Warsztaty

Dominik Burek

20 września 2018

Zadanie 1. Dowieść, że
$$\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{5-\sqrt{24}}+\sqrt{7-\sqrt{48}}=1.$$

Zadanie 2. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania układu równań
$$\begin{cases} 25x^2+9y^2=12yz \\ 9y^2+4z^2=20xz \\ 4z^2+25x^2=30xy \end{cases}$$
w liczbach rzeczywistych x, y i z.

Zadanie 3. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite n, dla których liczba
$$\sqrt{\frac{25}{2}+\sqrt{\frac{625}{4}-n}}+\sqrt{\frac{25}{2}-\sqrt{\frac{625}{4}-n}}$$
jest też liczbą całkowitą.

Zadanie 4. Wyznacz wszystkie trójki (a,b,c) liczb rzeczywistych spełniające układ równań:
$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=23 \\ a+2b+4c=22 \end{cases}$$

Zadanie 5. Wyznaczyć wszystkie pary (x,y) liczb rzeczywistych spełniających układ równań
$$\begin{cases} (x-y)(x^3+y^3)=7 \\ (x+y)(x^3-y^3)=3 \end{cases}$$

Zadanie 6. Wyznacz wszystkie trójki (x,y,z) liczb rzeczywistych spełniające układ równań:
$$\begin{cases} x^2-(y+z+yz)x+(y+z)yz=0 \\ y^2-(z+x+zx)y+(z+x)zx=0 \\ z^2-(x+y+xy)z+(x+y)xy=0 \end{cases}$$

Zadanie 7. Znaleźć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (a,b) takie, że liczba 2^a+3^b jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 8. Wyznaczyć wszystkie takie pary liczb pierwszych (p,q), że liczby p^2+q^3 i p^3+q^2 są kwadratami liczb całkowitych

Zadanie 9. Niech a i k będą takimi liczbami całkowitymi dodatnimi, że a^2+k jest dzielnikiem liczby $(a-1)a(a+1)$. Udowodnić, że $k \geqslant a$.

Zadanie 10. Liczby całkowite dodatnie a, b, c są parami względnie pierwsze oraz spełniają równanie $a^2+b^2=c^2$. Liczby a i c są nieparzyste. Udowodnić, że $b+c$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 11. Oznaczmy przez $d(n)$ liczbę wszystkich dodatnich dzielników liczby naturalnej n. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele takich n, dla których liczba $\frac{n}{d(n)}$ jest całkowita.

Zadanie 12. Udowodnić, że dla dowolnej nieparzystej liczby naturalnej n liczba $n^{12}-n^8-n^4+1$ jest podzielna przez 2^9.

Zadanie 13. Niech m i n będą liczbami całkowitymi dodatnimi przy czym 24 dzieli $mn+1$. Pokazać, że 24 dzieli $m+n$.

Zadanie 14. Rozwiązać równanie
$$2^x+2009=3^y5^z$$
w liczbach całkowitych nieujemnych x, y i z.

Zadanie 15. Niech m i n będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Pokazać, że liczba

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

jest całkowita.

Zadanie 16. Niech a będzie cyfrą nieparzystą, zaś b cyfrą parzystą. Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n istnieje liczba całkowita dodatnia, podzielna przez 2^n, w której zapisie dziesiętnym nie występują cyfry inne niż a i b.

Zadanie 17. Wyznaczyć wszystkie takie pary dodatnich liczb całkowitych (a, b), że $a-b$ jest liczbą pierwszą i ab jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 18. Niech A i B będą takimi rozłącznymi niepustymi zbiorami, że $A \cup B = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Udowodnić, że istnieją elementy $a \in A$ i $b \in B$, dla których liczba $a^3 + ab^2 + b^3$ jest podzielna przez 11.

Zadanie 19. Niech $n \geqslant m \geqslant 1$ będą liczbami całkowitymi. Pokazać, że liczba

$$\frac{\mathrm{NWD}(m,n)}{n}\binom{n}{m}$$

jest całkowita.

Zadanie 20. Niech a i b będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Udowodnić, że jeśli $a^3 + b^3$ jest kwadratem liczby całkowitej, to $a + b$ nie jest iloczynem dwóch różnych liczb pierwszych.

