ (w zależności od tego czy $l > 0$)

$$f(n) = f(2^l p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s}) = (l-1) + \alpha_1 f(p_1) + \alpha_1 f(p_2) + \ldots + \alpha_s f(p_s),$$
$$f(n) = f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s}) = \alpha_1 f(p_1) + \alpha_1 f(p_2) + \ldots + \alpha_s f(p_s).$$

Zauważmy, że z powyższego wynikają następujące wzory

$$f(ab) = f(a) + f(b) \qquad \text{gdy co najmniej jedna z liczb } a, b \text{ jest nieparzysta.}$$
$$f(ab) = f(a) + f(b) + 1 \qquad \text{gdy obie liczby } a, b \text{ są parzyste.}$$

Przechodzimy do dowodu indukcujnego. Jeżeli $n = 2^l$ to $f(n) = l-1$ i powyższe wzory zachodzą. Jeżeli n jest liczbą pierwszą nieparzystą to powyższe wzory są oczywiście spełnione. Przypuśćmy, że n jest liczbą nieparzystą wówczas mamy

$$f(n) = f(\varphi(n)) + 1 = f(p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2 - 1} \ldots p_s^{\alpha_s - 1}(p_1 - 1)(p_2 - 1) \ldots (p_s - 1))$$
$$= f(p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2 - 1} \ldots p_s^{\alpha_s - 1}) + f(p_1 - 1) + \ldots + f(p_s - 1) + (s-1) + 1.$$

Z założenia indukcyjnego otrzymujemy, że powyższe wyrażenie jest równe

$$(\alpha_1 - 1) f(p_1) + \ldots + (\alpha_s - 1) f(p_s) + f(\varphi(p_1)) + \ldots + f(\varphi(p_s)) + s.$$

Ostatecznie uwzględniając fakt, że $f(\varphi(p_i)) = f(p_i) - 1$ dostajemy

$$\alpha_1 f(p_1) + \ldots + \alpha_s f(p_s).$$

Analogicznie rozumowanie przeprowadzamy, gdy n jest liczbą parzystą.
Udowodnimy teraz, że dla dowolnego n zachodzą nierówności $3^{f(n)} \geqslant n$, gdy n jest liczbą nieparzystą, oraz $2 \cdot 3^{f(n)} \geqslant n$, gdy n jest liczbą parzystą. Stosujemy indukcję ze względu na n. Dla $n = 2^l$ mamy $f(n) = l - 1$ i mamy pokazać, że $2 \cdot 3^{l-1} \geqslant 2^l$. Ta nierówność jest równoważna z $3^{l-1} \geqslant 2^{l-1}$ i jest oczywiście spełniona. Jeżeli n jest nieparzystą liczbą pierwszą, to

$$3^{f(p)} = 3^{f(\varphi(p))+1} \geqslant \frac{3}{2}(p-1) \geqslant p.$$

Niech teraz $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_s}$, będzie liczbą nieparzystą. Mamy

$$3^{f(n)} = 3^{\sum_{i=1}^{s} \alpha_i f(p_i)}.$$

Stosujemy założenie indukcyjne i otrzymujemy, że powyższe wyrażenie jest większe od

$$p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s} = n.$$

Analogicznie przeprowadzamy dowód dla n parzystego.
Ostatecznie mamy, że $2 \cdot 3^{f(n)} \geqslant n$ dla dowolnego n. Wróćmy do rozwiązania zadania. Skoro $\varphi^{(k)}(n) = 1$ to $k \geqslant f(n) + 1$. Oznacza to, że $3^k \geqslant 3^{f(n)+1} \geqslant 2 \cdot 3^{f(n)} \geqslant n$, co należało udowodnić.

13. Oznaczmy środki boków $BC,\ BA$ odpowiednio przez $K,\ L$. Wiemy, że $H_cC \parallel AH_a,\ H_cK \parallel AL,\ KC \parallel LH_a$ czyli odpowiednie boki $\triangle KCH_c,\ \triangle ALH_a$ są równoległe. Oznacza to, że trójkąty te posiadają środek jednokładności, który jest przecięciem $CH_a,\ AH_c,\ KL$ co implikuje tezę.

14. Ustalmy $n \in \mathbb{N}_+$ i podstawmy za $m := f(n)$, dostajemy

$$f(n)^2 + f(n) \mid f(n)f(f(n)) + n \Longrightarrow f(n) \mid n \Longrightarrow f(n) \leqslant n \ \text{ dla } n \in \mathbb{N}_+.$$

Z powyższej nierówności widzimy, że $f(1) = 1$.

W wyjściowej podzielności podstawmy teraz $m := n$, otrzymujemy

$$n^2 + f(n) \mid nf(n) + n \Longrightarrow n^2 + f(n) \leqslant nf(n) + n \Rightarrow n^2 - n \leqslant (n-1)f(n),$$

stąd $f(n) \geqslant n$ dla $n \geqslant 2$, co w połączeniu z nierównością $n \leqslant f(n)$ dla $n \geqslant 1$ i równością $f(1) = 1$ daje nam jedyne rozwiązanie:

$$f(n) = n \ \text{ dla } n \in \mathbb{N}_+.$$

15. Pokażemy, że istnieje taka permutacja $a_0, a_1, \ldots, a_{2n-1}$ zbioru $(k_0, k_1, ..., k_{2n-1})$, że wielomian $a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + ... + a_0 = 0$ nie ma pierwiastków całkowitych.

Załóżmy, że dla każdej permutacji $(a_0, ...a_{2n})$ tak skonstruowany wielomian posiada pierwiastek. Bez straty ogólności załóżmy, że $|k_{2n}| \geqslant |k_i|$, $i = 0, 1, \ldots, 2n-1$. Rozważmy wielomian:

$$P(x) := k_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + ... + a_0 \quad (*)$$

gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_{2n-1}$ jest pewną permutacją $(k_0, k_1, ..., k_{2n-1})$. Wtedy dla $|x| \geqslant 2$, zachodzi:

$$|k_{2n}x^{2n}| > |a_{2n-1}x^{2n-1}| + ... + |a_0|$$

Oznacza to, że jedynymi całkowitymi pierwiastkami (*) mogą być $x \in \{-1, 0, 1\}$. Łatwo sprawdzić, że jedyną możliwością jest $x = -1$. Jako, że możemy przepermutować $(k_0, k_1, ..., k_{2n-1})$ jak tylko chcemy, wnioskujemy, że $k_0 = k_1 = \cdots = k_{2n-1}$. Jednak wtedy $P(-1) = k_{2n} \neq 0$, a to jest sprzeczne z założeniami.

