V Liceum Ogólnokształcące
im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

Obóz przygotowawczy do Olimpiady Matematycznej

Rabka Zdrój 2018

Obóz Przygotowawczy do Olimpiady Matematycznej
Rabka Zdrój 2018

DW Karabela
Rabka Zdrój

Skład tekstu:

Dominik Burek
Jacek Dymel
Jędrzej Kula
Jakub Węgrecki
Artur Zubilewicz

Wstęp

Niniejsza broszura zawiera wszystkie zadania z obozu wraz z rozwiązaniami.

Treści zadań

Zawody indywidualne grupy młodszej

1. Na boku AC trójkąta ABC wybrano punkt E, a na odcinku BE - punkt D. Wiadomo, że $CE = CD = BE$, $BD = AE$. Wykazać, że $\sphericalangle B > 60^\circ$.

2. Dana jest liczba naturalna $k > 1$. Suma pewnego dzielnika liczby k i pewnego dzielnika liczby $k-1$ jest równa a, przy czym $a > k+1$. Wykazać, że przynajmniej jedna z liczb $a-1$ i $a+1$ jest złożona.

3. Dodatnie liczby x, y, z spełniają warunek:

$$xy + yz + zx + 2xyz = 1.$$

Wykazać, że $4x + y + z \geqslant 2$.

4. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Przekątne czworokąta przecinają się w punkcie K. Okrąg przechodzący przez punkty A, B, K przecina odcinek BC w punkcie M, zaś odcinek AD w punkcie N. Wykaż, że $KM = KN$.

5. Dane są takie liczby naturalne dodatnie a i b, że $p = 8a + 19b$ jest liczbą pierwszą. Wykaż, że liczba $n = ab - 7a - 18b + 1$ nie jest podzielna przez p.

6. Przedstaw liczbę

$$\frac{(1^4+4)\cdot(5^4+4)\cdot(9^4+4)\cdot\ldots\cdot(69^4+4)\cdot(73^4+4)}{(3^4+4)\cdot(7^4+4)\cdot(11^4+4)\cdot\ldots\cdot(71^4+4)\cdot(75^4+4)}$$

w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

7. W grupie A jest 25 osób, w grupie B 29 osób, a w grupie C 33 osoby. Gdy spotkają się dwie osoby z różnych grup, natychmiast obie przepisują się do trzeciej grupy. Czy możliwe jest dojście do sytuacji, że wszystkie osoby znajdą się w tej samej grupie?

8. Udowodnij, że jeżeli wielomian $f(x) = x^6 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ ma wszystkie pierwiastki rzeczywiste, to $a = b = c = d = 0$.

9.Dla jakich wartości α istnieje niestała funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniająca warunek $f(\alpha(x+y)) = f(x) + f(y)$ dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y?

10. Wysokości AH_1 i BH_2 trójkąta ostrokątnego ABC przecinają się w punkcie H. Punkty X i Y są odpowiednio środkami odcinków AB i CH. Wykazać, że proste XY i H_1H_2 są prostopadłe.

11. Udowodnij, że jeżeli jeden z pierwiastków równania $ax^3 + bx + c = 0$ o współczynnikach wymiernych jest iloczynem dwóch pozostałych pierwiastków, to jest on liczbą wymierną.

12. Udowodnić, że

$$1 < \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d} < 2$$

gdzie a, b, c, d są dowolnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi.

Zawody indywidualne grupy średniej

1. Czy w dowolnym grafie na n wierzchołkach i e krawędziach istnieje podgraf dwudzielny zawierający co najmniej $\frac{e}{2}$ krawędzi?

2. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC taki, że $AB = AC$. Punkt M jest środkiem odcinka BC. Punkt N jest środkiem odcinka AM. Niech P będzie rzutem punktu M na prostą CN. Wykazać, że $\sphericalangle BPA = 90^o$

3. Udowodnić, że każdą liczbę nie większą niż $n!$ można zapisać jako sumę co najwyżej n dzielników liczby $n!$.

4. W każdy wierzchołek ośmiościanu foremnego wpisano liczbę 0 lub 1 lub 2. Następnie na każdej ścianie napisano sumę liczb z wierzchołków, które wyznaczają tę ścianę. Pokazać, że na pewnych dwóch ścianach napisano tę samą liczbę.

5. Niech $Q_0(x) = 1$, $Q_1(x) = x$ oraz

$$Q_n(x) = \frac{Q_{n-1}^2(x) - 1}{Q_{n-2}(x)}$$

Wykazać, że jeśli n jest liczbą całkowitą, to $Q_n(x)$ jest wielomianem o współczynnikach całkowitych.

6.W trójkącie ABC kąt $\sphericalangle ABC$ jest rozwarty. Punkt F leży na boku AC, przy czym $AF = BF$ oraz $\sphericalangle FBC = 90°$. Punkty D i E są odpowiednio środkami boków AB i BC. Prosta przechodząca przez punkt F i równoległa do AB przecina prostą DE w punkcie G. Dowieść, że

$$\sphericalangle GCB = \sphericalangle ACD.$$

7. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. P jest punktem przecięcia przekątnych tego czworokąta. Wykazać, że:

$$\sqrt{P_{ABCD}} \geqslant \sqrt{P_{APB}} + \sqrt{P_{CPD}}$$

gdzie P_X oznacza pole figury X.

8. Czy istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, dla której liczbę 2^n można przedstawić w postaci sumy co najmniej dwóch kolejnych dodatnich liczb całkowitych? Odpowiedź uzasadnij.

9. Dane jest $n \geqslant 3$ czerwonych punktów w przestrzeni. Niektóre z nich są połączone zielonymi odcinkami, w sumie odcinków jest k.

Krzysztof i Iza grają w grę: Iza wybiera dwa punkty: startowy w którym umieszcza pionka i końcowy.

Następnie wykonują na zmianę ruchy zaczynając od Krzysztofa: najpierw Krzysztof porusza pionka po istniejącym odcinku, potem Iza usuwa jeden, dowolny odcinek. Gra kończy się gdy Krzysztof nie może już zrobić ruchu (wtedy wygrywa Iza) lub Krzysztof dojdzie pionkiem do punktu końcowego (wtedy wygrywa Krzysztof).

Dla danego n znajdź takie największe k, że Iza ma strategie wygrywającą, niezależnie od tego które z punktów są połączone odcinkami.

10. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich m, n spełniających równanie

$$10^m = n^2 + 1$$

11. Dana jest liczba całkowita dodatnia n. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste dodatnie x, które spełniają równanie:

$$(n-1) \cdot x^n + 1 = n \cdot x^{n-1}$$

12. 2018 dzieci stoi w kółku. Na początku jedno z dzieci trzyma 2018 prezentów mikołajkowych. Gdy dziecko trzyma co najmniej 2 prezenty, może oddać po jednym dzieciom stojącym obok. Czy możliwa jest sytuacja w której każde dziecko będzie trzymać po jednym prezencie?

Zawody indywidualne grupy starszej

1. Udowodnić, że każdą liczbę nie większą niż $n!$ można zapisać jako sumę co najwyżej n dzielników liczby $n!$.

2. Przekątne trapezu $ABCD$ o podstawach AB oraz CD przecinają się w punkcie E. Punkt P leży wewnątrz tego trapezu, przy czym

$$\sphericalangle APD = \sphericalangle BPC = 90^o$$

Wykazać, że punkty P i E leżą na prostej prostopadłej do podstaw danego trapezu.

3. Alicja i Bob grają w grę. Alicja siada przy okrągłym stole z n miejscami. Następnie Bob podaje jej ciąg $n-1$ liczb naturalnych. W każdej turze Alicja musi przesunąć się w prawo lub lewo o dokładnie tyle miejsc ile wynosi i-ta liczba w ciągu Boba. Dla jakich n Bob jest w stanie zmusić Alicję do odwiedzenia wszystkich miejsc?

4. W trójkącie ABC kąt $\sphericalangle ABC$ jest rozwarty. Punkt F leży na boku AC, przy czym $AF = BF$ oraz $\sphericalangle FBC = 90°$. Punkty D i E są odpowiednio środkami boków AB i BC. Prosta przechodząca przez punkt F i równoległa do AB przecina prostą DE w punkcie G. Dowieść, że $\sphericalangle GCB = \sphericalangle ACD$.

5. Dany jest najmniejszy zbiór X, który spełnia następujące własności:

1. $2 \in X$,
2. $n \in X$ wtedy i tylko wtedy gdy $n^2 \in X$,
3. $(n+5)^2 \in X$ wtedy i tylko wtedy gdy $n \in X$.

Wyznaczyć wszystkie liczby $n \in \mathbb{Z}^+$, które nie należą do X.

6. Rozstrzygnąć czy istnieje funkcja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ spełniająca nierówność

$$f(x)^2 \geqslant f(x+y)(f(x)+y)$$

dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich x, y.

7. Dane jest $n \geqslant 3$ czerwonych punktów w przestrzeni. Niektóre z nich są połączone zielonymi odcinkami, w sumie odcinków jest k.
Krzysztof i Iza grają w grę: Iza wybiera dwa punkty: startowy w którym umieszcza pionka i końcowy.

Następnie wykonują na zmianę ruchy zaczynając od Krzysztofa: najpierw Krzysztof porusza pionka po istniejącym odcinku, potem Iza usuwa jeden, dowolny odcinek. Gra kończy się gdy Krzysztof nie może już zrobić ruchu (wtedy wygrywa Iza) lub Krzysztof dojdzie pionkiem do punktu końcowego (wtedy wygrywa Krzysztof).
Dla danego n znajdź takie największe k, że Iza ma strategie wygrywającą, niezależnie od tego które z punktów są połączone odcinkami.

8. Pokazać, że każdą liczbę całkowitą dodatnią można zapisać jako różnicę dwóch liczb całkowitych dodatnich, które mają taką samą liczbę dzielników pierwszych.

9. Dany jest okrąg ω i prosta l rozłączna z tym okręgiem. Odcinek AB jest średnicą okręgu ω prostopadłą do l, gdzie B leży bliżej l niż A. Dowolny punkt $C \neq A, B$ jest wybrany na ω. Prosta AC przecina l w punkcie D. Prosta DE jest styczna do ω w punkcie E, gdzie B i E są po tej samej stronie prostej AC. Niech prosta BE przecina l w F a prosta AF przecina ω w $G \neq A$. Udowodnić, że odbicie G względem AB leży na prostej CF.

10. Udowodnić, że dla nieujemnych liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi nierówność

$$\sqrt{3x^2 + xy} + \sqrt{3y^2 + yz} + \sqrt{3z^2 + zx} \leqslant 2(x + y + z)$$

11. Na płaszczyźnie umieszczono sześć punktów w ten sposób, że każde trzy spośród nich są wierzchołkami trójkąta o bokach różnej długości. Udowodnić, że najkrótszy bok pewnego z tych trójkątów jest zarazem najdłuższym bokiem innego z nich.

12. Dane są liczby całkowite dodatnie n, d. Wykazać, że jeśli $d | 2^{2^n} + 1$ to $d = 2^{n+1} \cdot k + 1$, gdzie k jest pewną liczbą całkowitą dodatnią.

Zawody indywidualne elity

1. Dany jest półokrąg Ω o średnicy AB. Punkty C i D leżą na Ω i BC, odpowiednio tak, że AD jest dwusieczną kąta BAC. Symetralna odcinka AD przecina Ω w punkcie E. Okrąg o środku w punkcie E i promieniu EA przecina Ω w punkcie $X \neq A$. Pokazać, że w czworokąt $ABXC$ można wpisać okrąg.

2. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}$ takie, że $f(a) \geqslant f(b)$ dla wszystkich $a, b \in \mathbb{Z}^+$ takich, że $a \mid b$ oraz dla dowolnych $a, b \in \mathbb{Z}^+$ zachodzi równość

$$f(ab) + f(a^2 + b^2) = f(a) + f(b).$$

3. Niech $\mathcal{P}$ będzie skończonym zbiorem punktów na płaszczyźnie w którym odległość między dowolnymi dwoma punktami jest całkowita. Pokazać, że punkty w $\mathcal{P}$ można pokolorować na trzy kolory, tak aby odległość między dwoma jednokolorowymi punktami była parzysta.

4. Niech x, y i z będą liczbami rzeczywistymi dodatnimi takimi, że $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Pokazać, że

$$\frac{1+x^2}{z+2} + \frac{1+y^2}{x+2} + \frac{1+z^2}{y+2} \geqslant 2.$$

5. W trójkącie ABC punkty I i I_A są środkami okręgów: wpisanego ω i A-dopisanego ω_A. Okręgi te są styczne do BC odpowiednio w punktach D i P. Niech ω_1 i ω_2 będą obrazami okręgów wpisanych w trójkąty odpowiednio APC i APB względem środków boków AC i AB w tej kolejności. Pokazać, że AD jest osią potęgową ω_1 i ω_2.

6. Niech $p > 3$ oraz $p \equiv 3 \pmod 8$ będzie liczbą pierwszą. Pokazać, że istnieją liczby całkowite a, b, c takie, że

$$a^2 + bc = p \quad \text{oraz} \quad b < c < \sqrt{p}.$$

7. Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Punkt D leży na boku AB. Okrąg o środku w punkcie D i promieniu CD przecina CB i CA odpowiednio w punktach E i F. Niech M będzie środkiem odcinka CD. Pokazać, że

$$\sphericalangle AEC + \sphericalangle BFC = \sphericalangle EMF.$$

8. Dany jest zbiór $\mathcal{A}$ składający się z prostych na płaszczyźnie. Wiadomo, że dla dowolnego podzbioru $\mathcal{B}$ zbioru $\mathcal{A}$ zawierającego k^2+1 $(k \geqslant 3)$ prostych, istnieje k punktów takich, że dowolna prosta z $\mathcal{B}$ przechodzi przez co najmniej jeden z tych punktów. Pokazać, że możemy wybrać k punktów takich, że każda prosta $\mathcal{A}$ przechodzi przez co najmniej jeden z nich.

9. Dane są liczby całkowite dodatnie r, a, b oraz liczby całkowite $1 < x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_r$. Ponadto spełnione są nierówności

$$\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{x_i}\right) \leqslant \frac{a}{b} < \prod_{i=1}^{r-1}\left(1-\frac{1}{x_i}\right). \tag{1}$$

Pokazać, że

$$\prod_{i=1}^{r} x_i \leqslant \frac{(a+1)^{2^r}-(a+1)^{2^{r-1}}}{a}.$$

10. Niech $0 < a_1 < a_2 < a_3$ będą liczbami całkowitymi. Pokazać, że istnieją liczby całkowite x_1, x_2, x_3 takie, że $\sum_{i=1}^{3}|x_i| > 0$ oraz $\sum_{i=1}^{3} a_i x_i = 0$ a także

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant 3} |x_i| < \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a_3}+1.$$

11. W trójkącie ABC punkt P jest taki, że $AB+BP = AC+CP$. Proste BP i CP przecinają AC i AB w punktach E i F, odpowiednio. Okrąg opisany na trójkącie BPC przecina proste AB i AC ponownie w punktach Z i Y, odpowiednio. Pokazać, że istnieje okrąg styczny do czterech okręgów opisanych na trójkątach BPF, CPE, BEY, CFZ.

12. Ciąg $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ definiujemy następująco: $a_1 = 1,\ a_2 = 2$ oraz a_{n+1} jest najmniejszą liczbą, która dotychczas nie wystąpiła w ciągu i $\mathrm{nwd}(a_n, a_{n+1}) > 1$. Pokazać, że $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ jest permutacją liczb naturalnych.

Mecz matematyczny grupy młodszej

1. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych x i y, dla których zachodzi

$$x^2 + 615 = 2^y.$$

2. Na płaszczyźnie znajduje się 2018^{2018} punktów, przy czym żadne trzy nie są współliniowe. Każdy z tych punktów jest w jednym z trzech kolorów: czerwonym, zielonym lub niebieskim. Wiadomo jest, że każdy kolor występuje co najmniej raz. Pokazać, że istnieje trójkąt mający wierzchołki wśród tych punktów, gdzie każdy wierzchołek jest w innym kolorze i wewnątrz tego trójkąta nie ma innych punktów.

3. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $\measuredangle ACB = 45°$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, punkt H jest punktem przecięcia wysokości trójkąta ABC. Prosta przechodząca przez punkt O i prostopadła do prostej CO przecina proste AC i BC odpowiednio w punktach K i L. Pokazać, że obwód trójkąta KLH jest równy średnicy okręgu opisanego na trójkącie ABC.

4. Liczby całkowite dodatnie a, b i c spełniają warunek

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 6abc.$$

Pokazać, że liczba $a^3 + b^3 + c^3 + 1$ nie jest podzielna przez liczbę $a + b + c + 1$.

5. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których obie liczby $n^n + 1$ oraz $(2n)^{2n} + 1$ są liczbami pierwszymi.

6. Dana jest kwadratowa plansza o rozmiarze 2018×2018. Dwóch graczy wykonuje na przemian ruchy w postaci wyboru koloru czarnego lub białego i postawieniu pionka w tym kolorze na jakimś pustym polu. Grę wygrywa ten, po którego ruchu na planszy znajdzie się ciąg pięciu pionków w jednym kolorze (poziomo, pionowo lub na skos). Stwierdzić, czy gracz pierwszy ma strategię wygrywającą.

7. Niech $a, b \in \mathbb{Z}$ i niech $c < d$ będą takimi kolejnymi liczbami całkowitymi, że zachodzi równość $a - b = a^2c - b^2d$. Udowodnić, że $|a - b|$ jest kwadratem liczby całkowitej.

8. Dany jest trójkąt ABC. Niech O oznacza środek okręgu opisanego na tym trójkącie, a H oznacza punkt przecięcia się wysokości tego trójkąta. Punkt A leży po przeciwnej stronie prostej OH niż punkty B i C. Niech d_A, d_B, d_C oznaczają odległości odpowiednich wierzchołków trójkąta ABC od prostej OH. Pokazać, że $d_A = d_B + d_C$.

9. Dana jest plansza o rozmiarze 100×100. Ile maksymalnie $(3,1)$-skoczków można postawić na planszy tak, aby żadne dwa skoczki siebie nie atakowały? $(3,1)$*-skoczki atakują siebie jeżeli stoją na przeciwległych wierzchołkach prostokąta o rozmiarze* 2×4.

10. Udowodnij, że równanie

$$\left(2+\sqrt{5}\right)^m + \left(3+\sqrt{5}\right)^n = \left(4+\sqrt{5}\right)^k$$

nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych m, n, k.

11. Dany jest kąt ostry XOY. Wewnątrz tego kąta znajdują się punkty A i B, przy czym zachodzi $\measuredangle AOX = \measuredangle BOY$. Niech X_A, X_B oznaczają rzuty prostopadłe punktów A i B na prostą OX. Analogicznie, niech Y_A, Y_B oznaczają rzuty prostopadłe punktów A i B na prostą OY. Udowodnić, że proste AB, X_AY_B, X_BY_A przecinają się w jednym punkcie.

12. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych x i y spełniające równanie

$$2x^6 + y^7 = 11$$

Mecz matematyczny grupy średniej

1. Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste x spełniające równość:

$$\frac{8^x + 27^x}{12^x + 18^x} = \frac{7}{6}$$

2. Dana jest funkcja f, która dla każdej pary liczb rzeczywistych przyjmuje wartość rzeczywistą oraz dla dowolnych $x, y, z \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$f(x,y) + f(y,z) + f(z,x) = 0.$$

Udowodnić, że istnieje funkcja g określona na zbiorze liczb rzeczywistych i przyjmująca wartości rzeczywiste, taka że dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbb{R}$ spełniona jest równość:

$$f(a,b) = g(a) - g(b)$$

3. Wyznaczyć wszystkie wielomiany P o współczynnikach rzeczywistych, takie że dla dowolnej liczby rzeczywistej x spełniona jest równość

$$P(x^2) = P(x) \cdot P(x+2)$$

4. Dane są liczby całkowite x, y oraz liczby pierwsze p, q, R, które spełniają równość

$$x^R + R \cdot pq = y^R$$

Udowodnić, że przynajmniej jedna z liczb p, q jest równa R.