Zadanie 21. Wykazać, że dla każdej liczby pierwszej $p > 3$ istnieją liczby całkowite x, y, k spełniające warunki: $0 < 2k < p$ oraz

$$kp + 3 = x^2 + y^2.$$

Zadanie 22. Pokazać, że liczba $\binom{2n}{n}$ jest podzielna przez $n + 1$ dla każdej liczby całkowitej dodatniej n.

Zadanie 23. Niech liczby a, b, c i d będą liczbami całkowitymi dodatnimi, przy czym $ab = cd$. Pokazać, że istnieją liczby całkowite dodatnie p, q, r i s takie, że

$$a = pq, \quad b = rs, \quad c = ps, \quad d = qr.$$

Zadanie 24. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Pokazać, że jeśli liczba $2^n + 1$ jest nieparzystą liczbą pierwszą to n jest potęgą dwójki.

Zadanie 25. Niech n będzie taką liczbą całkowitą dodatnią, że suma wszystkich dodatnich dzielników liczby n (oprócz n) plus liczba tych dzielników jest równa n. Udowodnić, że $n = 2m^2$ dla pewnej liczby całkowitej m.

Zadanie 26. Dowieść, że wśród liczb postaci $50^n + (50n+1)^{50}$, gdzie n jest liczbą naturalną występuje nieskończenie wiele liczb złożonych.

Zadanie 27. Rozstrzygnąć, czy istnieje liczba pierwsza p oraz liczby całkowite nieujemne x, y, z spełniające równanie

$$(12x + 5)(12y + 7) = p^z.$$

Zadanie 28. Znaleźć wszystkie pary (m, n) liczb całkowitych, spełniające równanie

$$(m + n)^4 = m^2n^2 + m^2 + n^2 + 6mn.$$

Zadanie 29. Dla dowolnej liczby nieujemnej n liczba całkowita dodatnia a_n ma w układzie dziesiętnym reprezentację postaci

$$1\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}1.$$

Wykazać, że $a_n/3$ jest zawsze sumą dwóch sześcianów liczb całkowitych dodatnich, a nie jest nigdy sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych.

Zadanie 30. Niech $p \geqslant 5$ będzie liczbą pierwszą. Wykazać, że liczba

$$\binom{p^2}{p} - p$$

jest podzielna przez p^5.

Zadanie 31. Niech k i m, przy czym $k > m$, będą takimi dodatnimi liczbami całkowitymi, że liczba $km(k^2 - m^2)$ jest podzielna przez $k^3 - m^3$. Udowodnić, że $(k - m)^3 > 3km$.

Zadanie 32. Wyznaczyć wszystkie takie dodatnie liczby całkowite n, że zapis dziesiętny liczby n^2 składa się tylko z nieparzystych cyfr.

Zadanie 33. Dla jakich k istnieje k parami różnych liczb pierwszych $p_1, p_2, \ldots, p_k$, dla których

$$p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_k^2 = 2010?$$

Zadanie 34. Niech $S(n)$ oznacza sumę cyfr liczby całkowitej dodatniej n. Wyznaczyć największą wartość wyrażenia

$$\frac{S(n)}{S(16n)}.$$

Zadanie 35. Dana jest liczba pierwsza $p \neq 5$ oraz takie liczby całkowite a, b, c, że p jest dzielnikiem obu liczb $a + b + c$ i $a^5 + b^5 + c^5$. Wykazać, że co najmniej jedna z liczb $a^2 + b^2 + c^2$, $a^3 + b^3 + c^3$ jest podzielna przez p.

Zadanie 36. Znaleźć wszystkie takie pary (a, b) różnych liczb całkowitych dodatnich, że liczba $b^2 + ab + 4$ jest podzielna przez liczbę $a^2 + ab + 4$.

Zadanie 37. Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych $x_1, x_2, \ldots, x_{2011}$, $y_1, y_2, \ldots, y_{2011}$ iloczyn

$$(2x_1^2 + 3y_1^2)(2x_2^2 + 3y_2^2)\ldots(2x_{2011}^2 + 3y_{2011}^2)$$

nie jest kwadratem liczby całkowitej

Zadanie 38. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n, mające dokładnie $\sqrt{n}$ dzielników dodatnich.

Zadanie 39. Dowieść, że istnieje taka liczba całkowita $n > 2013$, że w ciągu

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots \binom{n}{2013}$$

każdy wyraz jest dzielnikiem wszystkich wyrazów po nim następujących.