16. Dzieląc każdą ścianę sześcianu na 20 kwadratów jednostkowych otrzymujemy na każdej ścianie $19^2 = 361$ punktów będących wierzchołkami podziału. Zatem istnieje $3 \cdot 361 = 1083$ prostych równoległych do pewnej krawędzi sześcianu i przechodzących przez parę takich punktów. Zauważmy teraz, że każda taka prosta przecina wnętrza parzystej liczby klocków. Rzeczywiście, niech l będzie odcinkiem takiej prostej zawartym w sześcianie i niech k będzie równoległą do niej krawędzią sześcianu. Weźmy pod uwagę prostopadłościan P, którego krawędzie są równoległe do krawędzi sześcianu, przy czym dwiema z tych krawędzi są k i l. Wówczas część wspólna prostopadłościanu P z dowolnym klockiem, którego wnętrza nie przecina l, ma objętość 0, 2 albo 4, czyli objętość parzystą. Z kolei część wspólna prostopadłościanu z klockiem o wnętrzu przeciętym przez l jest sześcianem jednostkowym (taki klocek musi leżeć „prostopadle” do l). Jednak objętość prostopadłościanu P jest liczbą podzielną przez 20, a więc parzystą. W związku z tym liczba klocków, których wnętrza przecina l, musi być parzysta. Wszystkich klocków jest 2000. Wobec tego najwyżej 1000 spośród 1083 rozważanych prostych może przecinać wnętrze pewnego klocka, co kończy rozwiązanie.

2.1.3 Supergrupa

1. Definiujemy multiplikatywną funkcję $f(n) = \frac{\phi(n)^2 \times \tau(n)^2}{n^3}$ oraz dla pary (a, p) $(p \in \mathbb{P})$ $g(a, p) = \frac{(a+1)^2(1-\frac{1}{p})^2}{p^a}$. zauważamy, że dla rozkładu liczby n na czynniki pierwsze $n = \prod p_i^{\alpha_i}$ mamy $f(n) = \prod g(\alpha_i, p_i)$. Wobec tego S jest zbiorem takich $n = \prod p_i^{\alpha_i}$, że $f(n) = \prod g(\alpha_i, p_i) \geqslant \frac{1}{3}$. Badając przypadki dochodzimy do wniosku, że gdy n ma jeden dzielnik pierwszy, to to mamy możliwości $n = 2^1, 2^2, 2^3, 3^1, 3^2, 5^1, 7^1$. Rozważając inne przypadki, gdy $3 \div n$ dochodzimy do wniosku, że $\prod g(\alpha_i, p_i) \geqslant \frac{1}{3} \geqslant \frac{9}{16}$ a to jest możliwe gdy $n = 12$. Wobec tego S ma skończenie wiele elementów. https://www.hmmt.co/static/archive/february/solutions/2015/hmic.pdf

2. Lemat:
Dany jest wielomian W stopnia n taki, że dla każdej liczby całkowitej m liczba $W(m)$ jest liczbą całkowitą. Pokazać, że istnieją liczby całkowite $a_0, a_1, \ldots, a_n$ takie, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$W(x) = a_n\binom{x}{n} + a_{n-1}\binom{x}{n-1} + \ldots + a_0\binom{x}{0},$$

gdzie dla dowolnej liczby rzeczywistej x i liczby całkowitej dodatniej n definiujemy

$$\binom{x}{n} := \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \ldots \cdot (x-n+1)}{n!} \quad \text{oraz} \quad \binom{x}{0} := 1.$$

Dowód: Zastosujemy indukcję względem n. Dla $n = 1$ jest to oczywiste, załóżmy więc, że $n > 1$. Rozpatrzmy wielomian

$$Q(x) = P(x+1) - P(x).$$

Widzimy, że na mocy warunków zadania dla każdej liczby całkowitej n liczba $Q(n)$ jest całkowita, ponadto stopień wielomianu Q wynosi dokładnie $n-1$. Zatem na mocy założenia indukcyjnego istnieją liczby całkowite $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ takie, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$P(x+1) - P(x) = Q(x) = a_{n-1}\binom{x}{n-1} + a_{n-2}\binom{x}{n-2} + \ldots + a_0\binom{x}{0}.$$

Ustalmy teraz $m \in \mathbb{Z}$ i zauważmy, że

$$P(m) = P(0) + Q(1) + Q(2) + \ldots + Q(m-1).$$

Wykorzystując powyższą równość oraz dobrze znaną własność współczynników dwumianowych *Newtona* :

$$\binom{0}{n} + \binom{1}{n} + \ldots + \binom{m-1}{n} = \binom{m}{n+1} \quad \text{dla } m, n \in \mathbb{N}$$

otrzymujemy, że

$$P(x) = a_{n-1}\binom{x}{n} + a_{n-2}\binom{x}{n-1} + \ldots + a_0\binom{x}{1} + P(0) \quad \text{dla } x \in \mathbb{Z}$$

a ponieważ powyższa równość zachodzi dla nieskończenie wielu liczb to zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej. Indukcja kończy dowód.

Powracając do zadania: Na podstawie lematu dostajemy, że m dzieli $n!$. Jednakże łatwo znaleźć taki wielomian dla $m = n!$.

3. Niech prosta prostopadła do OI_a przechodząca przez A' przecina AB, AC odpowiednio w punktach P, Q. Jak wiemy $\angle I_aDP = \angle PA'Ia$ czyli czworokąt $DPA'I_a$ jest cykliczny, analogicznie I_aQEA' jest cykliczny. Stwierdzamy wiec, że $\angle A'QI_a = \angle A'EI_a = \angle I_aDA' = \angle I_aPA'$. Dostajemy więc, że $\triangle I_aPQ$ jest równoramienny, więc A' jest środkiem odcinka PQ.

Niech K, L będą spodkami dwusiecznych wewnętrznych w $\triangle ABC$ poprowadzonych odpowiednio z wierzchołków B, C. Znane jest, że $KL \perp OI_a$ (dowód polega na rozpatrzeniu inwersji względem okręgu dopisanego). Oznacza to więc, że prosta AA' połowi odcinek KL.

Przytoczmy następujący lemat: Dany jest P leżący wewnątrz $\triangle ABC$. Oznaczmy przez D, E, F przecięcie PD, PE, PF odpowiednio z BC, AC, AB. Oznaczmy przez Q punkt leżący wewnątrz $\triangle DEF$. Proste DQ, EQ, FQ przecinają EF, FD, DE odpowiednio w punktach X, Y, Z. Wtedy proste AX, BY, CZ są współpękowe.

Dowód polega na rozpatrzeniu przekształcenia rzutowego które przekształca P na środek ciężkości $\triangle ABC$. Wtedy teza lematu wynika wprost z jednokładności.

Stosując nasz lemat dla środka okręgu wpisanego w $\triangle ABC$ oraz środka ciężkości trójkąta ze spodków dwusiecznych otrzymujemy tezę. $\square$

4. Rozumowanie indukcyjne. Dla $k = 1$ teza oczywista. Biorąc $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ różnych liczb naturalnych zauważamy, że

$$a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_k^3 \leqslant 1^3 + 2^3 + \ldots + (a_{k+1} - 1)^3 = \frac{a_{k+1}^2(a_{k+1} - 1)^2}{4}.$$

Z której wynika, że

$$4a_{k+1}^3(a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_k^3) \leqslant a_{k+1}^5(a_{k+1} - 1)^2 = a_{k+1}^7 + a_{k+1}^5 - 2a_{k+1}^6$$

czyli

$$a_{k+1}^7 + a_{k+1}^5 \geqslant 4a_{k+1}^3(a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_k^3) + 2a_{k+1}^6.$$

Dodając powyższą nierówność do założenia indukcyjnego dla k dostajemy szukaną nierówność dla $k + 1$.