5. Udowodnić, że dowolną liczbę całkowitą da się zapisać jako sumę pięciu sześcianów liczb całkowitych.

6. Znaleźć wszystkie liczby całkowite dodatnie n dla których liczba

$$2^n + 777$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

7. Dana jest rodzina $\mathcal{F}$ podzbiorów zbioru $1, 2, 3, ..., n$ mająca więcej niż 2^{n-1} elementów. Pokazać, że istnieją dwa zbiory $A, B \in \mathcal{F}$ takie, że ich część wspólna jest zbiorem pustym.

8. Czy istnieje n postaci $2^k - 1$ dla pewnej liczby naturalnej k, że wartość jakiegokolwiek ze współczynników newtona $\binom{n}{i}$ dla $0 \leqslant i \leqslant n$ jest parzysta?

9. Alicja, Bartek i Cezary mieli do zrobienia n zadań. Po zrobieniu wszystkich zadań byli ciekaw jak bardzo kolejnośc ich robienia zadań się pokrywały. Pokaż, że dwójka z nich zrobiła $\sqrt[3]{n}$ zadań w tej samej kolejności.

10. Dany jest trójkąt ABC oraz punkty D, E, F, które leża odpowiednio na bokach BC, CA, AB. Proste AD, BE, CF przecinają sie w jednym punkcie. Udowodnić, że D jest środkiem BC wtedy i tylko wtedy gdy $FE||BC$.

11. Niech R oraz S będą różnymi punktami na okręgu ω przy czym odcinek RS nie jest średnicą ω. Prosta l jest styczna do ω w punkcie R. Niech T będzie takim punktem, że S jest środkiem odcinka RT. Punkt J wybrano na krótszym łuku okręgu ω w taki sposób, że okrąg opisany na trójkącie JST przecina prostą l w dwóch punktach. Niech A będzie punktem przecięcia okręgu opisanego na JST oraz prostej l, który leży bliżej punktu R. Prosta AJ przecina okrąg ω w punkcie K. Wykazać, że prosta KT jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie JST.

12. Dany jest trójkąt ABC. Niech H_A, H_B, H_C oznaczają spodki wysokości opuszczone z odpowiednich wierzchołków trójkąta. Punkt X leży na okręgu opisanym na trójkącie $H_AH_BH_C$. Punkty X_A, X_B, X_C to odbicia punktu X odpowiednio względem prostych BC, CA, AB. Pokazać, że proste H_AX_A, H_BX_B, H_CX_C są równoległe.

Mecz matematyczny grupy starszej

1. Znaleźć wszystkie wielomiany dwóch zmiennych $P(x,y)$ o współczynnikach rzeczywistych, takie, że

$$P(ab, c^2+1) + P(bc, a^2+1) + P(ca, b^2+1) = 0$$

2. Pokolorujmy każdą liczbę całkowitą dodatnią na czerwono lub na niebiesko. Udowodnić, że istnieje nieskończony ciąg liczb całkowitych dodatnich $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < \ldots$ taki, że nieskończony ciąg $a_1, \frac{a_1+a_2}{2}, a_2, \frac{a_2+a_3}{2}, a_3, \frac{a_3+a_4}{2}, \ldots$ jest ciągiem liczb całkowitych dodatnich pomalowanych na ten sam kolor.

3. Zdefiniujmy *funkcję q-batą* jako taką funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla każdych $x, y \in \mathbb{R}$ $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$ oraz dla każdego $z \in \mathbb{R}$ $f^{2018}(z)$ jest całkowite.
a) Czy istnieje taka funkcja q-bata f, że $f(x)$ jest całkowite tylko dla skończenie wielu x?
b) Czy istnieje taka funkcja q-bata f i rosnący ciąg liczb rzeczywistych $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ taki, że $f(x)$ jest całkowite wtedy i tylko wtedy, gdy $x = a_i$ dla jakiegoś i?

4. Niech p będzie liczbą pierwszą. Załóżmy, że istnieją takie różne dodatnie liczby całkowite u, v, że p jest średnią kwadratową u i v. Udowodnić, że $2p-u-v$ jest kwadratem lub dwukrotnością kwadratu.

5. Liczbę naturalną nazwiemy ładną jeżeli suma jej cyfr w zapisie dziesiętnym jest podzielna przez 2018 Rozstrzygnij czy:
a) istnieje taka liczba naturalna N, że wszystkie liczby N, $2N$,... $2018N$ są ładne.
b) istnieje taka liczba naturalna N, że wszystkie jej wielokrotności są ładne.

6. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka dodatnia liczba całkowita m, że

$$(m+1)^3 + (m+2)^3 + \cdots + (2m)^3$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

7. Krzysztof i Iza grają w grę na planszy 100x100 podzielonej na kwadraty jednostkowe. Najpierw Iza w każdym polu planszy zapisuje liczbę z zakresu 1 do 10000 w taki sposób, że każda liczba jest wpisana w dokładnie jedno pole. Potem Krzysztof wybiera pole ze skrajnie lewej kolumny i umieszcza na nim swój pion. Następnie wykonuje ruchy, poruszając pion na jedno z sąsiednich pól (sąsiadujące krawędzią lub wierzchołkiem). Gra kończy się gdy pion dotrze na pole w skrajnie prawej kolumnie. Dodatkowo za każde pole na którym stanie pionek Krzysztof musi zapłacić Izie tyle monet, jaka liczba była napisana na polu. Krzysztof chce zapłacić Izie jak najmniej, z kolei Iza chce tak wpisać liczby, żeby zarobić jak najwięcej. Ile monet zapłaci Krzysztof Izie, jeżeli oboje będą grali optymalnie?

8. Sejf Krzysztofa, w którym trzyma swój ciężko wywalczony brązowy medal, wymaga wprowadzenia 3-cyfrowego kodu, aby go odblokować. Iza chciałaby popodziwiać ten medal, ale Krzysztof poszedł na wykład, i nie powiedział kodu Izie. Jako że sejf się blokuje po wprowadzeniu niewłaściwego kodu, Iza nie może zgadywać kodu bezpośrednio. Jednakże Iza jest mądra, i zbudowała sondę, która może testować kombinacje cyfr bez wprowadzania ich do sejfu. Sonda od razu po przetestowaniu odpowiada *Ciepło*, jeżeli co najmniej jedna cyfra się zgadza, *Zimno* w przeciwnym wypadku. Przykładowo, jeżeli właściwym kodem jest 014, to odpowiedzi sondy na 099 i 014 są oba *Ciepło*, ale odpowiedzią na 140 jest *Zimno*. Jaka jest minimalna liczba m taka, że Iza może sobie zagwarantować, że po zastosowaniu sondy m razy będzie wiedzieć, jaki jest kod odblokowujący sejf?

9. Okręgi ω_1 i ω_2 przecinają się w punktach M i N. Prosta l jest styczna do okręgu ω_1 w punkcie A i do ω_2 w punkcie B, przy czym punkt M leży bliżej prostej l niż punkt N. Punkty C i D są odbiciami odpowiednio punktów A, B względem punktu M. Okrąg opisany na trójkącie DCM przecina okręgi ω_1 i ω_2 odpowiednio w punktach E i F, różnych od M. Wykazać, że promienie okręgów opisanych na trójkątach MEF i NEF są równe.

10. Punkt D jest dowolnym punktem na boku BC trójkąta ABC. Okręgi ω_1 i ω_2 przechodzą przez A i D, w taki sposób, że BA jest styczne do ω_1, a CA jest styczne do ω_2. Niech BX będzie drugą styczną z punktu B do ω_1, a CY drugą styczną z punktu C do ω_2 ($X \in \omega_1$ i $Y \in \omega_2$). Udowodnić, że okrąg opisany na trójkącie XDY jest styczny do BC.

11. W czworokącie wypukłym $ABCD$ półproste BA i CD przecinają się w punkcie P, a półproste BC i AD przecinają się w punkcie Q. Punkt H jest rzutem punktu D na prostą PQ. Udowodnić, że w czworokąt $ABCD$ da się wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy gdy okręgi wpisane w trójkąty ADP i CDQ widać pod tym samym kątem z punktu H.

Rozwiązania

Zawody indywidualne grupy młodszej

1. Na boku AC trójkąta ABC wybrano punkt E, a na odcinku BE - punkt D. Wiadomo, że $CE = CD = BE$, $BD = AE$. Wykazać, że $\sphericalangle B > 60°$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że $\measuredangle CDE = \measuredangle DEC$, a zatem $\measuredangle BDC = \measuredangle AEB$. Zatem trójkąty CDB i AEB są przystające, czyli $CB = AB$. Wobec tego $AB = BC$. Ponieważ $\measuredangle ABC > \measuredangle EBC = \measuredangle ACB = \measuredangle BAC$, więc $\measuredangle BAC < \measuredangle ABC$, czyli $\measuredangle ABC$ jest największym kątem w trójkącie równoramiennym.

2. Dana jest liczba naturalna $k > 1$. Suma pewnego dzielnika liczby k i pewnego dzielnika liczby $k-1$ jest równa a, przy czym $a > k+1$. Wykazać, że przynajmniej jedna z liczb $a-1$ i $a+1$ jest złożona.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że każdy dzielnik liczby naturalnej jest równy tej liczbie lub nie przekracza jej połowy. Ponieważ $a > k+1$, jeden z dzielników musi być równy k lub $k-1$.
Rozważmy przypadek, gdy dzielnikiem liczby k jest liczba k. Weźmy dzielnik d liczby $k-1$. Wówczas $d > 1$ i liczba $a-1 = k-1+d$ jest podzielna przez d.
Gdy dzielnikiem liczby $k-1$ jest liczba $k-1$ i $d > 1$ jest dzielnikiem k, to $a+1 = k-1+1+d$ jest podzielna przez d, czyli jest liczba złożoną.

3. Dodatnie liczby x, y, z spełniają warunek:

$$xy + yz + zx + 2xyz = 1.$$

Wykazać, że $4x + y + z \geqslant 2$.

Rozwiązanie:

Chcemy wykazać, że

$$16x^2 + y^2 + z^2 + 8xy + 8xz + 2yz = (4x + y + z)^2 \geqslant 4.$$

Wykorzystując nierówność $y^2 + z^2 \geqslant 2yz$ otrzymujemy:

$$16x^2 + y^2 + z^2 + 8xy + 8xz + 2yz \geqslant 16x^2 + 8xy + 8xz + 4yz =$$

$$= 16x^2 + 4(xy + xz + yz + 2xyz) + 4xy + 4xz - 8xyz = 16x^2 + 4 + 4xy + 4xz - 8xyz.$$

Wystarczy wykazać, że

$$16x^2 + 4xy + 4xz \geqslant 8xyz,$$

czyli

$$4x + y + z \geqslant 2yz.$$

Ponieważ $yz = 1 - xy - xz - 2xyz$, czyli $yz < 1$. Zatem

$$4x + y + z \geqslant y + z \geqslant 2\sqrt{yz} > 2yz.$$

4. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Przekątne czworokąta przecinają się w punkcie K. Okrąg przechodzący przez punkty A, B, K przecina odcinek BC w punkcie M, zaś odcinek AD w punkcie N. Wykaż, że $KM = KN$.

Rozwiązanie:

Kąty wpisane DAC i DBC są równe, gdyż są oparte na tym samym łuku. Zatem kąty DAK i KBC są równe.
Punkty N i M leżą wewnątrz okręgu opisanego na $ABCD$, więc kąty NAK i MBK są równe, czyli łuki NK i MK są równe. A to oznacza równość cięciw NK i MK.

5. Dane są takie liczby naturalne dodatnie a i b, że $p = 8a + 19b$ jest liczbą pierwszą. Wykaż, że liczba $n = ab - 7a - 18b + 1$ nie jest podzielna przez p.

Rozwiązanie:

Jeżeli liczba $n + p$ dzieli się przez p, to liczba:

$$n + p = (ab - 7a - 18b + 1) + (8a + 19b) = (a + 1)(b + 1)$$

jest także podzielna przez p. Zatem jedna z liczb $a + 1$ i $b + 1$ jest podzielna przez p i jest nie mniejsza niż p. W każdym z tych przypadków liczba $8a + 19b$ jest większa od p.

6. Przedstaw liczbę

$$\frac{(1^4+4)\cdot(5^4+4)\cdot(9^4+4)\cdot\ldots\cdot(69^4+4)\cdot(73^4+4)}{(3^4+4)\cdot(7^4+4)\cdot(11^4+4)\cdot\ldots\cdot(71^4+4)\cdot(75^4+4)}$$

w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

Rozwiązanie:

Z tożsamości Sophie Germain, $(n^4 + 4) = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$. Zauważmy, że $(n+2)^2 - 2(n+2) + 2 = n^2 + 4n + 4 - 2n - 4 + 2 = n^2 + 2n + 2$, zatem mamy iloczyn teleskopowy. Zapiszmy

$$\frac{1^2 - 2 + 2}{3^2 + 2 \cdot 3 + 2} \cdot \frac{5^2 - 2 \cdot 5 + 2}{7^2 + 2 \cdot 7 + 2} \cdots \frac{73^2 - 2 \cdot 73 + 2}{75^2 + 2 \cdot 75 + 2},$$

i otrzymujemy $\frac{1^2-2+2}{75^2+2\cdot 75+2} = \frac{1}{5777}$.

7. W grupie A jest 25 osób, w grupie B 29 osób, a w grupie C 33 osoby. Gdy spotkają się dwie osoby z różnych grup, natychmiast obie przepisują się do trzeciej grupy. Czy możliwe jest dojście do sytuacji, że wszystkie osoby znajdą się w tej samej grupie?

Rozwiązanie:

Rozważmy różnicę między liczbą osób w grupach B i A. Różnica ta wynosi początkowo 4. Jeśli spotkają się osoby z grup A i B, różnica się nie zmieni. Jeśli spotkają się osoby z grup A i C, różnica wzrośnie o 3. Jeśli spotkają się osoby z grup B i C, różnica zmaleje o 3. Za każdym razem różnica między liczebnością grup B i A będzie liczbą, która z dzielenia przez 3 daje resztę 1. Tymczasem gdyby wszystkie osoby były na koniec w grupie A, różnica wyniosłaby -87, gdyby wszystkie osoby były w grupie B, różnica wynosiłaby 87, a gdyby wszyscy byli w grupie C, różnica wynosiłaby 0. Każda z tych liczb jest jednak podzielna przez 3, więc niemożliwe jest osiągnięcie takiej sytuacji.

8. Udowodnij, że jeżeli wielomian $f(x) = x^6 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ ma wszystkie pierwiastki rzeczywiste, to $a = b = c = d = 0$.

Rozwiązanie:

Z założeń wynika, że $\exists x_1, x_2, x_3, ..., x_6 \in R$, pierwiastki wielomianu $f(x)$. Na mocy wzorów Viete'a prawdziwe są równości:

$$\sum_{i=1}^{6} x_i = 0 \quad i \sum_{1 \leqslant i < j < \leqslant 6} x_i x_j = 0$$

z równości:

$$\sum_{i=1}^{6} (x_i)^2 = \sum_{i=1}^{6} x_i - \sum_{1 \leqslant i < j < \leqslant 6} x_i x_j = 0$$

otrzymujemy $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_6 = 0$. co z kolei implikuje tezę: $a = b = c = d = 0$

9.Dla jakich wartości α istnieje niestała funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniająca warunek $f(\alpha(x + y)) = f(x) + f(y)$ dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y?

Rozwiązanie:

Jeżeli $\alpha = 1$, to istnieje taka funkcja $f(x) = x$.
Jeżeli $\alpha \neq 1$, to istnieje takie y, że $y = \alpha(x+y)$. Wówczas $y = \frac{\alpha x}{1-\alpha}$. Zatem z podanego równania otrzymujemy $f(y) = f(x) + f(y)$, czyli $f(x) \equiv 0$.

10. Wysokości AH_1 i BH_2 trójkąta ostrokątnego ABC przecinają się w punkcie H. Punkty X i Y są odpowiednio środkami odcinków AB i CH. Wykazać, że proste XY i H_1H_2 są prostopadłe.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że punkt X jest środkiem okręgu opisanego na czworokącie ABH_1H_2, zaś punkt Y jest środkiem okręgu opisanego na czworokącie HH_1CH_2 (istnienie okręgów wynika z kątów prostych przy wierzchołkach H_1 i H_2). Zatem $XH_1 = XH_2$ oraz $YH_1 = YH_2$ (promienie okręgów), czyli czworokąt XH_1YH_2 jest deltoidem. Proste XY i H_1H_2 jako proste wyznaczone przez przekątne deltoidu są prostopadłe.

11. Udowodnij, że jeżeli jeden z pierwiastków równania $ax^3 + bx + c = 0$ o współczynnikach wymiernych jest iloczynem dwóch pozostałych pierwiastków, to jest on liczbą wymierną.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy, że pierwiastkami równania są liczby x_1, x_2, x_3 z założeń możemy przyjąć, że $x_3 = x_1x_2$. Na mocy wzorów Viete'a prawdziwe są równości:

[(1)] $\quad x_1 + x_2 + x_1x_2 = 0. \qquad x_1x_2 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2 = \frac{b}{a} \qquad x_1^2x_2^2 = -\frac{c}{a}$

Z równości (1) i (2) wynika równość:

$$x_1x_2 - x_1^2x_2^2 = \frac{b}{a}$$

natomiast z równości (3) i (4) wynika równość:

$$x_1x_2 = \frac{b}{a} - \frac{c}{a} = \frac{b-c}{a}$$

Z założenia $a \neq 0, b, c$- liczby wymierne co implikuje tezę.

12. Udowodnić, że

$$1 < \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d} < 2$$

gdzie a, b, c, d są dowolnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi.

Rozwiązanie:

Dodajemy stronami cztery nierówności:

$$\frac{a}{a+b+c+d} < \frac{a}{a+b+d} < \frac{a}{a+b}$$

i otrzymujemy oszacowanie dolne i górne. Aby udowodnić, że każda liczba z przedziału $(1;2)$ może być wartością sumy należy podstawić za a, b, c, d odpowiednio $1, x, 1-x, (1-x)x$. Dostaniemy funkcję ciągłą na przedziale od 0 do 1, której wartości na końcach tego przedziału wynosi $s(0) = 2$ i $s(1) = 1$. *Odpowiedź:* $(1;2)$.

3. Zawody indywidualne grupy średniej

1. Czy w dowolnym grafie na n wierzchołkach i e krawędziach istnieje podgraf dwudzielny zawierający co najmniej $\frac{e}{2}$ krawędzi?

Rozwiązanie:

Odpowiedź jest twierdząca. Posłużmy się indukcją matematyczną. Dla grafu o dwóch wierzchołkach teza jest spełniona. Teraz rozważmy dodanie nowego wierzchołka. Skorzystajmy z podziału grafu o n wierzchołkach, a nasz nowy wrzućmy do tego zbioru, że z przeciwnym ma więcej sąsiadów. Z założenia indukcyjnego wiemy, że nasz podgraf posiada co najmniej połowę krawędzi mniejszego grafu, a z konstrukcji co najmniej połowę krawędzi pomiędzy dodanym wierzchołkiem, a resztą grafu, co sumarycznie daje połowę krawędzi całego grafu. Na mocy indukcji matematycznej teza jest spełniona.

2. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC taki, że $AB = AC$. Punkt M jest środkiem odcinka BC. Punkt N jest środkiem odcinka AM. Niech P będzie rzutem punktu M na prostą CN. Wykazać, że $\sphericalangle BPA = 90^o$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$\sphericalangle PCM = 90^\circ - \sphericalangle PMC = \sphericalangle NMP$$

Z tego otrzymujemy, że trójkąty CMP i MPN są podobne. Zatem

$$\frac{CP}{MC} = \frac{PM}{MN}$$

Zatem

$$\frac{CP}{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{CP}{MC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{PM}{MN} = \frac{PM}{AM}$$

Łącząc tę równość z warunkiem $\sphericalangle PCB = \sphericalangle PMA$ dostajemy, że trójkąty CPB i MPA są podobne, więc

$$\sphericalangle CBP = \sphericalangle MAP,$$

czyli na czworokącie $BAPM$ da się opisać okrąg. Czyli

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle AMB = 90^\circ.$$

3. Udowodnić, że każdą liczbę nie większą niż $n!$ można zapisać jako sumę co najwyżej n dzielników liczby $n!$.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny po n.