Zadanie 40. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n takie, że $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ dzieli n.

Zadanie 41. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 3$. Udowodnić że suma sześcianów wszystkich liczb naturalnych mniejszych od n, względnie pierwszych z n dzieli się przez n.

Zadanie 42. Pokazać że istnieje 2013 kolejnych liczb naturalnych z których każda jest liczbą złożoną.

Zadanie 43. Niech $d(k)$ oznacza liczbę wszystkich naturalnych dzielników dodatniej liczby całkowitej k. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych dodatnich M, których nie można przedstawić w postaci

$$M = \left(\frac{2\sqrt{n}}{d(n)}\right)^2$$

dla żadnej liczby całkowitej dodatniej n.

Zadanie 44. Niech $S(n)$ oznacza sumę cyfr liczby n. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $S(2n^2 + 3)$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 45. Dana jest dodatnia liczba całkowita n oraz parami różne liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_k$ $(k > 2)$, będące elementami zbioru $\{1, \ldots, n\}$. Ponadto, dla każdego $i = 1, \ldots, k - 1$, liczba n jest dzielnikiem liczby $a_i(a_{i+1} - 1)$. Udowodnić, że n nie jest dzielnikiem liczby $a_k(a_1 - 1)$.

Zadanie 46. Niech n będzie liczbą całkowitą nieparzystą większą od 1 i niech $k_1, k_2, \ldots, k_n$ będą danymi liczbami całkowitymi. Dla każdej spośród $n!$ permutacji $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ zbioru $1, 2, \ldots, n$ przyjmijmy

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i.$$

Dowieść, że istnieją dwie różne permutacje b oraz c takie, że liczba $S(b) - S(c)$ jest podzielna przez $n!$.

Zadanie 47. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 1$. Wyznaczyć liczbę możliwych wartości iloczynu $k \cdot m$, gdzie k, m są liczbami całkowitymi spełniającymi nierówności

$$n^2 \leqslant k \leqslant m \leqslant (n+1)^2.$$

Zadanie 48. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p, dla których liczba

$$\binom{p}{1}^2 + \binom{p}{1}^2 + \ldots + \binom{p}{p-1}^2$$

jest podzielna przez p^3.

Zadanie 49. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $m \geqslant 2$ takie, że każda liczba całkowita n, przy czym $\frac{m}{3} \leqslant n \leqslant \frac{m}{2}$ dzieli liczbę

$$\binom{n}{m-2n}.$$

Zadanie 50. Ciąg $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ jest zdefiniowany następująco: $a_0 = 2$, $a_1 = 4$ oraz

$$a_{n+1} = \frac{a_n a_{n-1}}{2} + a_n + a_{n-1} \quad \text{dla wszystkich liczb całkowitych dodatnich } n.$$

Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p, dla których istnieje taka liczba całkowita dodatnia m, że liczba $a_m - 1$ jest podzielna przez p.

Zadanie 51. Znaleźć wszystkie pary liczb cakowitych dodatnich x i y spełniających równanie

$$(x+y)^2 - 2(xy)^2 = 1.$$

Zadanie 52. Dane są liczby całkowite dodatnie m, n oraz d. Udowodnić, że jeżeli liczby m^2n+1 i mn^2+1 są podzielne przez d, to również liczby m^3+1 i n^3+1 są podzielne przez d.

Zadanie 53. Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których liczba $14^n - 9$ jest pierwsza.

Zadanie 54. Dane są różne liczby pierwsze p, q oraz takie dodatnie liczby całkowite a, b, że liczba aq daje resztę 1 przy dzieleniu przez p, a liczba bp daje resztę 1 przy dzieleniu przez q. Wykaż, że

$$\frac{a}{p} + \frac{b}{q} > 1.$$

Zadanie 55. Wyznacz wszystkie trójki liczb pierwszych p, q, r spełniające układ równań $\{ q = p^2 + 6$
$r = q^2 + 6$.

Zadanie 56. Wyznacz wszystkie takie pary (a, b) dodatnich liczb całkowitych, że liczba $a + b$ jest liczbą pierwszą oraz liczba $a^3 + b^3$ jest podzielna przez 3.