5. Wiemy ,że

$$\prod_{i=1}^{k}(1 + p_i + p_i^2 + \cdots + p_i^{\alpha_i}) = 2n = 2p_1^{e_1} \cdots p_k^{\alpha_k}.$$

Załóżmy, że, α_{11} jest liczbą nieparzystą. To implikuje, że

$$p_1 + 1|1 + p_1 + p_1^2 + \cdots p_1^{e_1}|2n,$$

więc p_1+1 jest dzielnikiem $2n$. Ponieważ $p_1 > 1$, że jakiś dzielnik musi dzielić p_1+1. Oczywiście, $p_1 + 1 < p_3, p_4, \cdots, p_k$. Jedyną możliwością taką, że p_2 dzieli $p_1 + 1$ jest, gdy $p_2 = p_1 + 1$ więc, $(p_1, p_2) = (2, 3)$. Mamy $p_1 = 2$ i $p_2 = 3$, więc $6|n$. Rozpatrując nierówność

$$s(n) = 2n > n + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{6} + 1 = 2n + 1,$$

dochodzimy do sprzeczności

6. Definiujemy kolekcje szcześcianów $c(x, y, z)$ w M_n w $[0, n]^3$ wraz z ich przecięciami $[0, n]^3$ z płaszczyznami $z = y = n$, $x = 0$ tak, że

- jesli $c(x, y, z) \in M_n$ i $z \geqslant 1$, to $c(x, y, k) \in M$ dla wszytskich $k \in \{0, \dots, z - 1\}$
- jesli $c(x, y, z) \in M$ i $z \leqslant m - 2$, to $c(x + 1, y, z) \in M$ (jeśli $x \leqslant n - 2$) i $c(x, y + 1, z) \in M$ (jeśli $y \leqslant n - 2$).

Następnie pokazujemy, że istnieje $1 - 1$ odpowiedniość między M_n i $\mathcal{A}$ i operacja f obraca element z M_n o $60°$.
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h546347p3161952

7. Możemy założyć , że $a_l = b_l$ dla $l \in \{0, 1, \dots, m + n - NWD(m, n)\}$. Niech F i G oznaczają funkcje tworzące ciągów $\{a_k\}_{k \geqslant 0}$ i $\{b_k\}_{k \geqslant 0}$. Wówczas $F(X) = (1 - X^m)^{-1}P(X)$ i $G(X) = (1 - X^n)^{-1}Q(X)$ dla pewnych wielomianów P i Q stopni co najwyżej odpowiednio $m - 1$ i $n - 1$. Wielomin $(1 - X^{\mathrm{NWD}(m,n)})$ dzieli wielomiany $(1 - X^m)$ i $(1 - X^n)$, więc dla pewnego wielomianu R stopnia co najwyżej $m + n - \mathrm{NWD}(m, n) - 1$ zachodzi równość $F(X) - G(X) = (1 - X^m)^{-1}(1 - X^n)^{-1}(1 - X^{\mathrm{NWD}(m,n)})R(X)$, jednakże z założenia $R(X) = 0$, więc ciągi są równe.

8. Niech $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$, $\angle ACB = 2\gamma$. Z prostego rachunku na kątach dostajemy, że $\angle I_aCQ = 90° - \gamma$, $\angle PBI_a = 90° - \beta$, $\angle BPI_a = \angle I_aQC = 90° - \alpha$. Czyli $\triangle PBI_a \sim \triangle QCI_a$.

Niech R będzie odbiciem I_a względem P. Wiemy, że $\triangle PBI_a \cup R \sim \triangle QI_aC \cup L$. Oznacza to, że $\angle PI_aK = \angle PRB = \angle I_aLQ$. Udowodniliśmy więc, że $\angle KI_aP + \angle LI_aQ = 90° + \alpha = 90° + \frac{\angle BAC}{2}$. Punkt I_a leży na dwusiecznej $\angle KAL$ więc na mocy powyższego lematu implikuje to, że I_a jest środkiem okręgu wpisanego w $\triangle AKL$, czyli KL jest styczna do ω.

9. Przypuśćmy, że wielomian P jest stopnia n. Wykorzystując interpolacje Lagrange'a znajdujemy wielomian $Q \in \mathbb{Q}[X]$ taki, że $Q(x) = a_x$ dla $x \in [0, n]$. Oczywiście istnieje taka liczba całkowita k, że $kQ \in \mathbb{Z}[X]$. Pokażemy, że wielomian Q spełnia warunki zadania. Niech $x > n$. Mamy

$$kq_x \equiv kq_m \pmod{x - m} \quad m \in \mathbb{Z} \cap [0, n].$$

Ponieważ $m - n | kQ(m) - kQ(n)$ dla $m, n \in \mathbb{N}$ $(m \neq n)$ to wykorzystując własność postać wielomianu Q i powyższą kongruencję widzimy, że

$$kq_x \equiv kQ(x) \pmod{x - m} \quad m \in \mathbb{Z} \cap [0, n],$$

stąd

$$kq_x \equiv kQ(x) \quad (\mathrm{mod}\ \mathrm{NWW}(x, x-1, \ldots, x-d)).$$

Jednakże

$\mathrm{NWW}(x, x-1, \ldots, x-i-1) = \mathrm{NWW}(\mathrm{NWW}(x, x-1, \ldots, x-i), x-i-1) = \frac{\mathrm{NWW}(x, x-1, \ldots, x-i)(x}{\mathrm{gcd}(\mathrm{NWW}(x, x-1, \ldots, x-i),}$
$\geqslant \frac{\mathrm{NWW}(x, x-1, \ldots, x-i)(x-i-1)}{\mathrm{gcd}(x(x-1)\cdots(x-i), (x-i-1))} \geqslant \frac{\mathrm{NWW}(x, x-1, \ldots, x-i)(x-i-1)}{(i+1)!}$. Zatem indukcyjnie pokazujemy, że

$$\mathrm{NWW}(x, x-1, \ldots, x-n) \geqslant \frac{x(x-1)\cdots(x-n)}{n!(n-1)!\cdots 1!}.$$

Ponieważ wielomiany P i Q mają stopień n, to od pewnego miejsca (powiedzmy $x > N$) zachodzi nierówność

$$\left| Q(x) \pm \frac{x(x-1)\cdots(x-n)}{kn!(n-1)!\cdots 1!} \right| > P(x).$$

Wobec tego dla pewnego L, dla $x > L$ mamy $q_x = Q(x)$, stąd już łatwo wynika teza.
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h57388p353086

10. Niech proste PI_1, PI_2, PZ przecinają okrąg opisany na ABC odpowiednio w punktach M, N, T. Z lematu, że środki jednokładności dwóch okręgów oraz ich środki jednokładności tworzą czwórkę punktów sprzężonych harmonicznie stwierdzamy, że: $P(Z, U; I_1, I_2) = 1$. Przerzucając ten dwustosunek na okrąg opisany na $\triangle ABC$ stwierdzamy, że czworokąt $AMTN$ jest harmoniczny.