I dla $n = 1$ trywialne.

II dla n niech k będzie dowolną liczbą naturalną nie większą niż $n!$. Przedstawmy $k = an + b$, $a \leqslant (n-1)!$ więc z indukcji a da się rozłożyć na sumę $n-1$ dzielników $(n-1)!$. Mnożąc każdy z tych dzielników przez n otrzymamy $n-1$ dzielników $n!$ sumujących się do an. Dodając do tego b, będące dzielnikiem $n!$, bo $b < n$, otrzymujemy tezę.

4. W każdy wierzchołek ośmiościanu foremnego wpisano liczbę 0 lub 1 lub 2. Następnie na każdej ścianie napisano sumę liczb z wierzchołków, które wyznaczają tę ścianę. Pokazać, że na pewnych dwóch ścianach napisano tę samą liczbę.

Rozwiązanie:

Każda ściana ośmiościanu foremnego jest trójkątem. Zatem maksymalna liczba napisana na ścianie wynosi 6. Minimalna wynosi 0. Zatem mamy 7 możliwych liczb na ścianach oraz 8 ścian zatem na mocy zasady szufladkowej Dirichleta, pewne dwie ściany mają taką samą liczbę.

5. Niech $Q_0(x) = 1$, $Q_1(x) = x$ oraz

$$Q_n(x) = \frac{Q_{n-1}^2(x) - 1}{Q_{n-2}(x)}$$

Wykazać, że jeśli n jest liczbą całkowitą, to $Q_n(x)$ jest wielomianem o współczynnikach całkowitych.

Rozwiązanie:

Udowodnimy indukcyjnie, że $Q_n(x) = xQ_{n-1} - Q_{n-2}$, co w szczególności da nam tezę. Dla małych n widzimy, że teza jest spełniona.

Chcemy więc wykazać, że

$$Q_{n+1}(x) = xQ_n(x) - Q_{n-1}$$

Będziemy teraz przekształcać tezę równoważnie.

$$\frac{Q_n^2(x) - 1}{Q_{n-1}(x)} = xQ_n(x) - Q_{n-1}$$

$$Q_n^2(x) - 1 = xQ_n(x)Q_{n-1}(x) - Q_{n-1}^2(x)$$

$$Q_{n-1}^2(x) - 1 = xQ_n(x)Q_{n-1}(x) - Q_n^2(x)$$

$$Q_{n-2}(x)Q_n(x) = xQ_n(x)Q_{n-1}(x) - Q_n^2(x)$$

$$Q_{n-2}(x) = xQ_{n-1}(x) - Q_n(x)$$
$$Q_n(x) = xQ_{n-1}(x) - Q_{n-2}(x)$$

Przekształcając równoważnie otrzymaliśmy równość, która jest prawdziwa na mocy założenia indukcyjnego, więc wyjściowa równość też była prawdziwa, co kończy dowód.

6. W trójkącie ABC kąt $\sphericalangle ABC$ jest rozwarty. Punkt F leży na boku AC, przy czym $AF = BF$ oraz $\sphericalangle FBC = 90°$. Punkty D i E są odpowiednio środkami boków AB i BC. Prosta przechodząca przez punkt F i równoległa do AB przecina prostą DE w punkcie G. Dowieść, że

$$\sphericalangle GCB = \sphericalangle ACD.$$

Rozwiązanie:

Skoro $AF = BF$ to prosta DF jest prostopadła do AB. Czyli proste AB i FG są równoległe. Ponadto prosta DE jest równoległa do AC. Dostajemy więc:

$$\sphericalangle BDG = \sphericalangle BAF = \sphericalangle ABF = \sphericalangle BFG$$

Czyli na czworokącie $BDFG$ da się opisać okrąg. Zatem $\sphericalangle DBG = 90°$, czyli $\sphericalangle DBF = \sphericalangle EBG$. Jednak $\sphericalangle DBF = \sphericalangle BAF = \sphericalangle BDE$. Dostajemy więc, że trójkąty BGE i DBE mają równe miary odpowiadających kątów, więc są podobne. Czyli

$$\frac{BE}{BG} = \frac{DE}{DB}$$

Jednak z twierdzenia Talesa mamy

$$\frac{DE}{DB} = \frac{AC}{AB}$$

czyli

$$\frac{AC}{AD} = 2 \cdot \frac{AC}{AB} = 2 \cdot \frac{BE}{BG} = \frac{BC}{BG}$$

Łącząc ten stosunek z równością kątów $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBG$ dostajemy, że trójkąty ADC i GBC są podobne, a stąd $\sphericalangle GCB = \sphericalangle ACD$.

7. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. P jest punktem przecięcia przekątnych tego czworokąta. Wykazać, że:

$$\sqrt{P_{ABCD}} \geqslant \sqrt{P_{APB}} + \sqrt{P_{CPD}}$$

gdzie P_X oznacza pole figury X.

Rozwiązanie:

Podnieśmy nierówność obustronnie do kwadratu. Otrzymamy:

$$P_{ABCD} \geqslant P_{APB} + P_{CPD} + 2\sqrt{P_{APB} \cdot P_{CPD}}$$

oraz jak wiadomo: $P_{ABCD} = P_{APB} + P_{BPC} + P_{CPD} + P_{APD}$, więc równoważnie:

$$P_{BPC} + P_{APD} \geqslant 2\sqrt{P_{APB} \cdot P_{CPD}}$$

Zauważmy, że

$$\frac{P_{APB}}{P_{BPC}} = \frac{AP}{PC} = \frac{P_{APD}}{P_{CPD}}$$

więc $2\sqrt{P_{APB} \cdot P_{CPD}} = 2\sqrt{P_{BPC} \cdot P_{APD}}$ więc nierówność sprowadza się do następującej nierówności

$$P_{BPC} + P_{APD} \geqslant 2\sqrt{P_{BPC} \cdot P_{APD}}$$

która jest oczywista. Wszystkie przekształcenia były równoważne, więc teza jest udowodniona.

8. Czy istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, dla której liczbę 2^n można przedstawić w postaci sumy co najmniej dwóch kolejnych dodatnich liczb całkowitych? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie:

Taka liczba n nie istnieje. Przypuśćmy, że istnieje, więc:

$$2^n = a+(a+1)+...+(a+r) = \frac{(a+r+1)(a+r)}{2} - \frac{(a-1)a}{2} = \frac{2ar+2a+r^2+r}{2}$$

Czyli

$$2^{n+1} = (r+1)(r+2a)$$

Zauważmy, że oba składniki nie mogą być potęgą dwójki, bo mają różną parzystość, oraz $r+1>1$ oraz $r+2a>1$, więc sprzeczność. Czyli taka liczba n faktycznie nie istnieje.

9. Dane jest $n \geqslant 3$ czerwonych punktów w przestrzeni. Niektóre z nich są połączone zielonymi odcinkami, w sumie odcinków jest k.

Krzysztof i Iza grają w grę: Iza wybiera dwa punkty: startowy w którym umieszcza pionka i końcowy.

Następnie wykonują na zmianę ruchy zaczynając od Krzysztofa: najpierw Krzysztof porusza pionka po istniejącym odcinku, potem Iza usuwa jeden, dowolny odcinek. Gra kończy się gdy Krzysztof nie może już zrobić ruchu (wtedy wygrywa Iza) lub Krzysztof dojdzie pionkiem do punktu końcowego (wtedy wygrywa Krzysztof).

Dla danego n znajdź takie największe k, że Iza ma strategie wygrywającą, niezależnie od tego które z punktów są połączone odcinkami.

Rozwiązanie:

Zinterpretujmy to zadanie grafowo. Dla $k = \frac{n(n-1)}{2}$ Krzysztof zawsze wygrywa, gdyż G jest grafem pełnym, więc już w pierwszym ruchu zakończy grę wygraną. Dla $k \neq \frac{n(n-1)}{2}$ Iza zawsze wygra. Wystarczy, aby wybrała na początkowy (P) i końcowy (K) wierzchołki które nie są połączone krawędzią. Następnie, w każdym ruch, po tym jak Krzysztof poruszy pionek na wierzchołek v Iza usuwa krawędź $\{v,K\}$, jeżeli ona istnieje, lub usuwa dowolną inną krawędź z grafu. Krzysztof w żadnym ruchu nie może przesunąć piona z pola na którym się znajduje (v) na pole K ponieważ albo krawędzi $\{v,K\}$ nigdy nie było, albo została właśnie przed chwilą usunięta przez Izę. Z drugiej strony po k ruchach w grafie nie będzie już żadnej krawędzi, więc Krzysztof do tego momentu na pewno przegra.

10. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich m, n spełniających równanie

$$10^m = n^2 + 1$$

Rozwiązanie:

Dla $m > 1$ lewa strona równania jest podzielna przez 4 a prawa nie, bo 3 nie jest resztą kwadratową modulo 4. Więc $m = 1$, co daje $n = 3$ i jest to jedyne rozwiązanie.

11. Dana jest liczba całkowita dodatnia n. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste dodatnie x, które spełniają równanie:

$$(n-1) \cdot x^n + 1 = n \cdot x^{n-1}$$

Rozwiązanie:

Przekształcając równoważnie mamy do rozwiązania równanie:

$$\frac{(n-1) \cdot x + \frac{1}{x^{n-1}}}{n} = 1$$

Ponadto na mocy nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną mamy:

$$\frac{(n-1) \cdot x + \frac{1}{x^{n-1}}}{n} \geqslant \sqrt[n]{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x \cdot \frac{1}{x^{n-1}}} = \sqrt[n]{1} = 1$$

Przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $x = \frac{1}{x^{n-1}}$ co daje $x^n = 1$, co w liczbach rzeczywistych dodatnich ma tylko jedno rozwiązanie: $x = 1$. Podstawiając do równania wyjściowego, widzimy że $x = 1$ spełnia warunki zadania.

12. 2018 dzieci stoi w kółku. Na początku jedno z dzieci trzyma 2018 prezentów mikołajkowych. Gdy dziecko trzyma co najmniej 2 prezenty, może oddać po jednym dzieciom stojącym obok. Czy możliwa jest sytuacja w której każde dziecko będzie trzymać po jednym prezencie?

Rozwiązanie:

Ponumerujmy miejsca i pokolorujmy parzyste na czarno, a nieparzyste na biało. Zauważmy teraz, że nasza operacja nie zmienia parzystości ilości prezentów na danym kolorze. Na początku startujemy z sytuacji, gdzie na obu kolorach znajduje się ich parzyście wiele, natomiast sytuacja której dotyczy treść zadania wymaga by było w grupach po nieparzyści wiele. Pokazuje to, że taka sytuacja jest niemożliwa do uzyskania.

Zawody indywidualne grupy starszej

1. Udowodnić, że każdą liczbę nie większą niż $n!$ można zapisać jako sumę co najwyżej n dzielników liczby $n!$.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny po n.

I dla $n = 1$ trywialne.

II dla n niech k będzie dowolną liczbą naturalną nie większą niż $n!$. Przedstawmy $k = an + b$, $a \leqslant (n-1)!$ więc z indukcji a da się rozłożyć na sumę $n-1$ dzielników $(n-1)!$. Mnożąc każdy z tych dzielników przez n otrzymamy $n-1$ dzielników $n!$ sumujących się do an. Dodając do tego b, będące dzielnikiem $n!$, bo $b < n$, otrzymujemy tezę.

2. Przekątne trapezu $ABCD$ o podstawach AB oraz CD przecinają się w punkcie E. Punkt P leży wewnątrz tego trapezu, przy czym

$$\sphericalangle APD = \sphericalangle BPC = 90^o$$

Wykazać, że punkty P i E leżą na prostej prostopadłej do podstaw danego trapezu.

Rozwiązanie:

Niech X i Y będą rzutami punktów D i C odpowiednio na przekątne AC i BD. Wtedy

$$\sphericalangle YCE = 90^\circ - \sphericalangle CEY = 90^\circ - \sphericalangle DEX = \sphericalangle EDX,$$

czyli na czworokącie $DCYX$ da się opisać okrąg. Zatem

$$\frac{EX}{EY} = \frac{ED}{EC} = \frac{EB}{EA},$$

gdzie ostatnia równość wynika z twierdzenia Talesa. Otrzymujemy więc

$$EX \cdot EA = EY \cdot EB,$$

czyli punkt E leży na osi potęgowej okręgów opisanych na trójkątach DXA i CYB. Ponadto punkt P leży na obu tych okręgach, więc też leży na osi potęgowej tych okręgów. Zatem prosta PE jest prostopadła do prostej łączącej środki wspomnianych okręgów, a środkami tych okręgów są środki boków AD i BC. Jednak prosta łącząca te środki jest oczywiście równoległa do AB, a stąd EP jest prostopadła do AB.

3. Alicja i Bob grają w grę. Alicja siada przy okrągłym stole z n miejscami. Następnie Bob podaje jej ciąg $n-1$ liczb naturalnych. W każdej turze Alicja musi przesunąć się w prawo lub lewo o dokładnie tyle miejsc ile wynosi i-ta liczba w ciągu Boba. Dla jakich n Bob jest w stanie zmusić Alicję do odwiedzenia wszystkich miejsc?

Rozwiązanie:

Pokażemy, że są to jedynie n postaci 2^k dla pewnego k. Najpierw zauważmy, że dla takich n mamy strategię wygrywającą. Dla 1 i 2 jest to prawda. Teraz jeżeli X było ciągiem liczb dla 2^k to $2X, 1, 2X$ jest ciągiem dla 2^{k+1}, gdzie $2X$ oznacza przemnożenie każdego elementu ciągu X o 2. Teraz sprawdzimy, że dla innych n nie jest to możliwe. Rozważmy ostatni ruch Alicji. Skoro wybrała jedyne nieodwiedzone miejsce, to oznacza, że nie miała wyboru. Wynika z tego, że niezależnie od tego czy poszłaby w prawo czy w lewo trafiłaby na to samo miejsce. Zatem n musi być parzyste. Analogicznie rozpatrzmy przedostatni ruch. Możemy zauważyć, że musiała mieć ona wybór jedynie między dwoma polami, zatem znajdowała się na środku łuku pomiędzy nimi. Skoro z poprzedniej analizy wynikało, że te pola są dokładnie po przeciwnych stronach stołu, teraz mamy, że jej pozycja musiała być oddalona o ćwierć okręgu od obu. Czyli n jest podzielne przez 4. Rozpatrując analogiczną metodą kolejne ruchy dochodzimy do wniosku, że w każdym n musi być podzielne przez kolejną potęge 2 dopóki nie zejdziemy do stanu początkowego. Zatem n jest postaci 2^k.

4.W trójkącie ABC kąt $\sphericalangle ABC$ jest rozwarty. Punkt F leży na boku AC, przy czym $AF = BF$ oraz $\sphericalangle FBC = 90°$. Punkty D i E są odpowiednio środkami boków AB i BC. Prosta przechodząca przez punkt F i równoległa do AB przecina prostą DE w punkcie G. Dowieść, że $\sphericalangle GCB = \sphericalangle ACD$.

Rozwiązanie:

Skoro $AF = BF$ to prosta DF jest prostopadła do AB. Czyli proste AB i FG są równoległe. Ponadto prosta DE jest równoległa do AC. Dostajemy więc:

$$\sphericalangle BDG = \sphericalangle BAF = \sphericalangle ABF = \sphericalangle BFG$$

Czyli na czworokącie $BDFG$ da się opisać okrąg. Zatem $\sphericalangle DBG = 90°$, czyli $\sphericalangle DBF = \sphericalangle EBG$. Jednak $\sphericalangle DBF = \sphericalangle BAF = \sphericalangle BDE$. Dostajemy więc, że trójkąty BGE i DBE mają równe miary odpowiadających kątów, więc są podobne. Czyli

$$\frac{BE}{BG} = \frac{DE}{DB}$$

Jednak z twierdzenia Talesa mamy

$$\frac{DE}{DB} = \frac{AC}{AB}$$

czyli

$$\frac{AC}{AD} = 2 \cdot \frac{AC}{AB} = 2 \cdot \frac{BE}{BG} = \frac{BC}{BG}$$

Łącząc ten stosunek z równością kątów $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBG$ dostajemy, że trójkąty ADC i GBC są podobne, a stąd $\sphericalangle GCB = \sphericalangle ACD$.

5. Dany jest najmniejszy zbiór X, który spełnia następujące własności:

1. $2 \in X$,
2. $n \in X$ wtedy i tylko wtedy gdy $n^2 \in X$,
3. $(n+5)^2 \in X$ wtedy i tylko wtedy gdy $n \in X$.

Wyznaczyć wszystkie liczby $n \in \mathbb{Z}^+$, które nie należą do X.

Rozwiązanie:

Z warunków zadania wynika, że $n \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n+5 \in X$. Udowodnimy, że liczby $5l$ dla $l \in \mathbb{Z}^+$ są jedynymi liczbami, które nie należą do X. Skoro $n+5 \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n \in X$, więc wystarczy pokazać, że $1, 2, 3, 4 \in X$. Z warunków zadania $2 \in X$ oraz skoro $2 \in X$, to $2^2 = 4 \in X$. Zatem $4 + 5 = 9 = 3^2 \in X$, więc $3 \in X$.

Z warunków zadania skoro $4 \in X$, więc $16 \in X$, więc $11 \in X$, więc $6 \in X$, więc $1 \in X$. Wystarczy wykazać, że liczby $5l$ nie należą do X. Zauważmy jednak, że w wyniku operacji aby otrzymać liczbę podzielną przez 5 trzeba mieć już jakąś inną podzielną przez 5. Z minimalności X wynika więc, że te liczby nie należą do X, co kończy dowód.

6. Rozstrzygnąć czy istnieje funkcja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ spełniająca nierówność

$$f(x)^2 \geqslant f(x+y)(f(x)+y)$$

dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich x, y.

Rozwiązanie:

Pokażemy, że taka funkcja nie istnieje. Będziemy dążyć do pokazania, że $f(y) < 0$ dla pewnego $y > 0$. Wystarczy pokazać, że $f(x) - f(x+1) \geqslant c > 0$ dla każdego x. Implikuje to, że dla każdego m $f(x) - f(x+m) \geqslant$, co prowadzi do wniosku, że $f(x+m) < 0$. Załóżmy, więc że taka funkcja istnieje i zauważmy, że spełnia ona nierówność

$$f(x) - f(x+y) \geqslant \frac{f(x+y)y}{f(x)}$$

oraz jest malejąca. Inna nierównością spełnioną przez naszą funkcję jest

$$f(x) - f(x+y) \geqslant \frac{f(x+y)y}{f(x)}$$

Rozpatrzmy teraz liczbę naturalną n taką, że $f(x+1)n \geqslant 1$. Teraz dla każdego $0 \leqslant k \leqslant n-1$ prawdziwa jest nierówność

$$f(x+\frac{k}{n}) - f(x+\frac{k+1}{n}) \geqslant \frac{f(x+\frac{k}{n})\frac{1}{n}}{f(x+\frac{k}{n})+\frac{1}{n}} \geqslant \frac{1}{2n}$$

, co po zsumowaniu po wszystkich k daje $f(x) - f(x+1) \geqslant \frac{1}{2}$, czyli oczekiwaną przez nas własność.