Zadanie 57. Wyznacz wszystkie takie dodatnie liczby całkowite n, dla których obie liczby

$$n^2 + n + 1 \qquad \text{oraz} \qquad n^2 + n + 3$$

są obie pierwsze.

Zadanie 58. Wyznacz wszystkie trójki (a, b, c) liczb nieparzystych dodatnich spełniające zależność

$$\frac{a+c-b}{b+c-a} = \frac{a}{b}.$$

Zadanie 59. Udowodnić, że liczba naturalna $n \geqslant 2$ jest złożona wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby naturalne a, b, x, $y \geqslant 1$ spełniające warunki

$$a + b = n \qquad \text{oraz} \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Zadanie 60. Czy istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, dla której liczbę 2^n można przedstawić w postaci sumy co najmniej dwóch kolejnych dodatnich liczb całkowitych? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 61. Wyznacz wszystkie takie pary (a, b) dodatnich liczb całkowitych, dla których liczby

$$\frac{a+1}{b} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{b+1}{a}$$

są naturalne.

Zadanie 62. Liczby całkowite dodatnie a, b oraz n są takie, że $ab - 1 = n^2$. Pokazać, że

$$|a - b| \geqslant \sqrt{4n - 3}.$$

Zadanie 63. Znaleźć wszystkie takie pary dodatnich liczb całkowitych (x, y), że liczba $2^x + 5^y$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 64. Niech p i q będą dwiema kolejnymi liczbami pierwszymi nieparzystymi. Udowodnić, że $p + q$ jest iloczynem co najmniej trzech liczb naturalnych większych od 1 (niekoniecznie różnych).

Zadanie 65. Dana jest liczba pierwsza $p \neq 3$. Udowodnić, że istnieje niestały ciąg arytmetyczny dodatnich liczb całkowitych $x_1, x_2, \ldots, x_p$, dla którego iloczyn wszystkich wyrazów jest sześcianem liczby całkowitej.

Zadanie 66. Pokazać, że liczba $n^n + (n + 1)^{n+1}$ jest złożona dla nieskończenie wielu całkowitych dodatnich liczb n.

Zadanie 67. Znaleźć wszystkie takie pary liczb całkowitych (x, y) takich, że spełniona jest równość

$$2x^6 + y^7 = 11.$$

Zadanie 68. Liczby całkowite dodatnie n, m oraz k spełniają równość $(n - 1)n(n + 1) = m^k$. Pokazać, że $k = 1$.

Zadanie 69. Wyznacz wszystkie trójki (a, b, c) liczb całkowitych spełniające zależność

$$a^2 + b^2 + c^2 = 20122012.$$

Zadanie 70. Niech $d(n)$ oznacza liczbę dodatnich dzielników liczby n. Wyznacz wszystkie trójki (n, k, p), gdzie n i k to liczby całkowite dodatnie oraz p jest liczbą pierwszą, spełniające zależność

$$n^{d(n)} - 1 = p^k.$$

Zadanie 71. Niech a i b będą takimi dodatnimi liczbami całkowitymi, że $a > b$ oraz liczba $a^3 + b^3 + ab$ jest podzielna przez $ab(a - b)$. Udowodnić, że ab jest sześcianem liczby całkowitej.

Zadanie 72. Znaleźć wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których $2^{n+1} - n^2$ jest liczbą pierwszą.

Zadanie 73. Niech x, y, z będą takimi dodatnimi liczbami całkowitymi, że liczba $\frac{x+1}{y} + \frac{y+1}{z} + \frac{z+1}{x}$ jest całkowita. Niech d oznacza największy wspólny dzielnik liczb x, y oraz z. Pokazać, że

$$d \leqslant \sqrt[3]{xy + yz + zx}.$$

Zadanie 74. Niech a, b, c, d będą takimi liczbami całkowitymi różnymi od zera, że jedyną czwórką liczb całkowitych (x, y, z, t) spełniającą równanie

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0$$

jest $x = y = z = t = 0$. Czy wynika stąd, że liczby a, b, c, d mają jednakowy znak?

Zadanie 75. Załóżmy, że dla pewnej liczby pierwszej p oraz liczb całkowitych a, b, c spełnione są warunki:

$$6 \mid p + 1, \qquad p \mid a + b + c, \qquad p \mid a^4 + b^4 + c^4.$$

Pokazać, że $p \mid a$, $p \mid b$ oraz $p \mid c$.