Oznacza to, że prosta AP jest symedianą w $\triangle AMN$. Z drugiej strony M, N są środkami łuków AB, AC, więc nie zależą od wyboru punktu P, czyli punkt T również nie zależy od wyboru puntu P. Dostaliśmy zatem, że wszystkie tak skonstruowane proste przechodzą przez stały punkt T co kończy dowód.

11. Stosujmy indukcję ze względu na sumę wszystkich elementów zbioru A . Przechodząc do kroku indukcyjnego rozważmy zbiór $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Jeżeli wszystkie elementy zbioru A są parzyste, to stosując założenie indukcyjne do zbioru $\frac{1}{2}A$ otrzymujemy zbiór B_0 o odpowiednich własnościach; wówczas zbiór B złożony z dwukrotności wszystkich elementów zbioru B_0 oczywiście spełnia tezę. Zakładamy, że w zbiorze A istnieją liczby nieparzyste; niech an biorąc najmniejszy z nich najmniejszy z nich konstruujemy odpowiednie zbiory.
Mszana 2011 zadanie 31

12. Ustalmy k jako wymiar S_p i niech p będzie liczbą pierwszą $p \equiv 1 \pmod{k}$, którą później jeszcze poprawimy. Ponieważ S jest wolny, to istnieje g takie, że zarówno $g^k \equiv 1 \pmod{p}$ jak i

$(1-g)^k \equiv 1 \pmod{p}$. teraz weźmy $p \equiv 2 \pmod{3}$, wtedy wielomiany $x^k - 1$ i $(1-x)^k - 1$ sa względnie pierwsze u dla pewnych $p, q \in \mathbb{Z}[x]$ mamy

$$p(x)(x^k - 1) + q(x)((1-x)^k - 1) = n$$

dla jakiejś liczby całkowitej n. Więc istnieje g taka, że lewa strona znika $\pmod{p}$, jeśli $p \nmid n$, to podgrupa jest wolna. Zatem bierzemy $p > n$, z$p \equiv 1 \pmod{k}$ i $p \equiv 2 \pmod{3}$ na podstawie Dirichleta i mamy tezę.
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h587305p3476292

2.2 Mecz matematyczny

2.2.1 Grupa średnia

1. Wystarczy zauważyć, że

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{a_i^2 + a_i a_{i+1} + a_{i+1}^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i+1}^3}{a_i^2 + a_i a_{i+1} + a_{i+1}^2}.$$

2. Zauważmy, że z warunku n jest nieparzysta wynika istnienie takich liczb $k,\ l,\ m$, że $x_k \geqslant x_l \geqslant x_m$ (inaczej gdy $x_1 \geqslant x_2$ mielibyśmy $x_1 \geqslant x_2 \leqslant x_3 \geqslant x_4 \dots$ co prowadzi do sprzeczności). Wiemy więc, że liczby te spełniają nierówność: $2x_k x_l \geqslant x_l^2 + x_m^2$ z czego dostajemy, czyli:

$$\max_{j=1,\dots,n}(2x_j x_{j+1}) \geqslant 2x_k x_l \geqslant x_l^2 + x_m^2 \geqslant \min_{i=1,\dots,n}(x_i^2 + x_{i+1}^2) \max_{j=1,\dots,n}(2x_j x_{j+1})$$

3. Zauważmy, że funkcja $f(x) = 0$ jest rozwiązaniem. W przeciwnym przypadku istnieje takie c, że $f(c) \neq 0$. Przypuśćmy, że dla pewnych a, b mamy $f(a) = f(b)$. Wówczas wstawiając $x = c,\ y = a$ mamy:

$$f(cf(a)) + f(f(c) + f(a)) = af(c) + f(c + f(a))$$

Podstawiając $x = c,\ y = b$ dostajemy

$$f(cf(b)) + f(f(c) + f(b)) = bf(c) + f(c + f(b))$$

Korzystając z $f(a) = f(b)$ I porównując obie nierówności otrzymamy $af(c) = bf(c)$, czyli a, b, co oznacza, że funkcja jest różnowartościowa.
Podstawmy teraz $x = 0, y = 1$. Otrzymujemy

$$f(0) + f(f(0) + f(1)) = f(0) + f(f(1))$$

czyli $f(f(0) + f(1)) = f(f(1))$. Różnowartościowość daje nam teraz $f(0) = 0$.
Podstawiając $y = 0$ dostajemy $f(f(x)) = f(x)$, co z różnowartościowości daje $f(x) = x$.
Odp: $f(x) = 0 \cup f(x) = x$

4. Liczba 5^n ma w zapisie dziesiętnym nie więcej niż n cyfr: $5^n = c_0 + c_1 \cdot 10 + c_2 \cdot 10^2 + \ldots + c_{n-1} \cdot 10^{n-1}$, przy czym niektóre cyfry c_i mogą być zerami. Przypuśćmy, że k jest najmniejszą liczbą naturalną, dla której $c_k = 0$. Rozważmy liczbę $5^n + 10^k \cdot 5^{n-k}$. Liczba ta ma w zapisie dziesiętnym postać $c_0 + c_1 \cdot 10 + \ldots + c_{k-1} \cdot 10^{k-1} + 5 \cdot 10^k + \ldots$, gdzie $c_i \neq 0$ dla $i \leqslant k$. Jeśli któraś z dalszych cyfr tej liczby jest równa zeru, np. $c_r = 0$ przy pewnym $r > k$, ale $c_j \neq 0$ dla $j < r$, to rozważamy liczbę $5^n + 10^k \cdot 5^{n-k} + 10^r \cdot 5^{n-r}$, która w zapisie dziesiętnym ma $r + 1$ kolejnych cyfr różnych od zera.

W wyniku takich operacji otrzymamy liczbę, w której zapisie dziesiętnym niezerowe są cyfry odpowiadające rzędom 1, 10, 10^2, 10^{n-1}. Ponadto liczba ta nie przekracza $5^n + 10 \cdot 5^{n-t} + 10^2 \cdot 5^{n-2} + \ldots + 10^{n-t} \cdot 5 = 5^n + 2 \cdot 5^n + 2^2 \cdot 5^n + \ldots + 2^{n-1} \cdot 5^n = 5^n(1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}) = 5^n(2^n - 1) < 10^n$.

Jest to więc liczba mająca w zapisie dziesiętnym dokładnie n cyfr różnych od zera. Jest ona przy tym wielokrotnością liczby 5^n, gdyż powstaje przez dodanie do 5^n składników postaci $10^k \cdot 5^{n-k} = 5^n \cdot 2^k$, które są wielokrotnościami liczby 5^n.

5.

6. Łatwo zauważyć, że wszystkie permutacje zbioru $1, 2, 3, \ldots, p$ można połączyć w grupy tak, aby w każdej było p elementów oraz π_1, π_2 należą do jednej grupy wtedy I tylko wtedy, gdy $\pi_1(i) - \pi_2(i) \equiv \pi_1(i) - \pi_2(i) \mod p$ dla każdej pary i, j. Innymi słowy są to grupy

$$\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(p)$$

$$\pi(1) + 1, \pi(2) + 1, \ldots, \pi(p) + 1$$

$$\pi(1) + 2, \pi(2) + 2, \ldots, \pi(p) + 2$$

...

$$\pi(1) + p - 1, \pi(2) + p - 1, \ldots, \pi(p) + p - 1$$

.