7. Dane jest $n \geqslant 3$ czerwonych punktów w przestrzeni. Niektóre z nich są połączone zielonymi odcinkami, w sumie odcinków jest k.
Krzysztof i Iza grają w grę: Iza wybiera dwa punkty: startowy w którym umieszcza pionka i końcowy.
Następnie wykonują na zmianę ruchy zaczynając od Krzysztofa: najpierw Krzysztof porusza pionka po istniejącym odcinku, potem Iza usuwa jeden, dowolny odcinek. Gra kończy się gdy Krzysztof nie może już zrobić ruchu (wtedy wygrywa Iza) lub Krzysztof dojdzie pionkiem do punktu końcowego (wtedy wygrywa Krzysztof).
Dla danego n znajdź takie największe k, że Iza ma strategie wygrywającą, niezależnie od tego które z punktów są połączone odcinkami.

Rozwiązanie:

Zinterpretujmy to zadanie grafowo. Dla $k = \frac{n(n-1)}{2}$ Krzysztof zawsze wygrywa, gdyż G jest grafem pełnym, więc już w pierwszym ruchu zakończy grę wygraną. Dla $k \neq \frac{n(n-1)}{2}$ Iza zawsze wygra. Wystarczy, aby wybrała na początkowy (P) i końcowy (K) wierzchołki które nie są połączone krawędzią. Następnie, w każdym ruch, po tym jak Krzysztof poruszy pionek na wierzchołek v Iza usuwa krawędź $\{v,K\}$, jeżeli ona istnieje, lub usuwa dowolną inną krawędź z grafu. Krzysztof w żadnym ruchu nie może przesunąć piona z pola na którym się znajduje (v) na pole K ponieważ albo krawędzi $\{v,K\}$ nigdy nie było, albo została właśnie przed chwilą usunięta przez Izę. Z drugiej strony po k ruchach w grafie nie będzie już żadnej krawędzi, więc Krzysztof do tego momentu na pewno przegra.

8. Pokazać, że każdą liczbę całkowitą dodatnią można zapisać jako różnicę dwóch liczb całkowitych dodatnich, które mają taką samą liczbę dzielników pierwszych.

Rozwiązanie:

Rozpatrzmy dwa przypadki. Załóżmy, że n - nasza liczba jest parzysta. Wówczas $2n - n = n$, i skoro $2|n$ to n oraz $2n$ mają tyle samo dzielników pierwszych (są to dokładnie te same dzielniki). Przypuśćmy więc, że n jest nieparzyste. Niech p będzie najmniejszą liczbą pierwszą, która nie dzieli n większą od 2. Wówczas: $pn-(p-1)n = n$. Niech $L(x)$ to liczba dzielników pierwszych x. Zatem skoro p nie dzieli n to $L(np) = L(n)+1$. Zapiszmy $p-1 = 2^r \cdot m$. Skoro $m < p$ to dowolny dzielnik pierwszy m dzieli też n, co wynika z definicji p, zatem, skoro n jest nieparzyste, dostajemy, żę $L(2^r \cdot m \cdot n) = L(n)+1 = L(np)$ co kończy dowód.

9. Dany jest okrąg ω i prosta l rozłączna z tym okręgiem. Odcinek AB jest średnicą okręgu ω prostopadłą do l, gdzie B leży bliżej l niż A. Dowolny punkt $C \neq A, B$ jest wybrany na ω. Prosta AC przecina l w punkcie D. Prosta DE jest styczna do ω w punkcie E, gdzie B i E są po tej samej stronie prostej AC. Niech prosta BE przecina l w F a prosta AF przecina ω w $G \neq A$. Udowodnić, że odbicie G względem AB leży na prostej CF.

Rozwiązanie:

Niech G' będzie odbiciem G względem AB. Oczywiście $G' \in \omega$. Niech H będzie przecięciem AE z prostą l. Wtedy jako, że $\sphericalangle AEB = 90°$ oraz prosta AB jest prostopadła do l to B jest ortocentrum trójkąta AHF. Łącząc to jeszcze z twierdzeniem o kącie między styczną a sieczną dostajemy

$$\sphericalangle DHE = 90° - \sphericalangle BAE = \sphericalangle ABE = \sphericalangle DEH,$$

co w połączeniu z tym, że trójkąt FEH jest prostokątny daje nam to, że D jest środkiem odcinka FH. Czyli

$$DC \cdot DA = DE^2 = DF^2,$$

czyli

$$\sphericalangle FAD = \sphericalangle CFD$$

Jednak $\sphericalangle FAD = \sphericalangle GG'C$, co w połączeniu z tym, że $GG' \parallel FD$ daje nam współliniowość punktów F, C i G'.

10. Udowodnić, że dla nieujemnych liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi nierówność

$$\sqrt{3x^2+xy} + \sqrt{3y^2+yz} + \sqrt{3z^2+zx} \leqslant 2(x+y+z)$$

Rozwiązanie:

na mocy nierówności Cauchy'ego-Schwarz'a

$$\sum \sqrt{x(3x+y)} \leqslant \sqrt{(\sum x)(\sum(3x+y))} = \sqrt{4(x+y+z)^2} = 2(x+y+z).$$

11. Na płaszczyźnie umieszczono sześć punktów w ten sposób, że każde trzy spośród nich są wierzchołkami trójkąta o bokach różnej długości. Udowodnić, że najkrótszy bok pewnego z tych trójkątów jest zarazem najdłuższym bokiem innego z nich. *Rozwiązanie:*

Pomalujmy na niebiesko te odcinki, które są w pewnym trójkącie odcinkiem najkrótszym. Pozostałe pomalujmy na czerwono. Aby udowodnić tezę wystarczy udowodnić, że istnieje trójkąt o wszystkich bokach niebieskich.

Lemat: Danych jest sześć punktów na płaszczyźnie oraz każdy odcinek łączący je jest niebieski lub czerwony. Wówczas istnieje trójkąt jednokolorowy.

Dowód lematu: Weźmy dowolny punkt A. Do innych punktów wychodzi z niego 5 odcinków. Zatem z Zasady Szufladkowej Dirichleta pewne trzy odcinki są tego samego koloru. Bez straty ogólności niech bedzie to kolor niebieski. Punkty do których wychodzą niebieskie odcinki oznaczmy przez B, C, D. Jeśli BC jest niebieski to ABC spełnia warunki lematu. Przypuśćmy więc, że jest czerwony. Analogicznie BD, CD są odcinkami czerwonymi. Zatem trójkąt BCD spełnia warunki lematu.

Na mocy lematu istnieje więc trójkąt jednokolorowy. Przypuśćmy, że jest to trójkąt czerwony. Jednakże z warunków zadania boki tego trójkąta mają parami różne długości. Czyli musi istnieć najkrótszy bok. Zatem pewien odcinek tego trójkąta ma bok niebieski, sprzeczność. A zatem nie może istnieć trójkąt czerwony. W połączeniu z lematem, istnieje więc trójkąt niebieski. Posiada on oczywiście najdłuższy bok, co dowodzi tezy zadania.

12. Dane są liczby całkowite dodatnie n, d. Wykazać, że jeśli $d|2^{2^n}+1$ to $d = 2^{n+1} \cdot k + 1$, gdzie k jest pewną liczbą całkowitą dodatnią.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że jeśli wykażemy, że dowolny dzielnik pierwszy jest postaci $2^{n+1} \cdot k + 1$ to dowolny dzielnik złożony, jako iloczyn dzielników liczb postaci $2^{n+1} \cdot k + 1$ także będzie tej postaci. Weźmy więc dowolny dzielnik pierwszy p. Niech d oznacza rząd 2 modulo p. Wówczas zachodzi:

$$2^{2^n} \equiv -1$$

$$2^{2^{n+1}} \equiv (-1)^2 \equiv 1$$

Wszystko modulo p. A zatem $d|2^{n+1}$ oraz d nie jest dzielnikiem 2^n. Jedyna liczba, która nie dzieli 2^n a dzieli kolejną potęge dwójki, to 2^{n+1}. Więc $d = 2^{n+1}$. Ponadto na mocy małego Twierdzenia Fermata (p nie może być równe 2, bo liczba z zadania jest nieparzysta) mamy: $d = 2^{n+1}|p-1$. A zatem p jest postaci $2^{n+1} \cdot k + 1$. Z dowolności p wynika teza zadania.

Zawody indywidualne elity

1. Dany jest półokrąg Ω o średnicy AB. Punkty C i D leżą na Ω i BC, odpowiednio tak, że AD jest dwusieczną kąta BAC. Symetralna odcinka AD przecina Ω w punkcie E. Okrąg o środku w punkcie E i promieniu EA przecina Ω w punkcie $X \neq A$. Pokazać, że w czworokąt $ABXC$ można wpisać okrąg.

Rozwiązanie:

Niech M będzie środkiem AD a N środkiem łuku BAC półokręgu Ω. Niech ponadto EM przecina CA w S, a EB przecina AD w J oraz AX przecina EC w P.

Ponieważ $CDMS$ jest cykliczny, to

$$\sphericalangle MDS = \sphericalangle MCA = \sphericalangle MAC = \sphericalangle MAB \Longrightarrow DS \parallel AB.$$

Ponadto $(MS \parallel NA) \perp AD$ i $MD \parallel NB$, gdyż $\sphericalangle NBA = \sphericalangle MCA = \sphericalangle MAB$. Wobec tego trójkąty MSD i NAB są jednokładne a środkiem tej jednokładności jest punkt A. Zatem punkty C, M, N są współliniowe, stąd

$$\sphericalangle CMJ = \sphericalangle CNB = \sphericalangle CEJ,$$

więc czworokąt $CEMJ$ jest cykliczny. Oznacza to, że $\sphericalangle ECJ = \sphericalangle EMJ = 90°$, skąd $JC \perp PE$.

Ponieważ $\sphericalangle ECA = \sphericalangle EAX$ (E jest środkiem łuku ACX), to AE jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie PAC, więc $A^2 = EC \cdot EP$. Wobec tego JC jest biegunową punktu P względem okręgu o środku w punkcie E i promieniu EA. W szczególności $C(J, A, X, P) = -1$. Łącząc to z $CJ \perp PE$, widzimy, że CJ jest dwusieczną kąta $\sphericalangle ACX$. Jako, że AJ i BJ są dwusiecznymi kątów odpowiednio BAC i ABX widzimy, że J jest środkiem okręgu wpisanego w $ABXC$.

2. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}$ takie, że $f(a) \geqslant f(b)$ dla wszystkich $a, b \in \mathbb{Z}^+$ takich, że $a \mid b$ oraz dla dowolnych $a, b \in \mathbb{Z}^+$ zachodzi równość

$$f(ab) + f(a^2 + b^2) = f(a) + f(b).$$

Rozwiązanie:

Ponieważ 1 dzieli każdą liczbę widzimy, że $f(1) \geqslant f(x)$ dla dowolnego x. Niech $k = f(1)$. Pokażemy, że

$$f(n) = f\left(\prod_{p \mid n} p\right).$$

Istotnie, biorąc dwie liczby naturalne$a, m, b = am$mamy

$$f(a^2m) + f(a^2(m^2+1)) = f(a) + f(am),$$

więc $f(a) \geqslant f(a^2(m^2+1))$ i $f(am) \geqslant f(a^2m)$, więc $f(am) = f(a^2m)$ co oczywiście łatwo implikuje nasz wzór.

Teraz pokażemy, że $f(n)$ nie zależy od dzielników pierwszych n które przystają do 1,2, modulo 4. Istotnie, $f(n) = f(n(x^2+1))$, więc w szczególności $f(n) = f(2n)$, więc dwójki w zapisie dziesiętnym n nie są istotne. Jeśli $p \equiv 1 \pmod 4$ i $p \mid x^2+1$, to

$$f(n) \geqslant f(np) \geqslant f(n(x^2+1)) = f(n),$$

skąd $f(np) = f(n)$.

Wobec tego

$$f(n) = f\left(\prod_{p|n, p\in P_3} p\right),$$

gdzie P_3 jest zbiorem liczb pierwszych postaci $4k+3$. Dla elementów $p_1, p_2, \ldots z P_3$ definiujemy

$$g(A) = f(\prod_{a\in A} p_a).$$

Oczywiście $g(\emptyset) = k$ i$S_1 \subset S_2$ implikuje, że $g(S_1) \geqslant g(S_2)$. Ponadto łatwo zauważyć, że

$$g(S_1) + g(S_2) = g(S_1 \cup S_2) + g(S_1 \cap S_2).$$

Jeśli $g(\{n\}) = k_n$ dla liczb $k_n \leqslant k$, to indukcyjnie dostajemy, że

$$g(A) = \sum_{a\in A} k_a - (\#A - 1)k.$$

W druga stronę, dla dowolnego doboru liczb k_n, związane g daje rozwiązanie f naszego równania.

3. Niech $\mathcal{P}$ będzie skończonym zbiorem punktów na płaszczyźnie w którym odległość między dowolnymi dwoma punktami jest całkowita. Pokazać, że punkty w $\mathcal{P}$ można pokolorować na trzy kolory, tak aby odległość między dwoma jednokolorowymi punktami była parzysta.

Rozwiązanie:

Rozpatrzmy graf G, którego wierzchołki są punktami ze zbioru $\mathcal{P}$. Dwa wierzchołki $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ są połączone wtedy i tylko wtedy, gdy odległość między nimi jest nieparzysta. Chcemy pokazać, że ten graf jest 3-kolorowalny.

Na początku zauważmy, że $\mathcal{G}$ nie zawiera K_4 jako podgrafu. Do tego wystarczy pokazać, że nie istnieją cztery punkty na płaszczyźnie, że odległości między dowolnymi dwoma z nich są nieparzystymi liczbami całkowitymi. Aby uzyskać jakąś zależność między bokami wykorzystamy następujący wzór na objętość czworościanu

$$V = \frac{1}{12}\sqrt{\sum_1 a^2b^2c^2 - \sum_2 a^2b^2c^2 - \sum_3 a^4b^2},$$

gdzie $\sum_1$ jest sumowaniem po 12 możliwościach, gdy a, b, c tworzą ścieżkę otwartą długości 3. Podobnie $\sum_2$ jest sumowanie po 4 przypadkach, gdy a, b, c są krawędziami ściany a $\sum_3$ jest sumowaniem po 6 możliwościach, gdzie a, b są krawędziami leżącymi na przeciwko siebie. Ponieważ rozważamy 4 punkty współpłaszczyznowe, więc

$$\sum_1 a^2b^2c^2 - \sum_2 a^2b^2c^2 - \sum_3 a^4b^2 = 0. \tag{2}$$

Jeśli teraz wszystkie długości boków są nieparzyste, to lewa strona przystaje do $2 \pmod 4$ – sprzeczność.

Przypuśćmy, że istnieje trójkąt w $\mathcal{P}$, tzn. trzy punkty $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{P}$, że ich wzajemne odległości są nieparzyste. Pokolorujmy te punkty na kolory $1, 2, 3$, odpowiednio. Rozpatrzmy dowolny punkt $Q \in \mathcal{P}$ różny od P_i. Wszystkie odległości Q od P_i nie mogą być nieparzyste, gdyż pokazaliśmy to wyżej. Nie jest również możliwe by one wszystkie były parzyste. Istotnie, wtedy lewa strona 2 jest nieparzysta.

Nie jest również możliwe aby tylko dwie z tych odległości były parzyste. W przeciwnym wypadku lewa strona 2 jest również nieparzysta. Wobec tego dwie z tych odległości są nieparzyste a jedna, powiedzmy QP_i jest nieparzysta. Pokolorujmy wtedy punkt Q kolorem i. Postępujemy tak z każdym punktem $\mathcal{P}$ różnym od P_i. Łatwo zauważyć, że takie kolorowanie spełnia warunki zadania, gdyż w przeciwnym razie dostalibyśmy podgraf K4.

Rozpatrzmy teraz przypadek w którym nie ma trójkąta.
Pokażemy, że nie ma nieparzystego cyklu w grafie $\mathcal{G}$. Przypuśćmy, że istnieje i oznaczmy go przez $P_1, P_2, \ldots, P_{2n+1}$. Punkty P_1 i P_4 są, gdyż w przeciwnym razie lewa strona 2 jest nieparzysta. Podobnie, $P_1P_6, P_1P_8, \ldots, P_1P_{2n}$ tworzą krawędź $\mathcal{G}$, ale wtedy $P_1P_{2n}P_{2n+1}$ jest trójkątem – sprzeczność.

Wobec tego $\mathcal{G}$ jest dwudzielny i można go pokolorować na dwa kolory.

4. Niech x, y i z będą liczbami rzeczywistymi dodatnimi takimi, że $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Pokazać, że

$$\frac{1+x^2}{z+2} + \frac{1+y^2}{x+2} + \frac{1+z^2}{y+2} \geqslant 2.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że na podstawie nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną mamy

$$\frac{1+x^2}{z+2}+\frac{1}{9}(1+x^2)(z+2)\geqslant 2\sqrt{\frac{1+x^2}{z+2}\cdot\frac{1}{9}(1+x^2)(z+2)}=\frac{2}{3}(1+x^2),$$

więc

$$\frac{1+x^2}{z+2}\geqslant\frac{4}{9}(1+x^2)-\frac{1}{9}z(1+x^2).$$

Podobnie

$$\frac{1+y^2}{x+2}\geqslant\frac{4}{9}(1+y^2)-\frac{1}{9}x(1+y^2)$$

oraz

$$\frac{1+z^2}{y+2}\geqslant\frac{4}{9}(1+z^2)-\frac{1}{9}y(1+z^2).$$

Dodając powyższe trzy nierówności stronami i korzystając z założenia $x^2+y^2+z^2=3$ mamy

$$\begin{aligned}&\frac{1+x^2}{z+2}+\frac{1+y^2}{x+2}+\frac{1+z^2}{y+2}\geqslant\\&\geqslant\frac{8}{3}-\frac{1}{9}\left(\frac{1+x^2}{2}(1+y^2)+\frac{1+y^2}{2}(1+z^2)+\frac{1+z^2}{2}(1+x^2)\right)=\\&=\frac{8}{3}-\frac{1}{18}(3+2(x^2+y^2+z^2)+(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)).\end{aligned}$$

Korzystając z nierówności

$$3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\leqslant(x^2+y^2+z^2)^2$$

dostajemy, że

$$\frac{1+x^2}{z+2}+\frac{1+y^2}{x+2}+\frac{1+z^2}{y+2}\geqslant\frac{8}{3}-\frac{1}{18}\left(2+2(x^2+y^2+z^2)+\frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2)^2\right)=2.$$

5. W trójkącie ABC punkty I i I_A są środkami okręgów: wpisanego ω i A-dopisanego ω_A. Okręgi te są styczne do BC odpowiednio w punktach D i P. Niech ω_1 i ω_2 będą obrazami okręgów wpisanych w trójkąty odpowiednio APC i APB względem środków boków AC i AB w tej kolejności. Pokazać, że AD jest osią potęgową ω_1 i ω_2.

Rozwiązanie:

Niech I_1, I_2 będą środkami okręgów wpisanych o_1, o_2 w trójkąty APC i APB a J_1, J_2 ich obrazami względem środków AC i AB. Ponadto niech X, Y będą punktami styczności o_1, o_2 z bokami AC, AB odpowiednio i niech U, V będą punktami styczności ω_1, ω_2 z bokami AC, AB.

Wtedy

$$AU = CX = \tfrac{1}{2}(CA + CP - AP) = \tfrac{1}{2}(s - AP)$$

i podobnie

$$AV = \tfrac{1}{2}(s - AP),$$

więc $AU = AV$, skąd A leży na osi potęgowej o_1, o_2. Dzięki symetrii względem środka AC, styczna poprowadzona z punktu A do o_1 (różna AC) jest równoległa do BC. Podobnie styczna z A o_2 (różna od AB) jest równoległa do BC, więc prosta równoległa do BC przechodząca przez A jest wspólną styczną zewnętrzną okręgów o_1 i o_2 (niech będzie ona styczna do nich w punktach M, N, odpowiednio).

Niech $S = UM \cap VN$. Ponieważ $AM = AU = AV = AN$, to $MUVN$ jest cykliczny, skąd

$$SU \cdot SM = SV \cdot SN,$$

więc S ma równe potęgi względem o_1 i o_2. Zatem AS jest osią potęgową o_1 i o_2.