Oczywiście wszystko *modp*. Teraz weźmy pewne $k < p$. Popatrzmy na sumy pierszych k elementów w każdej z permutacji w pewnwj grupie. Są to liczby

$$\pi(1) + \pi(2) + \ldots + \pi(k)$$

$$\pi(1) + \pi(2) + \ldots + \pi(k) + k$$

$$\pi(1) + \pi(2) + \ldots + \pi(k) + 2k$$

cdots

$$\pi(1) + \pi(2) + \ldots + \pi(k) + (p-1)k$$

Przypuśćmy, że pewne dwie sumy przystają do siebie $\mod p$, powiedzmy $\pi(1) + \pi(2) + \ldots + \pi(k) + ik \equiv \pi(1) + \pi(2) + \ldots + \pi(k) + jk$. Wtedy oczywiście $p \mid (i-j)k$, ale liczby k oraz $i - j$ są mniejesze od p i dodatnie (bso $i > j$), co daje sprzeczność. Widzimy więc, że każde z tych sum są parami różne, a jest ich p, czyli dokładnie jedna z nich dzieli się przez p
Ponadto da dowolnej permutacji π mamy

$$\pi(1) + \pi(2) + \ldots + \pi(p) = 1 + 2 + \ldots + p = \frac{p(p+1)}{2}$$

, czyli suma wszystkich elementów jest podzielna przez p. W każdej grupie jest zatem dokładnie $p-1+p = 2p-1$ liczb podzielnych przez p. Grup mamy $\frac{p!}{p} = (p-1)!$, czyli łącznie $(p-1)!(2p-1)$ liczb podzielnych przez p, nasza średnia wartość to $frac(p-1)!(2p-1)p! = \frac{2p-1}{p}$.

7. Numerujemy pola pierwszego rzędu cyklicznie: $1, 2, 3, 5, 4, 6, 1, \ldots$. W każdym kolejnym rzędzie numery pól zwiększamy o 1 modulo 6. Środkowe pole ma wówczas numer 2.
Każdy prostokąt pokrywa pola o różnych numerach, a tymczasem szachownica zawiera 309 pól z numerem 1, 307 pól z numerem 2, 308 pól z każdym z numerów 3, 4, 5, 6.

8. Dla każdego n niech F_n będzie liczbą permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ z wymaganą własnością - nazwijmy je permutacjami *dobrymi*. Dla $n = 1, 2, 3$ każda permutacja jest dobra, zatem $F_1 = 1,\ F_2 = 2,\ F_3 = 6$.
Niech $n > 3$ i rozważmy jakąkolwiek dobrą permutację $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Wtedy $n - 1$ musi być dzielnikiem liczby

$$2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) = 2((1 + 2 + \cdots + n) - a_n) = n(n + 1) - 2a_n = (n + 2)(n - 1) + (2 - 2a_n).$$

Zatem $2a_n - 2$ jest podzielne przez $n - 1$, więc jest równe 0 lub $n - 1$ lub $2n - 2$. To oznacza, że

$$a_n = 1 \quad \text{lub} \quad a_n = \frac{n+1}{2} \quad \text{lub} \quad a_n = n$$

Załóżmy, że $a_n = (n + 1)/2$. Ponieważ permutacja jest dobra, dla $k = n - 2$ otrzymujemy, że $n - 2$ jest dzielnikiem

$$2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-2}) = 2((1 + 2 + \cdots + n) - a_n - a_{n-1}) = n(n+1) - (n+1) - 2a_{n-1} = (n+2)(n-2) + 3 - 2a_{n-1}.$$

Zatem $2a_{n-1} - 3$ jest podzielne przez $n - 2$, więc jest równe 0 lub $n - 2$ lub $2n - 4$. Oczywiście nie może być równe 0 ani $2n - 4$, bo $2a_{n-1} - 3$ jest nieparzyste. Pozostała możliwość ($2a_{n-1} - 3 = n - 2$) prowadzi do $a_{n-1} = (n + 1)/2 = a_n$, co nie może być prawdziwe, bo $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ jest permutacją. Zatem $a_n = 1$ lub $a_n = n$.
Jeżeli $a_n = n$, to $(a_1, a_2, \ldots a_{n-1})$ jest dobrą permutacją zbioru $\{1, 2, \ldots, n - 1\}$. Jest F_{n-1} takich permutacji. Dołączenie a_n do końca takiej permutacji tworzy dobrą permutację zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$.
Jeżeli $a_n = 1$, to $(a_1 - 1, a_2 - 1, \ldots a_{n-1} - 1)$ jest permutacją zbioru $\{1, 2, \ldots n - 1\}$. Jest także dobrą permutacją, bo liczba

$$2((a_1 - 1) + (a_2 - 1) + \cdots + (a_k - 1)) = 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) - 2k$$

jest podzielna przez k dla $k \leqslant n - 1$. I znowu, każda z F_{n-1} dobrych permutacji $(b_1, b_2, \ldots b_{n-1})$ zbioru $\{1, 2, \ldots, n - 1\}$ tworzy dobrą permutację zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, której ostatnim wyrazem jest 1, konkretniej $(b_1 + 1, b_2 + 1, \ldots, b_{n-1} + 1, 1)$.
Zatem jest F_{n-1} dobrych permutacji kończących się na 1 i F_{n-1} dobrych permutacji kończących się na n, co daje zależność $F_n = 2F_{n-1}$. Zaczynając od 3, otrzymujemy wzór $F_n = 3 \cdot 2^{n-2}$ dla $n \geqslant 3$.

9. Oznaczmy przez R punkt przecięcia DW z AB. Niech proste KA, LB przecinają się w punkcie S (jeżeli istnieje). Z tego, że $\angle AWB = 180° - \angle ADB$ oraz $\angle ADB = \angle ABS$ dostajemy, że $\angle AWB = 90° + \frac{\angle ASB}{2}$. Jako, że W leży na dwusiecznej $\angle BSA$ oznacza to, że punkt W jest środkiem okręgu wpisanego w $\triangle ABS$. Dostajemy więc, że $\angle WAR = \angle SAW = \angle ADW$ (jeżeli S jest punktem w nieskończoności to ta równość jest trywialna) oznacza to, że okrąg opisany na $\triangle PAR$ jest styczny do AW. Implikuje to, że prosta AR jest antyrównoległa do AD w kącie AWP. Jako, że WK jest symedianą w $\triangle AWD$ to P jest środkiem AR.

Analogicznie pokazujemy, że $RQ = QB$ czyli $PQ = \frac{1}{2}AB$ co oczywiście jest stałe.

10. Niech P będzie punktem symetrycznym do H względem M. Czworokąt $BHCP$ jest równoległobokiem, zatem $BP \parallel CH \perp AB$ i analogicznie $CP \perp AC$. To oznacza, że na czworokąty $KBPH$ oraz $LCHP$ są cykliczne, czyli $\angle PKH = \angle PBH \angle PCH = \angle PLH$. Widzimy, że trójkąt KLP jest równoramienny, a H jest spodkiem wysokości, co daje tezę zadania.

11. Proste BC_2, CB_2 przecinają się w punkcie I będącym środkiem okręgu ω. Proste BC_1, CB_1 przecinają się w punkcie T będącym odbiciem D względem I. Niech X będzie przecięciem prostych B_1C_1 i BC. Z twierdzenia Menelaosa dostajemy równość $\frac{CX}{XB} \cdot \frac{BC_1}{C_1T} \cdot \frac{TB_1}{B_1C} = 1$. Oznaczając przez Y punkt przecięcia C_2B_2 z BC widzimy, że teza jest równoważna pokazaniu równości:

$$\frac{BC_2}{C_2I} \cdot \frac{IB_2}{B_2C} = \frac{BC_1}{C_1T} \cdot \frac{TB_1}{B_1C}$$

Z drugiej strony wiemy, że stosunek pól trójkątów podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa. Rozważając trójkąt prostokątny BDI dostajemy $\frac{BC_2}{C_2I} = \frac{BD^2}{DI^2}$ Postępując analogicznie dla pozostałych trójkątów dostajemy:

$$\frac{BC_2}{C_2I} \cdot \frac{IB_2}{B_2C} = \frac{BD^2}{DI^2} \cdot \frac{ID^2}{DC^2} = \frac{BD^2}{DT^2} \cdot \frac{TD^2}{DC^2} = \frac{BC_1}{C_1T} \cdot \frac{TB_1}{B_1C}$$

co było do pokazania.

2.2.2 Grupa starsza

1.

2. Niech b_n będzie takim ciągiem, że $b_n = a_n + 2$ dla każdego n. Podstawiając to do naszego równania dostajemy $b_{n+1} = \frac{b_n b_{n-1}}{2}$. Ponadto $b_0 = 4, b_1 = 6$. Przez prostą indukcję udowadniamy $b_n = 2^{F_{n-1}+1}3^{F_n}$, gdzie (F_i) jest ciągiem Fibonacciego. Zbadajmy teraz dzielniki liczb $a_n - 1 = b_n - 3 = 2^{F_{n-1}+1}3^{F_n} - 3 = 3(2^{F_{n-1}+1}3^F_{n-1} - 1)$. Oczywiście jest to liczba podzielna przez 3, ale nie przez 2. Weźmy teraz liczbę pierwszą $p > 3$. Jeśli znajdziemy takie n, że $p - 1 \mid F_{n-1} + 1$ oraz $p - 1 \mid F_n - 1$. Rozważmy ciąg Fibonacciego $\mod p - 1$. Mamy skończenie wiele par reszt $\mod p - 1$, zatem dla pewnych k, l zachodzi $F_k \equiv F_l$ $F_{k+1} \equiv F_{l+1}$. W ciagu Fibonacciego dwa kolejne wyrazy jednoznacznie generują każdy następny oraz każdy poprzdni wyraz, czyli ten ciąg jest okresowy $\mod p-1$. Oznaczają przez c długość tego okresu mamy $F_c \equiv F_0 = 0 \mod p-1$ oraz $F_{c+1} \equiv F_1 = 1 \mod p - 1$. To oznacza, że $F_{c-1} \equiv 1 - 0 = 1$ oraz $Fc - 2 \equiv 0 - 1 = -1 \mod p - 1$. Podstawiając $n = c - 1$ dostajemy to o chcieliśmy. Odp: Wszystkie $p > 2$.

3.

4.

5. Udowodnimy najpierw lemat:

Dana jest dodatnia liczba wymierna $x < 1$. Pokazać, że istnieją takie $\alpha_1,\ \alpha_2, \cdots \alpha_n$, że $\min(\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ jest dowolnie duże oraz:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Zastosujemy następujący algorytm. Niech $r \in \mathbb{Z}_+$ takie, że $\frac{1}{r} < x < \frac{1}{r-1}$. Zauważmy, że jeżeli $x = \frac{p}{q}$ to $\frac{p}{q} - \frac{1}{r} = \frac{pr-q}{qr}$. W ten sposób dostaliśmy ułamek o mniejszym mianowniku. Wiemy również, że $\frac{1}{r} > \frac{pr-q}{pr}$ czyli postępując analogicznie nigdy nie powtórzymy już raz użytej liczby r. Co więcej w każdym kroku mianownik ułamka będzie się zmniejszał, aż w końcu dojdzie do 1.

Udowodniliśmy tym samym, że dla $x \in (0, 1)$ istnieje co najmniej jedno przedstawienie x w postaci sumy odwrotności różnych liczb całkowitych. Niech $\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ będą tymi liczbami. Zauważmy, że $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$. Zakładając więc, że $\alpha_1 = \min(\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots \alpha_n$ i zamieniając $\frac{1}{\alpha_1}$ według wzoru dostajemy nową reprezentację x z mniejszym minimum, co kończy dowód.

Wróćmy do naszego zadania. Wiemy, że $f(1) = 1$. Oznacza to, że dla $k \geqslant 2$ $f(k) \geqslant 2$. Niech $n \geqslant 2$. Korzystając z naszego lematu dla $x = 1 - \frac{1}{n}$ dostajemy $1 - \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\alpha_i}$ gdzie $\min(\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots \alpha_m) > (k+1)^2$. Zauważmy, że $1 = \frac{1}{n} + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\alpha_i}$ oraz $1 = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\alpha_i}$. Z własności funkcji f mamy: $\frac{1}{f(n)} + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{f(\alpha_i)} \in \mathbb{Z}$ oraz $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{f(\alpha_i)} \in \mathbb{Z}$. Dostaliśmy więc, że: $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n(n+1)} \in \mathbb{Z}$. Z nierówności $f(k) \geqslant 2$ dostajemy więc:

$$\frac{1}{f(n)} = \frac{1}{f(n+1)} + \frac{1}{f(n(n+1))}.$$

Wnioskujemy stąd, że funkcja f jest rosnąca, czyli $f(n) \geqslant n$. Wystarczy teraz ponownie skorzystać z tego, że $1 = \frac{1}{n} + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\alpha_i} \geqslant \frac{1}{f(n)} + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{f(\alpha_i)} \in \mathbb{Z}_+$. Jeżeli $f(n) > n$ to powyższa nierówność byłaby ostra, co oczywiście nie jest możliwe. Udowodniliśmy tym samym, że jedyną funkcją spełniającą warunki zadania jest $f(n) = n$.

6. Rozważmy ogólniejszą sytuację. Pokażemy, że gdy liczba rzędów w tabliczce czekolady jest nie mniejsza od liczby kolumn, to Maciek ma strategię wygrywającą. Dowód tego faktu przeprowadzimy indukcyjnie ze względu na liczbę kolumn. Gdy mamy jedną kolumnę, Radek nie może wykonać pierwszego ruchu, więc Maciek wygrywa. Rozważmy teraz tabliczkę o n wierszach i $m \leqslant n$ kolumnach. Radek w swym pierwszym ruchu musi ją podzielić na dwie części: $n \times k$ i $n \times l$, gdzie $k + l = m$. Bez straty ogólności przypuśćmy, że $k \leqslant l$. Wówczas Maciek może odciąć kwadrat o boku k z kawałka $n \times k$. Wtedy Radek musi wykonać swój ruch mając do dyspozycji kawałki: $(n-k) \times k$, $k \times k$, $n \times l$. Zauważmy jednak, że $n \geqslant m \geqslant l$ oraz $n \geqslant m = k + l \geqslant 2k$, więc $n - k \geqslant k$. Na każdym z tych kawałków osobno Radek przegra (założenie indukcyjne), więc może zostać zmuszony przez Maćka do rozpoczynania gry na kolejnych kawałkach i ostatecznej kapitulacji.