Jeśli ω jest styczny do CA, AB w punktach E, F, to oczywiście $UM \parallel DE$, $VN \parallel DF$ oraz $UV \parallel EF$. Wobec tego trójkąty DEF i SUV są jednokładne a środkiem tej jednokładności jest punkt A. Oznacza to, że A, S, D leżą na jednej prostej, więc AD jest osią potęgową o_1 i o_2.

6. Niech $p > 3$ oraz $p \equiv 3 \pmod 8$ będzie liczbą pierwszą. Pokazać, że istnieją liczby całkowite a, b, c takie, że

$$a^2 + bc = p \quad \text{oraz} \quad b < c < \sqrt{p}.$$

Rozwiązanie:

Zadanie pochodzi z pracy Prof. M. Skałby "Note on an analogue of Fermat's two squares theorem for primes $p \equiv 3 \pmod 8$".

Wykorzystamy następujący lemat (łatwy do pokazania)

- Dla dowolnej liczby pierwszej p i liczby całkowite r nie podzielnej przez p istnieją niezerowe liczby całkowite x, y takie, że

$$x \equiv ry \pmod p \ \text{ oraz } \ |x| < \sqrt{p},\ |y| < \sqrt{p}.$$

- Dla liczb całkowitych dodatnich $a, b, c, d < \sqrt{p}$, gdzie p jest liczbą pierwszą kongruencja $ad \equiv bc \pmod p$ implikuje, że $ad = bc$, natomiast kongruencja $ad + bc \equiv 0 \pmod p$ implikuje, że $ad + bc = p$.

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zdefiniujmy

$$\mathcal{S} := \{(a,d,b,c) \in \mathbb{Z}_+^4 \mid ad+bc=n \text{ oraz } a,d,b,c < \sqrt{n}\}.$$

Niech $s(n) = \#\mathcal{S}(n)$.

Dla liczby pierwszej p definiujemy również

$$X_p := \{(a,b) \in \mathbb{Z}_+^2 \mid \operatorname{nwd}(a,b)=1 \text{ oraz } a,b < \sqrt{p}\}.$$

Zdefiniujmy odwzorowanie

$$f_p \colon X_p \to \mathbb{F}_p^*$$

wzorem

$$f_p((a,b)) := \frac{a \pmod p}{b \mod p}.$$

Z lematu f_p jest injekcją. Ponadto z lematu Thuego

$$\mathbb{F}_p^* = f_p(X_p) \cup (-f_p(X_p)).$$

Jeśli teraz $a,b,c,d \in \mathbb{Z}_+$ są takie, że $\operatorname{nwd}(a,b) = \operatorname{nwd}(c,d) = 1$ to ponownie z lematu wiemy, że $f_p((a,b)) = -f_p((c,d))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(a,d,b,c) \in \mathcal{S}(p)$.

Ponieważ

$$\#f_p(X_p) \cap (-f_p(X_p)) = 2\#X_p - \#\mathbb{F}_p^*.$$

Zatem

$$s(p) = 4\sum_{m \leqslant \sqrt{p}} \phi(m) - 1 - p.$$

Czwórka $(a,d,b,c) \in \mathcal{S}(p)$ występuję w czwórkach

$$(a,d,b,c),(d,a,b,c),(a,d,c,b),(d,a,c,b),(b,c,a,d),(c,b,a,d),(b,c,d,a),(c,b,d,a).$$

Czwórki (a,a,b,b) i (b,b,a,a) nie mogą wystąpić, gdyż $p \equiv 3 \pmod 4$.

Natomiast najbardziej interesujących nas czwórek (specjalnych) jest cztery:

$$(a,a,b,c),(a,a,c,b),(b,c,a,a),(c,b,a,a).$$

Zauważmy jednak, że $s(p) \equiv 4 \pmod 8$, gdy $p \equiv 3 \pmod 8$, więc w naszym zbiorze istnieją specjalne czwórki.

7. Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Punkt D leży na boku AB. Okrąg o środku w punkcie D i promieniu CD przecina CB i CA odpowiednio w punktach E i F. Niech M będzie środkiem odcinka CD. Pokazać, że

$$\sphericalangle AEC + \sphericalangle BFC = \sphericalangle EMF.$$

Rozwiązanie:

Niech U, V będą środkami odcinków CA, CB. Ponieważ $\sphericalangle ECF = 60^\circ$, to obraz X środka okręgu opisanego D na trójkącie CEF w symetrii względem prostej EF jest środkiem łuku EF tegoż okręgu.

Ponadto trójkąt XDF jest równoboczny i $\sphericalangle DAF = 120^\circ$, więc $XDAF$ jest cykliczny, skąd $\sphericalangle DAX = \sphericalangle DFX = 60^\circ$. Mamy też, że $\sphericalangle DBX = 60^\circ$ więc trójkąt XAB jest równoboczny. Zatem $AC = AB = XB$, $CD = XD = XE$ a ponieważ

$$\sphericalangle CDA = 60^\circ + \sphericalangle BCD = 60^\circ + 90^\circ - \sphericalangle CFE =$$

$$= 150^\circ - \sphericalangle CFE = 30^\circ + \sphericalangle CEF = \sphericalangle XEB,$$

więc $\triangle CAD \cong \triangle XBE$ skąd $BE = AD = 2 \cdot MU$.

Łącząc to z zależnościami $BA = 2 \cdot UA$ i $\sphericalangle ABE = \sphericalangle AUM = 120^\circ$ widzimy, że $\triangle ABE \sim \triangle AUM$ są spiranie podobne, więc $\sphericalangle AEC = \sphericalangle AMU$. Podobnie $\triangle AEM \sim \triangle ABU$ są spiralnie podobne, więc $\sphericalangle AME = \sphericalangle AUB = 90^\circ$. Analogicznie $\sphericalangle BFC = \sphericalangle BMV$ i $\sphericalangle BMF = 90^\circ$. Wobec tego

$$\sphericalangle EMF = 180^\circ - \sphericalangle AMB = \sphericalangle AMU + \sphericalangle BMV = \sphericalangle AEC + \sphericalangle BFC.$$

8. Dany jest zbiór $\mathcal{A}$ składający się z prostych na płaszczyźnie. Wiadomo, że dla dowolnego podzbioru $\mathcal{B}$ zbioru $\mathcal{A}$ zawierającego k^2+1 ($k \geqslant 3$) prostych, istnieje k punktów takich, że dowolna prosta z $\mathcal{B}$ przechodzi przez co najmniej jeden z tych punktów. Pokazać, że możemy wybrać k punktów takich, że każda prosta $\mathcal{A}$ przechodzi przez co najmniej jeden z nich.

Rozwiązanie:

Dla zbioru prostych X powiemy że X przechodzi przez k punktów, jeśli istnieje k punktów różnych na płaszczyźnie takich, że każda prosta z X przechodzi przez co najmniej jeden z tych punktów. Powiemy też, że zdanie $S(n, k)$ jest prawdziwe, jeśli z faktu iż każde n prostych w X przechodzi przez k punktów wynika, że wszystkie proste z X przechodzą przez k punktów. Chcemy pokazać, że $S(n, k)$ zachodzi dla $n = k^2 + 1$ i $k \geqslant 3$.

Pokażemy przez indukcję względem k że

$$S(3,1) \Rightarrow S(6,2) \Rightarrow \ldots \Rightarrow S(k^2+1, k).$$

Zdanie $S(3,1)$ jest jasne. Załóżmy więc, że $S((k-1)^2+1, k-1)$ jest prawdziwe dla $k \geqslant 4$ i A jest zbiorem prostych takim, że dowolne k^2+1 z nich przechodzą przez k punktów. Rozważmy te k^2+1 prostych i k punktów. Jeden z tych punktów nazwijmy go P, należy do co najmniej $k+1$ prostych. Niech M będzie zbiorem wszystkich prostych z A przechodzących przez P i niech

A' będzie zbiorem prostych z A które nie są w M. Pokażemy, że dowolnych $(k-1)^2+1$ prostych z A' przechodzą przez $k-1$ punktów.

Istotnie, dla dowolnego zbioru $(k-1)^2+1$ prostych w A' dodajemy co najwyżej $2k-1$ prostych z M, i jeśli to konieczne kilka prostych z A', aby otrzymać łącznie k^2+1 prostych. Z założenia indukcyjnego tych k^2+1 prostych przechodzi przez k punktów. Niech N będzie zbiorem tych punktów. Pokażemy, że $P \in N$. Otóż, istnieje co najmniej $k+1$ prostych w M przechodzących przez P, więc gdyby $P \notin N$, to te proste przechodzą przez co najmniej $k+1$ punktów, a założyliśmy, że k punktów jest wystarczających.

Wobec tego $P \in N$. Usuwając P, dostajemy $k-1$ punktów leżących na prostych z A' nieprzechodzących przez P. W szczególności leżą zatem na $(k-1)^2+1$ prostych z A', które na początku rozważaliśmy. Na podstawie założenia indukcyjnego $S((k-1)^2+1, k-1)$ jest prawdą, więc wszystkie proste z A' przechodzą przez $k-1$ punktów. Jednakże oznacza to, że wszystkie proste z A przechodzą przez $k-1$ punktów i punkt P, więc łącznie przez k punktów. To kończy rozumowanie indukcyjne.

Wystarczy jedynie sprawdzić pierwsze dwa kroki indukcji, co jest łatwe.

9. Dane są liczby całkowite dodatnie r, a, b oraz liczby całkowite $1 < x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_r$. Ponadto spełnione są nierówności

$$\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{x_i}\right) \leqslant \frac{a}{b} < \prod_{i=1}^{r-1}\left(1-\frac{1}{x_i}\right). \tag{3}$$

Pokazać, że

$$\prod_{i=1}^{r} x_i \leqslant \frac{(a+1)^{2^r}-(a+1)^{2^{r-1}}}{a}.$$

Rozwiązanie:

Wykorzystamy (nietrudny do pokazania) lemat Jeśli $1 < x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ oraz $1 < y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_n$ są liczbami rzeczywistymi, że

$$\prod_{i=1}^{m} x_i \leqslant \prod_{i=1}^{m} y_i$$

dla dowolnej liczby naturalnej $1 \leqslant m \leqslant n$. Wtedy

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{x_i}\right) \leqslant \prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{y_i}\right).$$

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x_i = n_i$.

Wykorzystamy indukcję na $r \geqslant 1$. Wtedy $a < b$. Jeśli $r = 1$, to $x_1 \leqslant \frac{b}{b-a}$, która jest zmaksymalizowana dla $b = a+1$. Więc $ax_1 \leqslant a(a+1) = (a+1)^{2^1} - (a+1)^{2^0}$.

Załóżmy, że $r \geqslant 2$ i teza zachodzi dla liczb mniejszych od r. Ustalając a możemy założyć, że b jest takie, że $\prod x_i$ jest maksymalizowany i warunki zadania są spełnione. Połóżmy $n_i := (a+1)^{2^{i-1}}+1$ dla $i < r$ i $n_r := (a+1)^{2^{r-1}}$. Wtedy $1 < n_1 < n_2 < \ldots < n_r$ i

$$\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{n_i}\right) = \frac{a}{a+1} < \prod_{i=1}^{r-1}\left(1-\frac{1}{n_i}\right).$$

Wobec tego z założenia o maksymalności produktu wiemy, że

$$\prod_{i=1}^{r} n_i \leqslant \prod_{i=1}^{r} x_i. \tag{4}$$

Jeśli $ax_1 < an_1 = (a+1)^2 - 1$, to mnożąc 3 przez $\frac{x_1}{x_1-1}$ dostajemy

$$\prod_{i=2}^{r}\left(1-\frac{1}{x_i}\right) \leqslant \frac{ax_1}{b(x_1-1)} < \prod_{i=2}^{r-1}\left(1-\frac{1}{x_i}\right).$$

Wobec tego z założenia indukcyjnego

$$ax_1\prod_{i=2}^{r} x_i \leqslant (ax_1+1)^{2^{r-1}} - (ax_1+1)^{2^{r-2}} < (a+1)^{2^r} - (a+1)^{2^{r-1}}.$$

Możemy więc założyć, że $n_1 \leqslant x_1$.

Jeśli $ax_1x_2 < an_1n_2 = (a+1)^4-1$, to mnożąc 3 przez $\frac{x_1x_2}{(x_1-1)(x_2-1)}$ podobnie jak wyżej dostajemy żądaną nierówność. Wobec tego załóżmy, że $n_1n_2 \leqslant x_1x_2$. Postępując tak dalej możemy założyć, że $\prod_{i=1}^{m} n_i \leqslant \prod_{i=1}^{m} x_i$ dla $1 \leqslant m < r$. Jednakże na mocy 4 podobna nierówność zachodzi też dla $r = m$.

Wykorzystując powyższy lemat mamy, że

$$\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{x_i}\right) \geqslant \prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{n_i}\right) = \frac{a}{a+1}.$$

Jako, że 3 zachodzi dla jakiegoś b więc $b = a+1$. Używając ponownie lematu mamy, że $x_i = n_i$ i wtedy

$$a\prod_{i=1}^{r} n_i = (a+1)^{2^r} - (a+1)^{2^{r-1}}.$$

10. Niech $0 < a_1 < a_2 < a_3$ będą liczbami całkowitymi. Pokazać, że istnieją liczby całkowite x_1, x_2, x_3 takie, że $\sum_{i=1}^{3} |x_i| > 0$ oraz $\sum_{i=1}^{3} a_i x_i = 0$ a także

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant 3} |x_i| < \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{a_3} + 1.$$

Rozwiązanie:

Niech $a = \sqrt{\frac{a_3}{3}}$. Dla dowolnej liczby całkowitej m rozpatrzmy sześciokąt

$$\mathcal{H}(m) = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}^2,\ -m-1 \leqslant x \leqslant m,\ -m-1 \leqslant y \leqslant m,\ -m-1 \leqslant x+y \leqslant m\}.$$

Niech $f(m)$ oznacza liczbę punktów kratowych (również na brzegu) $\mathcal{H}(m)$. Zauważmy, że $f(m) = 3(m+1)^2$ oraz $f(m)$ jest funkcją niemalejącą. Wobec tego dla dowolnego m mamy $f(m) \geqslant 3(\lfloor m \rfloor + 1)^2 > 3m^2$. W szczególności $f(a) > a_3$.

Niech teraz $\mathcal{H} = \mathcal{H}(a)$. Dla dowolnego $(x, y) \in \mathcal{H}$, połóżmy

$$V(x, y) := a_1 x + a_2 y \pmod{a_3}.$$

Na podstawie zasady szufladkowej Dirichleta istnieją $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \in \mathcal{H}$ że $V(x_1, y_1) = V(x_2, y_2)$. Zatem istnieje liczba całkowita x_3 że

$$a_1(x_1 - x_2) + a_2(y_1 - y_2) + a_3 x_3 = 0.$$

Łatwo zauważyć, że $|x_1 - x_2| \leqslant 2n + 1$ i $|y_1 - y_2| \leqslant 2n + 1$. Zatem

$$a_3|x_3| = |a_1(x_1 - x_2) + a_2(y_1 - y_2)| < |a_2 n + a_2(n+1)| = (2n+1)a_2,$$

więc $|x_3| < 2n + 1$.

Weźmy teraz $u = x_1 - x_2$, $v = y_1 - y_2$, $w = x_3$ i zauważmy, że (u, v, w) spełniają warunki zadania.

11. W trójkącie ABC punkt P jest taki, że $AB + BP = AC + CP$. Proste BP i CP przecinają AC i AB w punktach E i F, odpowiednio. Okrąg opisany na trójkącie BPC przecina proste AB i AC ponownie w punktach Z i Y, odpowiednio. Pokazać, że istnieje okrąg styczny do czterech okręgów opisanych na trójkątach BPF, CPE, BEY, CFZ.

Rozwiązanie:

Pokażemy, że istnieje okrąg styczny do czterech wymienionych okręgów a jego środkiem jest środek O okręgu opisanego na trójkącie PBC.

Ponieważ $AB+BP = AC+CP$ to istnieje okrąg o środku w punkcie I styczny do AB, AC oraz do półprostych $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$. Niech EI przecina łuki PC, BY okręgów opisanych na trójkątach EPC, EBY w ich środkach U, T. Podobnie

FI przecina łuki PB, CZ okręgów opisanych na trójkątach FPB, FCZ w ich środkach V, R.

Niech M, N będą środkami okręgów wpisanych w trójkąty PEC i PFB. Ponieważ I jest środkiem okręgu E-dopisanego i środkiem okręgu F-dopisanego do trójkątów odpowiednio PEC i PFB, to U, V są środkami IM oraz IN. Wobec tego $UV \parallel MN$, więc

$$\sphericalangle OUV = \sphericalangle(OU, MN) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\sphericalangle EPC = \sphericalangle(MN, OV) = \sphericalangle OVU.$$

A zatem $OU = OV$.

Ponadto

$$\sphericalangle UTO = 90^\circ - \sphericalangle(BY, EM) = 90^\circ - \sphericalangle(EM, PC) = \sphericalangle OUT,$$

skąd $OT = OU$. Podobnie $OR = OV$. Zatem $OU = OV = OR = OT$ czyli okrąg opisany na $UVRT$ o środku w punkcie O jest styczny do okręgów opisanych na trójkątach BPF, CPE, BEY, CFZ. **12.** Ciąg $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ definiu-

jemy następująco: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ oraz a_{n+1} jest najmniejszą liczbą, która dotychczas nie wystąpiła w ciągu i $\mathrm{nwd}(a_n, a_{n+1}) > 1$. Pokazać, że $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ jest permutacją liczb naturalnych.

Rozwiązanie:

Ciąg ten nazywamy ciągiem EKG (zrób sobie wykres tej funkcji i porównaj ze swoim EKG). Alternatywnie możemy go zdefiniować jako $a_1 = 1$ oraz

$$a_n = \min\{b_p(n) \colon p \mid a_{n-1}\},$$

gdzie dla liczby pierwszej p i liczby całkowitej $n \geqslant 2$ definiujemy

$$b_p(n) := \text{najmniejsza wielokrotność p, która nie jest w } \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}.$$

Pokażemy na początku lemat: Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą, która dzieli jakiś wyraz ciągu EKG. Jeśli p dzieli a_n jako pierwszy wyraz, to $a_n = qp$, gdzie q jest najmniejszą liczbą pierwszą dzielącą a_{n-1}. Ponadto $q < p$ oraz $a_{n+1} = p$ i jedna z liczb a_n, a_{n+2} jest równa $2p$. Nowe liczby dzielące jakiekolwiek wyrazy ciągu EKG rosną.

Oczywiście liczby postaci pq, gdzie q jest dzielnikiem pierwszym a_{n-1} są wszystkimi możliwymi kandydatami dla a_n, więc pierwsza część lematu jest jasna.

Ponadto p musi być najmniejszą liczbą pierwszą, która nie pojawiła się jako dzielnik liczb $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ (gdyby p' było mniejszą taką liczbą pierwszą, to $p'q$ byłby lepszym kandydatem na bycie a_n). W szczególności liczby pierwsze, które dzielą wyrazy EKG rosną i $q < p$.

Wobec tego p jest kandydatem do bycia a_{n+1} i jest mniejszy niż $b_q(n+1) \geqslant b_q(n) = pq$, więc $a_{n+1} = p$. Ostatecznie albo $a_n = 2p$ lub $a_{n+2} = 2p$.

Z powyższego lematu wynika, że liczby pierwsze pojawiające się w ciągu EKG rosną, gdyż następna liczba po pierwszej podzielnej przez p jest równa p.

Jeśli nieskończenie wiele wielokrotności liczby pierwszej p pojawia się w ciągu EKG, to wszystkie liczby całkowite dodatnie występują w EKG.

Załóżmy przez sprzeczność, że kp jest pierwsza wielokrotnością p, która nie pojawia się w ciągu EKG. Weźmy n_0 takie, że $a_n > kp$ dla $n \geqslant n_0$. Ponieważ nieskończenie wiele wielokrotności p jest w ciągu EKG, to istnieje $n > n_0$ takie, że $a_n = lp$ dla pewnej liczby naturalnej l. Jednakże wtedy $a_{n+1} = kp$, ponieważ $\mathrm{nwd}(a_n, kp) \geqslant p$ i wszystkie mniejsze możliwe wartości które mają pojawiać się w ciągu EKG już się pojawiły – sprzeczność.