7. Pokażemy najpierw, że istnieją $a, b \geqslant 1$ takie, że a, b i $a + b$ są jednego koloru. Przypuśćmy przeciwnie. Nazwijmy kolory czerwony i niebieski. Bez straty ogólności załóżmy, że 1 jest niebieskie. Jeśli nie istnieje już żadna inna liczba niebieska, to w oczywisty sposób dostajemy sprzeczność, więc istnieje pewna liczba niebieska - n. Wówczas $n + 1$ oraz $n + 1$ są czerwone. Gdyby 2 było czerwone, to dostalibyśmy w ten sposób czerwoną trójkę $(2, n-1, n+1)$ - zatem 2 jest niebieskie. Skoro 1 i 2 są niebieskie, to 3 jest czerwone. Analogicznie jak poprzednio wnioskujemy, że istnieje pewna liczba niebieska większa od 4 - niech będzie to n. Wówczas $n - 1$ oraz $n + 2$ są czerwone. Jednak wówczas trójka $3, n-1, n+2$ jest czerwona i spełnia założenia zadania. Sprzeczność.
Analogicznie możemy wykazać, że istnieją $a, b \geqslant n+1$ spełniające założenia zadania, rozpatrując zamiast zbioru $\mathbb{N}$ zbiór $(n+1)\mathbb{N}$, gdzie $k\mathbb{N} = \{n : n = km, m \in \mathbb{N}\}$.

8. Zastosujmy indukcję ze względu na sumę wszystkich elementów zbioru A. Dla sumy równej 1 teza jest prawdziwa.
Przechodząc do kroku indukcyjnego rozważmy zbiór $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ Jeżeli wszystkie elementy zbioru A są parzyste, to stosując założenie indukcyjne do zbioru $A' = \{\frac{1}{2}a_1, \frac{1}{2}a_2, \ldots, \frac{1}{2}a_n\}$ otrzymujemy zbiór B' o odpowiednich własnościach 1. i 2.; wówczas zbiór B złożony z dwukrotności wszystkich elementów zbioru B' oczywiście spełnia tezę. Przypuśćmy zatem, że w zbiorze A istnieją liczby nieparzyste; niech a_n będzie najmniejszą z nich.
Weźmy pod uwagę zbiór $A' = \{a'_1, a'_2 \ldots, a'_{n-1}\}$, gdzie dla $i = 1, 2, \ldots, n-1$ przyjmujemy $a'_i = \frac{1}{2}a_i$, jeżeli a_i jest liczbą parzystą, albo $a'_i = \frac{1}{2}(a_i - a_n)$, jeżeli a_i jest liczbą nieparzystą. Zbiór A' ma sumę wszystkich elementów mniejszą niż zbiór A (przy czym tych elementów może

być mniej niż $n-1$, gdyż może mieć miejsce równość $a'_i = a'_j$, jeśli jedna z liczb a_i, a_j jest parzysta, a druga nieparzysta). Na mocy założenia indukcyjnego istnieje zbiór B' mający nie więcej niż $n-1$ elementów, o własnościach 1. i 2., odpowiadający zbiorowi A'. Dodając kilkukrotnie do zbioru B' element większy od sumy dotychczasowych elementów otrzymamy, nie naruszając własności 1. i 2., zbiór B'' o dokładnie $n-1$ elementach.
Wykażemy, że w tej sytuacji n-elementowy zbiór B złożony z liczby a_n oraz dwukrotności elementów zbioru B'' spełnia warunki zadania. Własność 1. jest spełniona, bowiem dwa różne podzbiory zbioru B o jednakowych sumach elementów musiałyby - z uwagi na parzystość wszystkich elementów oprócz a_n - jednocześnie zawierać liczbę a_n lub jej nie zawierać; wtedy jednak usuwając w razie potrzeby a_n z obu zbiorów uzyskalibyśmy sprzeczność: równe byłyby sumy dwukrotności elementów różnych podzbiorów zbioru B''. Z kolei własność 2. dla zbioru B wynika z faktu, że każdy element zbioru A jest postaci $2x$ lub $2x + a_n$ dla pewnej liczby $x \in A'$, a każda z takich liczb $2x$ jest sumą parzystych elementów zbioru B. Rozwiązanie jest więc zakończone.

9. Niech X, Y, Z będą środkami okręgów opisanych na $\triangle BHC$, $\triangle CHA$, $\triangle AHB$. Zauważmy, że punkt O jest ortocentrum trójkąta XYZ. Co więcej prosta YZ jest symetralną odcinka AH. Oznacza to, że w symetrii względem YZ prosta OH przejdzie na prostą AA_1. Oznacza to, że punkt przecięcia prostych AA_1, BB_1, CC_1 jest punktem anty-steinerowskim prostej OH względem $\triangle XYZ$ z czego wynika teza.

Uwaga: punktem anty-steineroskim prostej l przechodzącej przez ortocentrum $\triangle ABC$ względem $\triangle ABC$ nazywamy punkt przecięcia odbić prostej l względem boków $\triangle ABC$. Punkt ten leży na okręgu opisanym na $\triangle ABC$. Dowód polega na przeliczeniu kątów.

10. BSO P leży bliżej B niż Q. Oznaczmy przez X punkt przecięcia EF z $\bigcirc(ABC)$ (bliżej B niż C).
Niech ω_1 będzie okręgiem o średnicy BC. Nietrudno pokazać, że w inwersji względem tego okręgu $\bigcirc(ABC)$ przechodzi na $\bigcirc(BHC)$. Ponadto $\bigcirc(MEF)$ przechodzi na prostą EF. To oznacza, że w tej inwersji punkt X przechodzi na P, czyli $X \in MP$.
Niech D będzie spodkiem wysokości z A. Wówczas $AH \cdot HD = BH \cdot HE = CH \cdot HF = r^2$. Rozważmy przekształcenie będące złożeniem symetrii względem H oraz inwersji o środku w H i promieniu r. W tym przekształceniu $\bigcirc(ABC)$ przechodzi na $\bigcirc(DEFM)$, a prosta EF na okrąg opisany na BHC, czyli X przechodzi na Q. W szczególności $X \in HQ$.
Widzimy że wszystkie trzy proste z tezy przechodzą przez X, co kończy dowód.

11. Zauważmy, że na czworokącie ACA_1C_1 można opisać okrąg. Oznacza to, że istnieje inwersja względem sfery o środku w punkcie S taka, że $A_1 \mapsto A$ i $C_1 \mapsto C$. Niech w tym przekształceniu $B_1 \mapsto B_2$ oraz $D_1 \mapsto D_2$. Z tego, że na czworokącie BDB_1D_1 można opisać okrąg stwierdzamy, że $B_1D_1 \parallel B_2D_2$ (prosta B_1D_1 jest antyrównoległa do B_2D_2). Z drugiej strony punkty A_1, B_1, C_1, D_1, S leżą na sferze, czyli A, C, B_2, D_2 leżą na jednej płaszczyźnie. Oznacza to, że $B_2 = B$, $D_2 = D$.