Jesteśmy teraz gotowi by pokazać, że $\{a_n\}$ jest permutacją. Istotnie, z konstrukcji żadna liczba nie może pojawić się dwa razy w ciągu EKG. Przypuśćmy, że tylko skończenie wiele liczb pierwszych dzieli jakikolwiek wyraz EKG. Wtedy, jedna z nich pojawia się w ciągu nieskończenie wiele razy. Jednakże na mocy powyższych lematów wszystkie liczby naturalne są w EKG – sprzeczność.

Wobec tego istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych, które dzielą jakiś wyraz EKG. Wtedy na mocy lematu nieskończenie wiele liczb parzystych $2p$ jest w EKG, więc wszystkie liczby parzyste tam są. A to oznacza ponownie z lematu, że wszystkie liczby całkowite dodatnie są wyrazami ciągu EKG.

Mecz matematyczny grupy młodszej

1. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych x i y, dla których zachodzi

$$x^2 + 615 = 2^y.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy najpierw, że nie ma rozwiązań, dla których $y \leqslant 0$, gdyż prawa strona równości jest wówczas nie większa niż 1, a lewa strona jest większa niż 615. Załóżmy, że $y \geqslant 1$.

Rozważmy to równanie modulo 3. Zauważmy, że x^2 może przystawać tylko do 0 i 1 oraz $615 = 3 \cdot 5 \cdot 41$, zatem lewa strona równości może przystawać tylko do 0 i 1. Natomiast prawa strona równości przystaje do 1 lub 2. Stąd więc obie strony równości muszą przystawać do 1, a jest tak tylko, jeżeli y jest liczbą parzystą. Niech $y = 2y'$.

Podstawiając do równości w zadaniu otrzymujemy:

$$3 \cdot 5 \cdot 41 = 615 = 2^y - x^2 = \left(2^{y'}\right)^2 - x^2 = \left(2^{y'} - x\right)\left(2^{y'} + x\right).$$

Ponadto $\left(2^{y'} - x\right) + \left(2^{y'} + x\right) = 2^{y'+1}$. Szybkie sprawdzenie pokazuje, że jest tak tylko jeżeli zapiszemy $615 = 5 \cdot 123$. Stąd więc:

$$\begin{cases} 2^{y'} - x &= 5 \\ 2^{y'} + x &= 123 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} 2^{y'} - x &= 123 \\ 2^{y'} + x &= 5 \end{cases}$$

W obu przypadkach sumując obustronnie dostajemy $2^{y'+1} = 128 = 2^7$, czyli $2^{y'} = 2^6$ oraz $y = 12$. Podstawiając te wartości do równań dostajemy dwa możliwe rozwiązania, $x = -59$ lub $x = 59$. Bezpośrednio sprawdzając dostajemy, że spełniają one pierwotne równanie. Zatem jedynie pary $(12, -59)$ i $(12, 59)$ spełniają pierwotne równanie.

2. Na płaszczyźnie znajduje się 2018^{2018} punktów, przy czym żadne trzy nie są współliniowe. Każdy z tych punktów jest w jednym z trzech kolorów: czerwonym, zielonym lub niebieskim. Wiadomo jest, że każdy kolor występuje co najmniej raz. Pokazać, że istnieje trójkąt mający wierzchołki wśród tych punktów, gdzie każdy wierzchołek jest w innym kolorze i wewnątrz tego trójkąta nie ma innych punktów.

Rozwiązanie:

Wybierzmy trójkąt, który ma wszystkie wierzchołki w różnych kolorach oraz jego pole jest możliwie najmniejsze. Oczywiście taki trójkąt istnieje, ponieważ liczba trójkątów o wierzchołkach w różnych kolorach jest skończona. Gdyby wewnątrz tego trójkąta znajdował się jakiś inny punkt, to moglibyśmy zamienić jeden z wierzchołków trójkąta na ten punkt, dzięki czemu otrzymalibyśmy mniejszy trójkąt spełniający warunki zadania. Zatem ten trójkąt jest szukanym trójkątem.

3. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $\measuredangle ACB = 45°$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, punkt H jest punktem przecięcia wysokości trójkąta ABC. Prosta przechodząca przez punkt O i prostopadła do prostej CO przecina proste AC i BC odpowiednio w punktach K i L. Pokazać, że obwód trójkąta KLH jest równy średnicy okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Rozwiązanie:

Niech H_A, H_B, H_C oznaczają spodki wysokości opuszczone z odpowiednich wierzchołków trójkąta. Niech ponadto K' i L' oznaczają odbicie punktu H względem prostych AC i BC. Zauważmy, że leżą one na okręgu opisanym na trójkącie ABC. W istocie, zachodzą równości:

$$\measuredangle K'CA = \measuredangle HCA = \measuredangle H_CCA = \measuredangle H_BBA = \measuredangle K'BA.$$

Analogicznie dla punktu L'.

Ponadto $\measuredangle H_BCB = 45°$, $\measuredangle BH_BC = 90°$, zatem $\measuredangle K'BC = \measuredangle H_BBC = 45°$, a więc $\measuredangle KOC = 2\cdot 45° = 90°$. Zatem punkt K' leży na prostej prostopadłej do CO w punkcie O, czyli na prostej KL. Otrzymujemy więc, że odcinek $K'L'$ to średnica okręgu. Ponieważ K' i L' to odbicia punktu H względem boków trójkąta, to zachodzą równości $|KH| = |KK'|$ i $|LH| = |LL'|$, a więc

$$|KH| + |KL| + |LH| = |KK'| + |KL| + |LL'| = |K'L'|,$$

co należało udowodnić.

4. Liczby całkowite dodatnie a, b i c spełniają warunek

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 6abc.$$

Pokazać, że liczba $a^3 + b^3 + c^3 + 1$ nie jest podzielna przez liczbę $a + b + c + 1$.

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze znanej tożsamości (Girarda-Newtona):

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) - (ab+bc+ca)(a+b+c) + 3abc. \tag{1}$$

Przekształcając równość z treści dostajemy:

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 3abc,$$

Podstawiając to do wzoru (1) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc \\ &= 3abc(a + b + c + 1). \end{aligned}$$

Zatem $a + b + c + 1 \nmid a^3 + b^3 + c^3 + 1$, co należało pokazać.

5. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których obie liczby $n^n + 1$ oraz $(2n)^{2n} + 1$ są liczbami pierwszymi.

Rozwiązanie:

Dla $n = 1$ obie liczby są pierwsze. Załóżmy, że $n \geqslant 2$.

Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to pierwsza z liczb jest liczbą parzystą większą niż 2, zatem jest liczbą złożoną. Załóżmy więc, że $n = 2^k m$, gdzie $k > 1$ i m jest liczbą nieparzystą. Jeżeli $m > 1$, to stosując wzory skróconego mnożenia dostajemy

$$n^n + 1 = \left(\left(2^k m\right)^{2^k}\right)^m + 1^m = \left(\left(2^k m\right)^{2^k} + 1\right)(\dots),$$

a więc liczbę można zapisać jako iloczyn dwóch liczb większych od 1.

Zachodzi więc $n = 2^k$. Jeżeli $2 \mid k$, to $2 \nmid (k + 1)$ i

$$(2n)^{2n} + 1 = \left(2^{k+1}\right)^{2^k} + 1 = \left(2^{2^k}\right)^{k+1} + 1^{k+1} = \left(2^{2^k} + 1\right)(\dots),$$

a więc ponownie otrzymujemy liczbę złożoną.

Jeżeli $2 \nmid k$, to

$$n^n + 1 = \left(2^k\right)^{2^k} + 1 = \left(2^{2^k}\right)^k + 1^k = \left(2^{2^k} + 1\right)(\dots),$$

a więc jest to liczba złożona.

Ostatecznie, jedyną liczbą spełniającą warunki zadania jest $n = 1$.

6. Dana jest kwadratowa plansza o rozmiarze 2018×2018. Dwóch graczy wykonuje na przemian ruchy w postaci wyboru koloru czarnego lub białego i postawieniu pionka w tym kolorze na jakimś pustym polu. Grę wygrywa ten, po którego ruchu na planszy znajdzie się ciąg pięciu pionków w jednym kolorze (poziomo, pionowo lub na skos). Stwierdzić, czy gracz pierwszy ma strategię wygrywającą.

Rozwiązanie:

Pokażemy, że gracz drugi ma strategię wygrywającą. Jego strategia wygląda następująco: jeżeli może dostawić piąty pionek do pewnego ciągu, robi to i wygrywa; w przeciwnym razie wybiera kolor przeciwny do koloru, który wybrał jego przeciwnik w poprzednim ruchu i stawia pionek na polu symetrycznie odbitym względem środka planszy. Oczywistym jest, że jeżeli nie mógł dostawić piątego pionka, to po jego ruchu również nie będzie to możliwe, ze względu na symetrię ustawienia pionków. Zatem strategia ta zapewnia zwycięstwo graczowi drugiemu.

7. Niech $a, b \in \mathbb{Z}$ i niech $c < d$ będą takimi kolejnymi liczbami całkowitymi, że zachodzi równość $a - b = a^2c - b^2d$. Udowodnić, że $|a - b|$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie:

Zapiszmy $d = c + 1$ i podstawmy:

$$a - b = a^2c - b^2(c + 1) = a^2c - b^2c + b^2 = (a - b)(a + b)c - b^2,$$

a stąd

$$b^2 = (a - b)(c(a + b) - 1).$$

Oczywiście jeżeli p jest liczbą pierwszą i $p \mid (a - b)$, to $p \mid b^2$, czyli $p \mid b$, a więc $p \mid (a - b) + 2b = (a + b)$. Stąd więc $NWD(a - b, c(a + b) - 1) = 1$. Jednak każda liczba pierwsza występuje parzystą liczbę razy w wyrażeniu b^2, a więc występuje też parzystą liczbę razy w każdym z wyrażeń $a - b$ i $c(a + b) - 1$. Stąd więc $|a - b|$ jest kwadratem liczby całkowitej.

8. Dany jest trójkąt ABC. Niech O oznacza środek okręgu opisanego na tym trójkącie, a H oznacza punkt przecięcia się wysokości tego trójkąta. Punkt A leży po przeciwnej stronie prostej OH niż punkty B i C. Niech d_A, d_B, d_C oznaczają odległości odpowiednich wierzchołków trójkąta ABC od prostej OH. Pokazać, że $d_A = d_B + d_C$.

Rozwiązanie:

Lemat (Euler). Niech M_A oznacza środek odcinka BC. Wówczas $|AH| = 2|M_AO|$.

Dowód lematu. Niech M_B oznacza środek odcinka CA oraz niech H_A i H_B oznaczają środki odcinków AH i BH. Oczywiście $H_AH_B \parallel AB \parallel M_AM_B$, a więc zachodzi równość

$$|H_AH_B| = \frac{1}{2}|AB| = |M_AM_B|.$$

Ponadto $M_AO \parallel AH$ i $M_B \parallel BH$. Zatem trójkąty HH_AH_B i OM_AM_B są przystające. Stąd dostajemy równość $|AH| = 2|H_AH| = 2|M_AO|$, co należało dowieść.

Niech teraz X_A, X_B, X_C i X_M oznaczają rzuty kolejno punktów A, B, C i M_A na prostą OH. Oczywiście trójkąty AHX_A i M_AOX_M są podobne i zachodzi $|AX_A| = 2|M_AX_M|$. Ponadto, czworokąt BX_BX_CC to trapez prostokątny i zachodzi $|M_AX_M| = \frac{1}{2}(|BX_B| + |CX_C|)$. Stąd więc otrzymujemy:

$$d_A = |AX_A| = 2|M_AX_M| = |BX_B| + |CX_C| = d_B + d_C,$$

co należało udowodnić.

9. Dana jest plansza o rozmiarze 100×100. Ile maksymalnie $(3,1)$-skoczków można postawić na planszy tak, aby żadne dwa skoczki siebie nie atakowały? $(3,1)$-*skoczki atakują siebie jeżeli stoją na przeciwległych wierzchołkach prostokąta o rozmiarze* 2×4.

Rozwiązanie:

Zauważmy najpierw, że jak ustawimy skoczki w co drugiej kolumnie, to dostaniemy poprawne ustawienie skoczków, które pokrywa połowę pól.

Pokażemy teraz, że nie da się tego zrobić lepiej.

W tym celu ponumerujmy pola prostokąta 2×6 w następujący sposób:

1	3	5	2	4	6
2	4	6	1	3	5

Oczywistym jest, że skoczek ustawiony w pewnym polu atakuje drugie pole z taką samą cyfrą. Oznacza to, że nie można wypełnić takiego prostokąta więcej niż sześcioma skoczkami.

Następnie ponumerujmy pola prostokąta 4×8 w następujący sposób:

1	9	4	10	7	13	8	16
10	3	13	6	11	4	14	7
2	11	5	14	3	12	6	15
9	1	12	2	15	5	16	8

Podobnie jak poprzednio, każda liczba występuje dwukrotnie i skoczek postawiony w pewnym polu atakuje drugie pole o tym samym numerze. Wynika stąd, że prostokąta o rozmiarze 4×8 również nie da się wypełnić większą liczbą skoczków niż połowa liczby pól.

Zauważmy przy tym, że z prostokątów 2×6 można utworzyć prostokąt 4×6, a z dwóch takich prostokątów i jednego o rozmiarze 4×8 można utworzyć prostokąt o rozmiarze 4×20. Natomiast ze 125 takich prostokątów można utworzyć prostokąt o rozmiarze 100×100, co oznacza, że nie można pokryć go skoczkami w liczbie większej niż połowa liczby jego pól.

Zatem można postawić na tej planszy maksymalnie 5000 $(3,1)$-skoczków.

10. Udowodnij, że równanie

$$\left(2+\sqrt{5}\right)^m + \left(3+\sqrt{5}\right)^n = \left(4+\sqrt{5}\right)^k$$

nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych m, n, k.

Rozwiązanie:

Załóżmy nie wprost, że istnieje rozwiązanie tego równania. Korzystając z rozwinięcia dwumianowego otrzymujemy

$$\left(2+\sqrt{5}\right)^m + \left(3+\sqrt{5}\right)^n - \left(4+\sqrt{5}\right)^k = A + B\sqrt{5},$$

gdzie A i B to pewne liczby całkowite. Oczywiście zakładając, że liczby m, n, k spełniają równość z zadania, otrzymujemy $A = B = 0$.

Gdy zamienimy dodawanie na odejmowanie liczb w nawiasach, to otrzymamy:

$$\left(2-\sqrt{5}\right)^m + \left(3-\sqrt{5}\right)^n - \left(4-\sqrt{5}\right)^k = A - B\sqrt{5} = 0.$$

Okazuje się jednak, że $|2-\sqrt{5}| < \frac{1}{2}$, $0 < 3-\sqrt{5} < 1$ oraz $4-\sqrt{5} > \frac{3}{2}$, zatem $(2-\sqrt{5})^m < \frac{1}{2}$, $0 < (3-\sqrt{5})^n < 1$ oraz $(4-\sqrt{5})^k > \frac{3}{2}$, a stąd:

$$\left(2-\sqrt{5}\right)^m + \left(3-\sqrt{5}\right)^n < \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} < \left(4-\sqrt{5}\right)^k,$$

a więc sprzeczność z założeniem, że liczby m, n, k spełniają równość z zadania.

11. Dany jest kąt ostry XOY. Wewnątrz tego kąta znajdują się punkty A i B, przy czym zachodzi $\measuredangle AOX = \measuredangle BOY$. Niech X_A, X_B oznaczają rzuty prostopadłe punktów A i B na prostą OX. Analogicznie, niech Y_A, Y_B oznaczają rzuty prostopadłe punktów A i B na prostą OY. Udowodnić, że proste AB, X_AY_B, X_BY_A przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie:

Sposób 1. Zadanie można rozwiązać analitycznie. Bez straty ogólności można założyć, że oś współrzędnych x jest dwusieczną kąta XOY. Wówczas prosta OX jest postaci $y = px + q$ i ze względu na symetrię względem osi współrzędnych x, prosta OY ma równanie $y = -px - q$. Ponieważ proste OA i OB odpowiednio tworzą równe kąty z prostymi OX i OY, to oznacza, że są odbite symetrycznie względem dwusiecznej kąta XOY. Możemy je zatem zapisać kolejno jako $y = rx + s$ i $y = -rx - s$.

Dalej można wybrać dowolne punkty leżące na prostych OA i OB, wyznaczyć ich rzuty na proste OX i OY i następnie wyznaczyć punkt przecięcia prostych z tezy zadania. Tę część pozostawiamy Czytelnikowi.

Sposób 2. Niech C oznacza rzut punktu O na prostą AB. Oczywiście punkty O, A, X_A, Y_A, C leżą na jednym okręgu, którego średnicą jest odcinek OA. Analogicznie dla piątki punktów O, B, X_B, Y_B, C. Oznaczmy te okręgi kolejno przez ω_A i ω_B.

Zauważmy również, że punkty X_A, X_B, Y_A, Y_B leżą na jednym okręgu. Istotnie, zachodzą równości $\measuredangle X_AY_AO = \measuredangle X_AAO = \measuredangle Y_BBO = \measuredangle Y_BX_BO$ i analogicznie $\measuredangle Y_AX_AO = \measuredangle X_BY_BO$. Zatem trójkąty X_AY_AO i Y_BY_AO są podobne i na punktach X_A, X_B, Y_A, Y_B można opisać okrąg. Oznaczmy go przez ω.

Dalej, środek okręgu ω leży na prostej AB.
Jest tak, ponieważ czworokąty ABX_BX_A oraz ABY_BY_A to trapezy prostokątne, a więc odległość środka odcinka AB od każdego z punktów X_A, X_B, Y_A, Y_B jest taka sama. Niech środek tego okręgu będzie oznaczony przez M.

Niech teraz Z oznacza punkt przecięcia prostych X_AX_B oraz Y_AY_B. Zauważmy, że jest on środkiem potęgowym okręgów ω, ω_A, ω_B, zatem w szczególności leży na prostej OC.

Niech D oznacza punkt przecięcia prostych X_AY_B i X_BY_A. Jako, że punkt Z leży na przecięciu przekątnych czworokąta $X_AX_BY_BY_A$, to punkt D jest biegunem prostej OZ względem okręgu ω, zatem prosta MD jest prostopadła do prostej OZ. Wiemy jednak, że prosta OZ jest również prostopadła do prostej AB i na prostej AB leży punkt M. Zatem proste AB i MD pokrywają się. Stąd więc proste X_AY_B, X_BY_A i AB przecinają się w jednym punkcie, co należało dowieść.

12. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych x i y spełniające równanie

$$2x^6 + y^7 = 11$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że $6 \cdot 7 + 1 = 43$ jest liczbą pierwszą. Możliwe reszty modulo 43 to:

$$2x^6 \bmod 43 \in \{0, 2, 8, 22, 27, 32, 39, 42\},$$
$$11 - y^7 \bmod 43 \in \{4, 5, 10, 11, 12, 17, 18\}.$$

Zatem nie istnieją rozwiązania tego równania w liczbach całkowitych.

Mecz matematyczny grupy średniej

1. Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste x spełniające równość:

$$\frac{8^x + 27^x}{12^x + 18^x} = \frac{7}{6}$$

Rozwiązanie:
Niech $a = 2^x$ oraz $b = 3^x$. Wówczas:

$$6(a^3 + b^3) = 7ab(a + b)$$

czyli

$$6(a + b)(a^2 + b^2 - ab) = 7(a + b)ab$$

ale skoro $a + b$ jest różne od 0 to:

$$6a^2 + 6b^2 - 13ab = 0$$

co daje

$$(3a - 2b)(2a - 3b) = 0$$

co nam daje dwa przypadki, $3a = 2b$ oraz $2a = 3b$. Co daje $x = 1$ lub $x = -1$. Sprawdzamy i widzimy, że obie te liczby spełniają równanie.

2. Dana jest funkcja f, która dla każdej pary liczb rzeczywistych przyjmuje wartość rzeczywistą oraz dla dowolnych $x, y, z \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$f(x, y) + f(y, z) + f(z, x) = 0.$$

Udowodnić, że istnieje funkcja g określona na zbiorze liczb rzeczywistych i przyjmująca wartości rzeczywiste, taka że dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbb{R}$ spełniona jest równość:

$$f(a, b) = g(a) - g(b)$$

Rozwiązanie:
Udowodnimy, że funkcja $g(x) = f(x, 0)$ spełnia warunki zadania. Wystarczy więc wykazać, że:

$$f(x, y) = f(x, 0) - f(y, 0)$$

Podstawiając do warunku z zadania $x = y = z$ mamy: $3f(x,x) = 0$, czyli $f(x,x) = 0$. Podstawmy więc $y = z$:

$$f(x,y) + f(y,y) + f(y,x) = 0$$

Zatem: $f(x,y) = -f(y,x)$. Podstawmy $z = 0$:

$$f(x,y) + f(y,0) + f(0,x) = 0$$

czyli

$$f(x,y) + f(y,0) - f(x,0) = 0$$

Co było do udowodnienia.

3. Wyznaczyć wszystkie wielomiany P o współczynnikach rzeczywistych, takie że dla dowolnej liczby rzeczywistej x spełniona jest równość

$$P(x^2) = P(x) \cdot P(x+2)$$

Rozwiązanie:

W przypadku wielomianów stałych jest łatwo. Dalej zakładamy, że P jest wielomianem stopnia n. Wówczas wielomian ten ma n pierwiastków zespolonych (licząc z krotnościami). Załóżmy, że liczba zespolona z jest pierwiastkiem wielomianu P. Podstawiając w danej równości $x = z$ wnosimy, że z^2 jest także pierwiastkiem wielomianu P. Przyjmując zaś $x^2 = z$ otrzymujemy, że liczba $(z-2)^2$ jest także pierwiastkiem wielomianu P. Przypuśćmy, że wielomian P ma pierwiastki zespolone o module większym niż 1 i wśród nich wybierzmy z_0 o największym module. Wówczas liczba z_0^2 także jest pierwiastkiem wielomianu P, a ma większy moduł. W takim razie wielomian P nie może mieć pierwiastków zespolonych o module większym niż 1. W analogiczny sposób uzasadniamy, że wielomian ten nie ma pierwiastków zespolonych o module należącym do przedziału $(0,1)$ (wystarczy rozpatrzyć pierwiastek o najmniejszym module). Ponadto jeśli liczba 0 byłaby pierwiastkiem wielomianu P, to wówczas pierwiastkiem wielomianu P byłaby także liczba 4, co jest niemożliwe. W takim razie wszystkie pierwiastki P leżą na okręgu jednostkowym o środku w 0. Przypuśćmy teraz, że wielomian P ma pierwiastek z_0 różny od 1leżący na okręgu jednostkowym. Wtedy liczba $z_0 - 2$ nie leży na tym okręgu i to samo dotyczy liczby $(z_0-2)^2$, która jest pierwiastkiem P. Otrzymana sprzeczność prowadzi do wniosku, że jedynym pierwiastkiem zespolonym wielomianu P jest 1. Więc $P(x) = (x-1)^n$.

4. Dane są liczby całkowite x, y oraz liczby pierwsze p, q, R, które spełniają równość

$$x^R + R \cdot pq = y^R$$

Udowodnić, że przynajmniej jedna z liczb p, q jest równa R.

Rozwiązanie:

Rozważając równanie modulo R dostajemy, że $x^R \equiv y^R (mod.R)$, ale na mocy Małego Twierdzenia Fermata mamy, że $x \equiv x^R$ oraz $y \equiv y^R$, więc dostajemy, że $x \equiv y$. Zatem $y - x$ jest podzielne przez R. Zauważmy, że:

$$x^{R-1} + x^{R-2}y + ... + xy^{R-2} + y^{R-1} \equiv R \cdot x^{R-1} \equiv 0$$

A zatem na mocy wzoru skróconego mnożenia $R^2 | y^R - x^R$, więc $R^2 | R \cdot pq$, czyli $R | pq$. Z pierwszości R, p, q wynika teza.

5. Udowodnić, że dowolną liczbę całkowitą da się zapisać jako sumę pięciu sześcianów liczb całkowitych. *Rozwiązanie:*

Zauważmy, że

$$0^3 + (a+1)^3 + (a-1)^3 + (-a)^3 + (-a)^3 = 6a$$

$$1^3 + (a+1)^3 + (a-1)^3 + (-a)^3 + (-a)^3 = 6a + 1$$

$$(-1)^3 + (a+1)^3 + (a-1)^3 + (-a)^3 + (-a)^3 = 6a - 1 = 6k + 5$$

$$2^3 + (a+1)^3 + (a-1)^3 + (-a)^3 + (-a)^3 = 6a + 8 = 6k + 2$$

$$(-2)^3 + (a+1)^3 + (a-1)^3 + (-a)^3 + (-a)^3 = 6a - 8 = 6k + 4$$

$$3^3 + (a+1)^3 + (a-1)^3 + (-a)^3 + (-a)^3 = 6a + 27 = 6k + 3$$

Z dowolności a wynika teza.

6. Znaleźć wszystkie liczby całkowite dodatnie n dla których liczba

$$2^n + 777$$

jest kwadratem liczby całkowitej. *Rozwiązanie:*

Rozpatrując równanie modulo 3 otrzymujemy, że n jest parzyste. Zatem $n = 2k$, czyli

$$777 = (x - 2^k)(x + 2^k)$$

Wystarczy więc rozłożyć 777 na iloczyn dwóch liczb (skończona liczba przypadeków) i sprawdzić czy poszczególne nawiasy po prawej stronie mogą być równe odopowiednim wartościom.

7. Dana jest rodzina $\mathcal{F}$ podzbiorów zbioru $1, 2, 3, ..., n$ mająca więcej niż 2^{n-1} elementów. Pokazać, że istnieją dwa zbiory $A, B \in \mathcal{F}$ takie, że ich część wspólna jest zbiorem pustym. *Rozwiązanie:*

Dla każdego zbioru łączymy go w parę z jego dopełnieniem. W sumie jest takich par 2^{n-1}. Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika teza.

8. Czy istnieje n postaci $2^k - 1$ dla pewnej liczby naturalnej k, że wartość jakiegokolwiek ze współczynników newtona $\binom{n}{i}$ dla $0 \leqslant i \leqslant n$ jest parzysta?

Rozwiązanie:

Zauważmy, że 2 dzieli $2^k - i$ w tej samej potędze, w której dzieli i. Zapiszmy teraz $\binom{n}{i}$ jako

$$\frac{n * (n-1) * \cdots * (n-j+1)}{1 * 2 * \cdots * j} = \frac{(2^k - 1) * (2^k - 2) * \cdots * (2^k - j)}{1 * 2 * \cdots * j}$$

. Widzimy, że potęga 2, która dzieli licznik i mianownik jest taka sama, zatem każda z tych liczb będzie nieparzysta.

9. Alicja, Bartek i Cezary mieli do zrobienia n zadań. Po zrobieniu wszystkich zadań byli ciekaw jak bardzo kolejnosc ich robienia zadań się pokrywały. Pokaż, że dwójka z nich zrobiła $\sqrt[3]{n}$ zadań w tej samej kolejności.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że zamiast numerów zadań możemy rozpatrzać miejsce i-tego zadania w pierwszym ciągu. Zamienia to pierwszy ciąg na rosnący postaci $1, 2, \ldots n$. Skorzystajmy teraz z twierdzenia Erdos'a-Szekeres'a dla drugiego ciągu. Znajdziemy tam albo ciąg rosnący długości $\sqrt[3]{n}$ albo malejący długości $\sqrt[3]{n^2}$. Jeżeli zachodziłby pierwszy przypadek, to teza zadania byłaby spełniona. Zatem musi zachodzić drugi. Analogicznie rozpatrujemy trzeci ciąg i dochodzimy do wniosku, że w obu najdłuższy rosnący podciąg jest krótszy niż $\sqrt[3]{n}$. Zdefiniujmy sobie teraz a_i (b_i) jako długość najdłuższego rosnącego podciągu w drugim (trzecim) ciągu, gdzie ostatnią wartością jest i. Z ograniczenia na długość tego podciągu, wiemy że możliwych wartości par a_i, b_i jest jedynie $\sqrt[3]{n^2}$, więc z twierdzenia Dirichleta istnieje $\sqrt[3]{n}$ liczb, że dla dowolnych i, j z nich zachodzi $(a_i, b_i) = (a_j, b_j)$. Posortujmy je malejąco. Liczby te występują w obu ciągach w tej właśnie kolejności. Gdyby tak nie było to istnieją dwa elementy, że mniejszy jest przed większym. Oznacza to, że dla drugiego najdłuższym rosnącym podciągiem jest podciąg mniejszego z nim jako ostatnim elementem, co przeczy równości długości tych podciągów. Otrzymaliśmy zatem wspólny podciąg długości $\sqrt[3]{n}$.

10. Dany jest trójkąt ABC oraz punkty D, E, F, które leża odpowiednio na bokach BC, CA, AB. Proste AD, BE, CF przecinają sie w jednym punkcie. Udowodnić, że D jest środkiem BC wtedy i tylko wtedy gdy $FE||BC$.

Rozwiązanie:

Z twierdzenia Cevy oraz Twierdzenia Talesa (i doń odwrotnego) dostajemy tezę.

11. Niech R oraz S będą różnymi punktami na okręgu ω przy czym odcinek RS nie jest średnicą ω. Prosta l jest styczna do ω w punkcie R. Niech T będzie takim punktem, że S jest środkiem odcinka RT. Punkt J wybrano na krótszym łuku okręgu ω w taki sposób, że okrąg opisany na trójkącie JST przecina prostą l w dwóch punktach. Niech A będzie punktem przecięcia okręgu opisanego na JST oraz prostej l, który leży bliżej punktu R. Prosta AJ przecina okrąg ω w punkcie K. Wykazać, że prosta KT jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie JST. *Rozwiązanie:*

Niech punkt L będzie przecięciem prostej KS oraz prostej AT. Zauważmy, ze $\sphericalangle JAT = 180 - \sphericalangle JST = \sphericalangle JSR = \sphericalangle RKJ = \sphericalangle ARJ$. Wynika to z tego, że $AJST$, $JSKR$ to czworokąty cykliczne oraz AR to styczna do ω. Skoro $\sphericalangle JAT = \sphericalangle RKA$ to $RK||AT$. Skoro tak i skoro S to środek AT to $RKTL$ jest równoległobokiem. Ponadto $\sphericalangle ARS = \sphericalangle RKS = \sphericalangle SLT$ bo AR jest styczną do ω oraz $RK||AT$. Czyli $\sphericalangle ALS = 180 - \sphericalangle ARS$ czyli czworokąt $LARS$ jest cykliczny, czyli $\sphericalangle SAL = \sphericalangle LRS$, ale skoro $RKTL$ to równoległobok, to $\sphericalangle STK = \sphericalangle LRS = \sphericalangle SAL$. Oznacza to, że KT jest styczna do okręgu opisanego na $ATSJ$, co było do udowodnienia.

12. Dany jest trójkąt ABC. Niech H_A, H_B, H_C oznaczają spodki wysokości opuszczone z odpowiednich wierzchołków trójkąta. Punkt X leży na okręgu opisanym na trójkącie $H_AH_BH_C$. Punkty X_A, X_B, X_C to odbicia punktu X odpowiednio względem prostych BC, CA, AB. Pokazać, że proste H_AX_A, H_BX_B, H_CX_C są równoległe.

Rozwiązanie:

Lemat 1 Trójkąty ABC, AH_BH_C, H_ABH_C, H_AH_BC są podobne.

Dowód Na czworokącie BCH_BH_C można opisać okrąg, a więc $\sphericalangle AH_BH_C = \sphericalangle ABC$ oraz $\sphericalangle AH_CH_B = \sphericalangle ACB$. Zatem $\triangle ABC \sim AH_BH_C$ i analogicznie dla pozostałych trójkątów.

Lemat 2 Dany jest punkt X oraz proste k i l przecinające się w punkcie O. Punkty P, Q, R to odbicia punktu X względem prostych k, l oraz dwusiecznej (dowolnej!) kąta między prostymi k i l. Wówczas prosta OR jest symetralną odcinka PQ.

Dowód Przeliczenie na kątach.

Niech R_A, R_B, R_C oznaczają kolejno odbicia punktu X względem prostych H_BH_C, H_CH_A, H_AH_B. Dzięki lematom wiemy, że proste XX_A, XX_B, XX_C są symetralnymi odcinków R_BR_C, R_CR_A, R_AR_B, więc w szczególności są do nich prostopadłe. Z twierdzenia o prostej Simpsona wiemy, że punkty R_A, R_B, R_C są współliniowe. Zatem proste XX_A, XX_B, XX_C są równoległe.

Mecz matematyczny grupy starszej

1. Znaleźć wszystkie wielomiany dwóch zmiennych $P(x,y)$ o współczynnikach rzeczywistych, takie, że

$$P(ab,c^2+1)+P(bc,a^2+1)+P(ca,b^2+1)=0$$

Rozwiązanie:

Niech $A(a,b,c)$ oznacza, że do głównego równania podstawiamy liczby a, b i c. Mamy wtedy

$$A(0,0,0) \Rightarrow P(0,1)=0.$$

$$A(0,0,c) \Rightarrow P(0,y)=0 \quad \text{dla} \quad y>1.$$

Czyli $x \mid P(x,y)$. Teraz

$$A(a,b,0) \Rightarrow P(x,1)=0 \quad \text{dla} \quad x\in\mathbb{R}.$$

Czyli $y-1 \mid P(x,y)$. Zatem dostajemy $P(x,y)=x(y-1)Q(x,y)$. Wstawiając to do głównego równania otrzymujemy:

$$A(a,b,c) \Rightarrow cQ(ab,c^2+1)+aQ(bc,a^2+1)+bQ(ca,b^2+1)=0.$$

Oznaczając ostatnią równość jako $B(a,b,c)$ dostaniemy

$$B(0,0,c) \Rightarrow Q(0,y)=0 \quad \text{dla} \quad y>1.$$

Zatem $x \mid Q(x,y)$. Czyli $Q(x,y)=xR(x,y)$ i znowu wstawiając to do wcześniejszej równości dostaniemy

$$R(ab,c^2+1)+R(bc,a^2+1)+R(ca,b^2+1)=0.$$

Dostaliśmy więc takie samo równanie co na początku. Czyli indukcyjnie możemy dowieść, że nasz wielomian P jest podzielny przez $x^{2n}(y-1)^n$ dla dowolnego naturalnego n. To implikuje nam, że wielomian $P(x,y)$ jest tożsamościowo równy 0 i to daje nam jedyne rozwiązanie.

2. Pokolorujmy każdą liczbę całkowitą dodatnią na czerwono lub na niebiesko. Udowodnić, że istnieje nieskończony ciąg liczb całkowitych dodatnich $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < \ldots$ taki, że nieskończony ciąg $a_1, \frac{a_1+a_2}{2}, a_2, \frac{a_2+a_3}{2}, a_3, \frac{a_3+a_4}{2}, \ldots$ jest ciągiem liczb całkowitych dodatnich pomalowanych na ten sam kolor.

Rozwiązanie:

Weźmy $a_1 = 1$ i bez straty ogólności załóżmy, że ta liczba jest niebieska. Następnie weźmy do naszego ciągu jak najwięcej możliwych a_i. Niech a_k będzie naszym największym wziętym wyrazem. Oznacza to, że nie możemy wziąć już żadnej liczby do naszego ciągu. Zatem dla dowolnej liczby całkowitej y jedna z liczb $a_k + y$ i $a_k + 2y$ jest czerwona (w przeciwnym wypadku moglibyśmy wziąć $a_{k+1} = a_k + 2y$). Zauważmy teraz, że istnieje pewna liczba $b_1 > a_k$ pokolorowana na czerwono (w przeciwnym wypadku teza jest oczywista). Zaczynając teraz od b_1 wybierzmy czerwone $b_2, b_3, \dots$ w taki sposób, że liczby b_i są nieparzyste, czerwone oraz liczby $\frac{b_i+b_{i+1}}{2}$ są czerwone. Podobnie jak wcześniej niech b_m będzie największą liczbą jaką możemy wybrać. Analogicznie dla każdego $z > 0$ co najmniej jedna z liczb $b_m + z$ i $b_m + 2z$ jest niebieska. Weźmy teraz dowolną liczbę $X > b_m$ pokolorowaną na czerwono. Wtedy $2X - b_m$ musi być niebieska bo inaczej moglibyśmy wziąć $b_{m+1} = 2X - b_m > b_m$. Zatem teraz zauważmy, że skoro a_k i $2X - b_m$ są niebieskie oraz $2X - b_m > b_m > a_k$, więc liczba

$$\frac{a_k + 2X - b_m}{2} = X - \frac{b_m - a_k}{2}$$

musi być czerwona, gdyż w przeciwnym wypadku wzięlibyśmy $a_{k+1} = 2X - b_m$. Zatem oznaczając $T = \frac{b_m - a_k}{2}$ dostajemy, że jeśli $X > b_m$ jest czerwone to $X - T$ jest też czerwone. Zatem dla $Y > b_m - T$, jeśli Y jest niebieskie to $Y + T$ również jest niebieskie. Zatem dostaniemy nieskończony ciąg arytmetyczny niebieskich liczb i biorąc go dostajemy tezę.

3. Zdefiniujmy *funkcję q-batą* jako taką funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla każdych $x, y \in \mathbb{R}$ $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$ oraz dla każdego $z \in \mathbb{R}$ $f^{2018}(z)$ jest całkowite.
a) Czy istnieje taka funkcja q-bata f, że $f(x)$ jest całkowite tylko dla skończenie wielu x?
b) Czy istnieje taka funkcja q-bata f i rosnący ciąg liczb rzeczywistych $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ taki, że $f(x)$ jest całkowite wtedy i tylko wtedy, gdy $x = a_i$ dla jakiegoś i?

Rozwiązanie:

4. Niech p będzie liczbą pierwszą. Załóżmy, że istnieją takie różne dodatnie liczby całkowite u, v, że p jest średnią kwadratową u i v. Udowodnić, że $2p - u - v$ jest kwadratem lub dwukrotnością kwadratu.

Rozwiązanie:

Warunek, że p jest średnią kwadratową u i v jest równoważny $2p^2 = u^2 + v^2$. Załóżmy bez straty ogólności, że $u < p < v$. Zapiszmy $u = p - k$, $v = p + l$

dla całkowitych dodatnich k, l, gdzie $k < p$ (bo $u > 0$). Podstawiając w $2p^2 = u^2 + v^2$ otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
2p^2 &= p^2 - 2pk + k^2 + p^2 + 2pl + l^2 \\
2p(k-l) &= k^2 + l^2
\end{aligned}
$$

Jako że prawa strona jest dodatnia, to $k - l > 0$. Niech $t = k - l$. Wtedy $0 < t < k < p$. Zauważmy, że $2p - u - v = 2p - (p-k) - (p+l) = k - l = t$, zatem wystarczy dowieść, że t jest kwadratem lub dwukrotnością kwadratu. Podstawmy więc $k = l + t$:

$$
\begin{aligned}
2pt &= (l+t)^2 + l^2 \\
0 &= 2l^2 + 2lt + t^2 - 2pt
\end{aligned}
$$

Ponieważ $2l^2 + 2lt + t^2 - 2pt$ traktowana jako funkcja kwadratowa l ma pierwiastek całkowity, to wyróżnik tej funkcji jest liczbą całkowitą. Ten wyróżnik wynosi

$$\Delta = \sqrt{4t^2 - 4 \cdot 2(t^2 - 2pt)} = 2\sqrt{t(t - 2t + 4p)} = 2\sqrt{t(4p-t)},$$

co oznacza, że $t(4p-t)$ jest kwadratem liczby całkowitej. Niech $d = \mathrm{nwd}(t, 4p - t) = \mathrm{nwd}(t, 4p) = \mathrm{nwd}(t, 4)$ ($0 < t < p$, i p jest liczbą pierwszą, więc t i p są względnie pierwsze), i niech $s = t/d$. Zauważmy, że skoro $d = \mathrm{nwd}(t, 4)$, to $d|4$. Wtedy $t(4p-t) = d^2 s(4p/d - s)$, co oznacza, że $s(4p/d - s)$ jest kwadratem. Ale $\mathrm{nwd}(s, 4p/d - s) = \mathrm{nwd}(t/d, (4p-t)/d) = 1$, czyli s też musi być kwadratem. Ponieważ $t \in \{s, 2s, 4s\}$, to t jest kwadratem lub dwukrotnością kwadratu.