Z drugiej strony na ostrosłupie $SABCD$ można opisać sferę która względem tej inwersji przejdzie na płaszczyznę $A_1B_1C_1D_1$ co należało udowodnić.

2.2.3 Supergrupa

1. Jako, że 1 jest m krotnym pierwiastkiem wielomianu f mamy $(x-1)^{2^k}|(x-1)^m|f(x)$, implikuje to $f(x) = (x-1)^{2^k}r(x)$. Rozpatrzmy ten wielomian w ciele $\mathbb{F}_2$. Wtedy $f(x) = x^n + \ldots + x + 1$ oraz $f(x) = (x^{2^k} - 1)r_1(x)$ (bo z porównania współczynników mamy $(x-1)^{2^k} = x^{2^k} - 1$ w $\mathbb{F}_2$). Przy każdym x^k dla $k \leqslant n$ stoi w wielomianie f jedynka. Oznacza to, że wielomian $r(x)$ musi mieć stopień co najmniej $2^k - 1$. W innym przypadku współczynnik przy jednomianie $x^{\deg r+1}$ byłby zerowy. Udowodniliśmy więc, że $n = \deg f => 2^k + \deg r \geqslant 2^k + \deg r_1 \geqslant 2^{k+1} - 1$ co było naszą tezą.

2. Ze znanego lematu o *mixtilinear incircle* wiemy, że prosta T_aI przechodzi przez środek łuku BC okręgu opisanego na $\triangle ABC$ czyli z twierdzenia o dwusiecznej i twierdzenia sinusów mamy: $\frac{BD}{DC} = \frac{BT_a}{CT_a} = \frac{\sin\angle BAT_a}{\sin\angle T_aAC}$. Rozpisując te równości stosunków cyklicznie i korzystając z twierdzenia Cevy (najpierw normalnego a potem trygonometrycznego) dostajemy, że teza zadania jest równoważna ze współpękowością $AT_a,\ BT_b,\ CT_c$.

Z drugiej strony na mocy twierdzenia o złożeniu jednokładności proste te przechodzą przez środek jednokładności okręgu wpisanego i opisanego na $\triangle ABC$, co kończy dowód.

3. Niech ilość wierzchołków, krawędzi i ścian w grafie plenarnym $\mathcal{G}$. Pokażemy indukcyjnie po ilości wierzchołków, że teza zadania jest prawdziwa. Dla $V = 1, 2, 3$ ona jest oczywista. Załóżmy więc, że $V \geqslant 4$.

Ze wzoru Eulera wiemy, że $V - E + F = 2$. Przypisując każdej krawędzi ścianę dostajemy nierówność: $2E \geqslant 3F$. Łącząc te dwie rzeczy dostajemy nierówność: $3V - 6$.

Co więcej średni stopień wierzchołka w tym grafie wynosi $\frac{2E}{V}$, co aplikując wcześniejszą nierówność daje $\frac{2E}{V} < \frac{2(3V-6)}{V} < 6$. Oznacza to, że w grafie $\mathcal{G}$ istnieje wierzchołek v stopnia co najwyżej 5.

Rozważmy graf $\mathcal{G}'$ powstały w skutek usunięcia wierzchołka v (wraz z wychodzącymi krawędziami) z G. Z zasady szufladkowej Dirichleta wiemy, że istnieje taki kolor, że wierzchołek v sąsiaduje z co najwyżej 1 wierzchołkiem w tym kolorze (po pokolorowaniu grafu $\mathcal{G}'$). Kolorując v tym kolorem mamy pewność, że nie powstanie nam jednokolorowy cykl co kończy dowód.

4. Z twierdzenia Dirichleta istnieje taka liczba pierwsza p która daje resztę -1 z dzielenia przez 12. Weźmy $n = 2p \cdot \phi(\frac{p-1}{2})$. Zauważmy, że $3^n \equiv 1 \mod p-1$, a $2^n \equiv \frac{p-1}{2} + 1 \mod p-1$. Pierwsza nierówność wynika z tego, że $\mathrm{NWD}(p-1, 3) = 1$ oraz $\psi(\frac{p-1}{2}) = \psi(p-1)|n$, natomiast druga z tego, że $n \not\equiv 1 \mod p-1$ (bo n jest parzyste).

Dostaliśmy więc, że $b^{3^n} \equiv b \mod p$ oraz $a^{2^n} \equiv \pm 1 \cdot a$. Mamy więc, że $p|b \pm a$. Liczby $a,\ b$ są dodatnie, czyli z tej podzielności dla odpowiednio dużej liczby p wnioskujemy $a = b$ co kończy dowód.

Dodatkowo: Jeżeli dopuścimy możliwość, że $a = b$ to w tym przypadku wyjściowa podzielność przybiera formę $n|a^{2^n}+b^{3^n} = a^{2^n}(1+a^{3^n-2^n})$. Oznacza to, że dla odpowiednio dużych n zachodzi podzielność $m|1 + a^{3^n-2^n}$.

Wstawiając ponownie $n = 2p \cdot \phi(\frac{p-1}{2})$ dostajemy że $p|1 + a^{\frac{p-1}{2}}$ czyli liczba a jest nieresztą kwadratową dla każdego odpowiednio dużego p przystającego do -1 modulo 12. Jeżeli a posiadałoby inny dzielnik pierwszy niż 2 lub 3 to na mocy prawa wzajemności reszt kwadratowych i twierdzenia Dirichleta dostajemy sprzeczność.

Pozostaje więc przypadek gdy $a = 2^k 3^l$.

5. Niech $W(x) = z(x-z_1)\cdots(x-z_{n-1})(x-z_n)$ wtedy: $f'(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-z_1)\cdots(x-z_{n-1})(x-z_n)}{x-z_i}$.

Jeżeli $f'(\omega) = 0$ to albo $\omega = z_i$ i teza zachodzi, albo $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\omega - z_i} = 0$.

Przytoczmy pewien lemat: Dane są liczby zespolone $z_1,\ z_2, \ldots z_n$ leżące po jednej stronie prostej l przechodzącej przez 0. Wtedy zarówno $z_1 + z_2 + \cdots z_n \neq 0$ oraz $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \cdots + \frac{1}{z_n} \neq 0$.

Pierwsza suma jest oczywista, natomiast wszystkie punkty $\frac{1}{z_i} = \frac{\overline{z}_i}{|z_i|^2}$ będą leżeć po jednej stronie prostej l' będącej obrazem l w symetrii względem osi rzeczywistej.

Jeżeli ω leżałaby poza otoczką wypukłą tych punktów to równoważnie istniałaby taka prosta przechodząca przez ω, że wszystkie pierwiastki W leżą po jednej stronie tej prostej. Oznacza to, że liczby zespolone $\omega - z_i$ leżą po jednej stronie prostej przechodzącej przez 0. Na mocy naszego lematu daje to tezę.