5. Liczbę naturalną nazwiemy ładną jeżeli suma jej cyfr w zapisie dziesiętnym jest podzielna przez 2018 Rozstrzygnij czy:
a) istnieje taka liczba naturalna N, że wszystkie liczby N, $2N$,... $2018N$ są ładne.
b) istnieje taka liczba naturalna N, że wszystkie jej wielokrotności są ładne.

Rozwiązanie:

a) $N = 1 + 10^6 + 10^{12} + ... + 10^{6 \cdot 2017}$ spełnia warunki zadania, bo suma cyfr liczby $N \cdot k$ dla $k < 10^4$ to 2018 razy suma cyfr liczby k.
b) *Lemat*: dla dowolnej liczby całkowitej k istnieje liczba x będąca wielokrotnością k, składająca się z pewnej liczby zer poprzedzonej pewną, niezerową, liczbą jedynek.
Dowód Lematu: Weźmy liczby $1, 11, 111, 1111, ..., \underbrace{1....1}_{k+2}$. Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika że pewne dwie z tych liczb mają równe reszty modulo k. Ich

różnica spełnia warunki lematu.

Dowód nie wprost: załóżmy, że pewne N spełnia warunki zadania. Weźmy z Lematu wielokrotność N postaci $\underbrace{1....1}_{l}\underbrace{0....0}_{s}$. Możemy założyć, że $l \geqslant 2$, ponieważ jeżeli $l = 1$ to mnożąc te liczbę przez 11 otrzymamy również wielokrotność N. Zauważmy, że $\underbrace{1...1}_{l}\underbrace{0....0}_{s+l}$, $\underbrace{1...1}_{l}\underbrace{0....0}_{s+l-1}$ i $\underbrace{9....9}_{l}\underbrace{0....0}_{s}$ też są wielokrotnościami N. Wynika z tego, że $\underbrace{1..1}_{l}\underbrace{9...9}_{l}\underbrace{0....0}_{s}$ oraz $\underbrace{1...1}_{l-2}20\underbrace{9...9}_{l-1}\underbrace{0....0}_{s}$ również są wielokrotnościami N (ponieważ są sumą wcześniej wymienionych wielokrotności N), jednak sumy ich cyfr różnią się o dokładnie 9, więc nie mogą obie dzielić się przez 2018 co dowodzi sprzeczności.

6. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka dodatnia liczba całkowita m, że

$$(m+1)^3 + (m+2)^3 + \cdots + (2m)^3$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie:

Oznaczmy $F_n = 2^{2^n}+1$. Przypuśćmy że pewien ciąg arytmetyczny $(a_n)_{n\geqslant 1}$ z różnicą $d > 0$ ma dokładnie $2 \leqslant a < +\infty$ wspólnych elementów z $(F_n)_{n\geqslant 1}$. Ostatnie dwa wspólne wyrazy ciągów to $a_k = 2^{2^j} + 1$ i $a_l = 2^{2^m} + 1$, $k < l$, $j < m$. Wtedy $d|a_l - a_k = 2^{2^j}(2^{2^m-2^j} - 1)$. Gdyby $d = 2^b$, $b \leqslant 2^n$, to widać że $d|F_{m+1} - F_m$ i mamy sprzeczność.

Zatem istnieje nieparzyste $d_0 > 1$, $d_0|d$. Czyli

$$2^{2^m-2^j} \equiv 1 \pmod{d_0} \Rightarrow (2^{2^m-2^j})^{2^{m-j}} \equiv 1 \pmod{d_0}.$$

Zatem

$$d_0|2^{2^m}(2^{2^{2m-j}-2^m} - 1) \Leftrightarrow d|F_{2m-j} - F_m.$$

Ponownie otrzymaliśmy większy wspólny wyraz ciągów, zatem przypuszczenie było błędne.

7. Krzysztof i Iza grają w grę na planszy 100x100 podzielonej na kwadraty jednostkowe. Najpierw Iza w każdym polu planszy zapisuje liczbę z zakresu 1 do 10000 w taki sposób, że każda liczba jest wpisana w dokładnie jedno pole. Potem Krzysztof wybiera pole ze skrajnie lewej kolumny i umieszcza na nim swój pion. Następnie wykonuje ruchy, poruszając pion na jedno z sąsiednich pól (sąsiadujące krawędzią lub wierzchołkiem). Gra kończy się gdy pion dotrze na pole w skrajnie prawej kolumnie. Dodatkowo za każde pole na którym stanie pionek Krzysztof musi zapłacić Izie tyle monet, jaka liczba była napisana na polu. Krzysztof chce zapłacić Izie jak najmniej, z kolei Iza chce tak wpisać liczby, żeby zarobić jak najwięcej. Ile monet zapłaci Krzysztof Izie, jeżeli oboje będą grali optymalnie?

Rozwiązanie:

a)Pokażemy, że Iza zarobi co najmniej 500000 monet wpisując liczby jak w planszy poniżej.

Rozważmy ścieżkę, którą przeszedł pion Krzysztofa. Dla każdego $1 \leqslant n \leqslant 50$ istnieją dwa sąsiednie pola odpowiednio w kolumnie $2n-1$ i $2n$, które odwiedził pion. Łatwo zauważyć, że suma liczb na tych polach to co najmniej $200(2n-1)$. Więc liczba monet które zapłacił Krzysztof wynosi co najmniej 200(1+3+5+....+99)=500 000.
b)Pokażemy, że Krzysztof zapłaci co najwyżej 500000 monet, niezależnie jak Iza wpisze liczby. Podzielmy planszę na 50 poziomych prostokątów 2×100. Wybierzmy ten prostokąt, którego suma liczb wpisanych w pola jest najmniejsza. Ponieważ suma wszystkich liczb na planszy to 50 005 000 to w naszym prostokącie ta suma wyniesie co najwyżej 1 000 100. W każdej kolumnie naszego prostokąta wybierzmy pole z mniejszą wpisaną liczbą. Oczywiście liczba to będzie o co najmniej jeden mniejsza od drugiej liczby z kolumny. Rozpatrzmy ścieżkę złożoną z wybranych przez nas pól, oraz sumę liczb wpisanych w jej pola (S). Suma liczb wpisanych w pola naszego prostokąta to co najmniej $2S$+100. Wobec tego $2S + 100 \leqslant 1000100 \Rightarrow S \leqslant 500000$.
Odpowiedź: Jeżeli Krzysztof i Iza będą grali optymalnie, to Krzysztof zapłaci Izie dokładnie 500 000 monet.

8. Sejf Krzysztofa, w którym trzyma swój ciężko wywalczony brązowy medal, wymaga wprowadzenia 3-cyfrowego kodu, aby go odblokować. Iza chciałaby popodziwiać ten medal, ale Krzysztof poszedł na wykład, i nie powiedział kodu Izie. Jako że sejf się blokuje po wprowadzeniu niewłaściwego kodu, Iza nie może zgadywać kodu bezpośrednio. Jednakże Iza jest mądra, i zbudowała sondę, która może testować kombinacje cyfr bez wprowadzania ich do sejfu. Sonda od razu po przetestowaniu odpowiada *Ciepło*, jeżeli co najmniej jedna cyfra się zgadza, *Zimno* w przeciwnym wypadku. Przykładowo, jeżeli właściwym kodem jest 014, to odpowiedzi sondy na 099 i 014 są oba *Ciepło*, ale odpowiedzią na 140 jest *Zimno*. Jaka jest minimalna liczba m taka, że Iza może sobie zagwarantować, że po zastosowaniu sondy m razy będzie wiedzieć, jaki jest kod odblokowujący sejf?

Rozwiązanie:

Najpierw udowodnimy, że $m \leqslant 13$, pokazując strategię Izy, która pozwala jej zawsze odgadnąć kod w 13 zastosowaniach sondy. Wygląda ona następująco: w pierwszych 10 próbach wpisuje kod aaa dla każdej cyfry $0 \leqslant a \leqslant 9$. Niech $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ to zbiór takich cyfr a, przy których sonda odpowiedziała *Ciepło* – jest to też zbiór cyfr poprawnego kodu. Niech także b to dowolna cyfra nienależąca do S. Wówczas mamy następujące przypadki:

- $|S| = 1$ – wtedy znamy kod od razu, ponieważ składa się tylko z jednej cyfry.
- $|S| = 2$ – wtedy testujemy kody s_1bb, bs_1b, bbs_1. Jeżeli odpowiedzią na s_1bb jest *Ciepło*, to wiemy, że pierwszą cyfrą kodu jest s_1, a w przeciwnym wypadku pierwszą cyfrą jest s_2. Analogicznie za pomocą bs_1b i bbs_1 poznajemy drugą i trzecią cyfrę poprawnego kodu.
- $|S| = 3$ – wtedy wiemy, że każda z cyfr s_1, s_2, s_3 występuje dokładnie raz w poprawnym kodzie. Testujemy najpierw kody s_1bb i bs_1b. Jeżeli na s_1bb sonda odpowie *Ciepło*, to wiemy, że pierwszą cyfrą jest s_1. Analogicznie w przypadku bs_1b. A jeżeli na oba kody sonda odpowie *Zimno*, to wiemy, że trzecią cyfrą jest s_1. Zatem po tych dwóch kodach znamy pozycję cyfry s_1 – bez straty ogólności załóżmy, że jest to pierwsza cyfra. Wtedy jako ostatni kod testujemy bs_2b – jeżeli sonda odpowie *Ciepło*, to poprawnym kodem jest $s_1s_2s_3$, w przeciwnym przypadku $s_1s_3s_2$.

Zatem 13 prób starczy.

Pokażemy teraz, że nie da się zagwarantować znajomości kodu po 12 próbach. W tym celu najpierw zauważmy, że jeżeli istnieje n kodów spełniających dotychczasowe odpowiedzi sondy, to nie da się zagwarantować wyznaczenia poprawnego kodu w mniej niż $\log_2 n$ prób. Jest tak dlatego, że każda próba daje tylko dwie możliwe odpowiedzi, czyli po zastosowaniu $k < \log_2 n$ prób mamy jedynie $2^k < 2^{\log_2 n} = n$ możliwych zestawów odpowiedzi, czyli z zasady szufladkowej Dirichleta dwa z kodów będą odpowiadać temu samemu zestawowi odpowiedzi sondy.

Rozważmy pierwsze 6 prób, i załóżmy, że na każdą z nich odpowiedzią było *Zimno*. Daje to co najmniej $10 - 6 = 4$ możliwości na każdą cyfrę, czyli co najmniej $4^3 = 64$ możliwe kody. Jeżeli na którąś cyfrę jest więcej niż 4 możliwości, to oznacza, że liczba możliwych kodów jest większa niż 64, czyli wymaga też więcej niż $\log_2 64 = 6$ kolejnych prób sondą, czyli w sumie więcej niż 12. Załóżmy zatem, że każda cyfra ma dokładnie 4 możliwości, i bez straty ogólności załóżmy, że te możliwości to 0,1,2,3. Spójrzmy na siódmą próbę. Ma ona dwa przypadki:

- Każda cyfra z siódmej próby należy do $\{0, 1, 2, 3\}$. Wtedy, jeżeli sonda odpowie *Ciepło*, to pozostawia $4^3 - 3^3 = 37$ możliwych kodów. Ale $\log_2 37 > \log_2 32 = 5$, czyli wymaga to jeszcze co najmniej sześciu kolejnych prób sondą, czyli w sumie co najmniej 13.

- Co najmniej jedna cyfra z siódmej próby nie należy do $\{0, 1, 2, 3\}$. Bez straty ogólności załóżmy, że to pierwsza cyfra. Wtedy, jeżeli sonda odpowie *Zimno*, to na pierwszą cyfrę zostały 4 możliwości, a na pozostałe co najmniej 3, co daje co najmniej $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ możliwych kodów. Ale $\log_2 36 > \log_2 32 = 5$, czyli wymaga to jeszcze co najmniej sześciu kolejnych prób sondą, czyli w sumie co najmniej 13.

Zatem nie da się lepiej niż 13 prób sondą, czyli $m = 13$.

9. Okręgi ω_1 i ω_2 przecinają się w punktach M i N. Prosta l jest styczna do okręgu ω_1 w punkcie A i do ω_2 w punkcie B, przy czym punkt M leży bliżej prostej l niż punkt N. Punkty C i D są odbiciami odpowiednio punktów A, B względem punktu M. Okrąg opisany na trójkącie DCM przecina okręgi ω_1 i ω_2 odpowiednio w punktach E i F, różnych od M. Wykazać, że promienie okręgów opisanych na trójkątach MEF i NEF są równe.

Rozwiązanie:

Udowodnimy najpierw lemat:

Lemat

Prosta EF jest wspólną styczną okręgów ω_1 i ω_2.

Dowód lematu

Niech E' i F' będą punktami styczności wspólnej stycznej do tych okręgów, różnej od l, gdzie $E' \in \omega_1$ i $F' \in \omega_2$. Zauważmy, że jeśli $X = MN \cap AB$ to z potęgi punktu

$$XA^2 = XM \cdot XN = XB^2$$

czyli $XA = XB$. Zatem $MX \parallel AD$, czyli $O_1O_2 \perp AD$, gdzie O_1 i O_2 to środki okręgów ω_1, ω_2. Teraz ponieważ A i E' są symetryczne względem O_1O_2 to dostajemy, że punkty A, D i E' są współliniowe. Analogicznie dowodzimy, że B, C i F' są współliniowe. Zauważmy teraz, że

$$\sphericalangle DCA = \sphericalangle CAB = \sphericalangle DE'M,$$

czyli E' leży na okręgu opisanym na MCD i podobnie F' leży na tym okręgu. Stąd dostajemy, że $E = E'$ i $F = F'$ a to dowodzi tezie lematu.

Przejdźmy teraz do rozwiązania zadania.

Zauważmy, że

$$\sphericalangle ENF = 180^\circ - \sphericalangle NEF - \sphericalangle NFE = 180^\circ - \sphericalangle NME - \sphericalangle NMF = 180^\circ - \sphericalangle EMF.$$

Niech teraz N' będzie odbiciem N względem EF. Z powyższej równości kątów dostajemy, że N' leży na okręgu opisanym na trójkącie MEF. Jednak okręgi opisane na trójkątach NEF i $N'EF$ są symetryczne względem prostej EF, czyli mają równe promienie. Stąd już wynika teza zadania.

10. Punkt D jest dowolnym punktem na boku BC trójkąta ABC. Okręgi ω_1 i ω_2 przechodzą przez A i D, w taki sposób, że BA jest styczne do ω_1, a CA jest styczne do ω_2. Niech BX będzie drugą styczną z punktu B do ω_1, a CY drugą styczną z punktu C do ω_2 ($X \in \omega_1$ i $Y \in \omega_2$). Udowodnić, że okrąg opisany na trójkącie XDY jest styczny do BC.

Rozwiązanie:

Rozważmy inwersję względem okręgu o środku w D i dowolnym promieniu. Obraz punktu lub figury P oznaczmy przez P'. Zobaczmy jaką konfigurację otrzymamy: Punkt D będzie leżał na boku $B'C'$ trójkąta $A'B'C'$. Proste AC i AB przejdą na okręgi opisane na trójkątach $DA'C'$ i $DA'B'$ zatem ω_1' będzie prostą przechodzącą przez A' i styczną do okręgu opisanego na trójkącie $A'B'D$, natomiast ω_2' będzie prostą przechodzącą przez A' i styczną do okręgu opisanego na trójkącie $A'C'D$. Oczywiście X' i Y' będą takimi punktami na ω_1' i ω_2', że okręgi opisane na trójkątach $B'DX'$ i $C'DY'$ są styczne odpowiednio do prostych ω_1' i ω_2'. Obrazem okręgu opisanego na trójkącie DXY jest oczywiście prosta $X'Y'$, zatem naszą tezą jest to, że $X'Y' \parallel BC$. Niech teraz M i N będą punktami przecięcia prostej $B'C'$ z ω_1' i ω_2'. Wtedy z potęgi punktu dostajemy

$$NY'^2 = ND \cdot NC' = NA'^2,$$

czyli N jest środkiem $A'Y'$. Podobnie M będzie środkiem $A'X'$. Zatem $MN \parallel X'Y'$ ale MN to prosta BC, więc dostajemy tezę zadania.

11. W czworokącie wypukłym $ABCD$ półproste BA i CD przecinają się w punkcie P, a półproste BC i AD przecinają się w punkcie Q. Punkt H jest rzutem punktu D na prostą PQ. Udowodnić, że w czworokąt $ABCD$ da się wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy gdy okręgi wpisane w trójkąty ADP i CDQ widać pod tym samym kątem z punktu H.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez ω_1 i ω_2 okręgi wpisane w trójkąty ADP i CDQ, a przez I_1 i I_2 środki tych okręgów. Niech jeszcze $I = PI_1 \cap QI_2$. Załóżmy najpierw, że okręgi ω_1 i ω_2 widać z punktu H pod tym samym kątem. Rozważmy jednokładność o środku w D i ujemnej skali, przekształcającej ω_1 na ω_2. Wtedy $I_1 \mapsto I_2$ i niech R i H' będą obrazami P i H w tej jednokładności. Ponadto niech $S = RI_2 \cap PQ$. Z założenia wiemy, że okrąg ω_2 widać z punktów H i H' pod tym samym kątem, zatem $HI_2 = H'I_2$, czyli punkt I_2 jest równoodległy od równoległych prostych PQ i RH'. Zatem I_2 jest środkiem RS. Niech teraz X będzie punktem w nieskończoności prostej RS. Wtedy

$$(X, I_2; S, R) = 1.$$

Rzutując ten dwustosunek z punktu P na IQ dostajemy, że

$$(I, I_2; Q, T) = 1,$$

ponieważ $PI \parallel RI_2$, gdzie QT jest dwusieczną wewnętrzną kąta $\sphericalangle DQC$ w trójkącie CDQ. Zatem oczywistym staje się, że punkt I jest środkiem okręgu dopisanego do trójkąta CDQ naprzeciwko punktu Q. Podobnie I jest środkiem okręgu dopisanego do trójkąta ADP naprzeciwko punktu P. Zatem jest to ten sam okrąg, który oczywiście jest styczny do boków czworokąta $ABCD$. Pozostaje jedynie zauważyć, że przekształcenia były równoważne, więc możemy odwrócić nasze rozumowanie żeby dostać implikację w drugą stronę.

Spis treści

Treści zadań **3**
Zawody indywidualne grupy młodszej 3
Zawody indywidualne grupy średniej 5
Zawody indywidualne grupy starszej 7
Zawody indywidualne elity 9
Mecz matematyczny grupy młodszej 11
Mecz matematyczny grupy średniej 13
Mecz matematyczny grupy starszej 15

Rozwiązania **17**
Zawody indywidualne grupy młodszej 17
Zawody indywidualne grupy średniej 22
Zawody indywidualne grupy starszej 28
Zawody indywidualne elity 34
Mecz matematyczny grupy młodszej 46
Mecz matematyczny grupy średniej 53
Mecz matematyczny grupy starszej 58