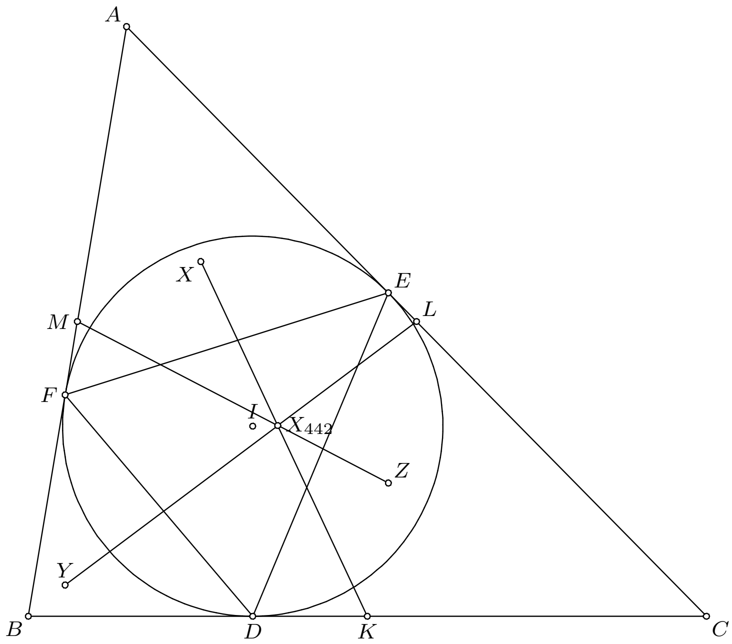
# O tajemniczym punkcie $X_{442}$

Dominik Burek

Zgodnie z przyjętą konwencją, punkt komplementarny do punktu Schifflera oznaczamy jako $X_{442}$. Jeszcze do niedawna nie było znanych wielu własności tego punktu. W niniejszej pracy opiszemy nowe, ekscytujące rezultaty dotyczące $X_{442}$. Uzupełniły one dotychczasowe informacje zawarte w [2].



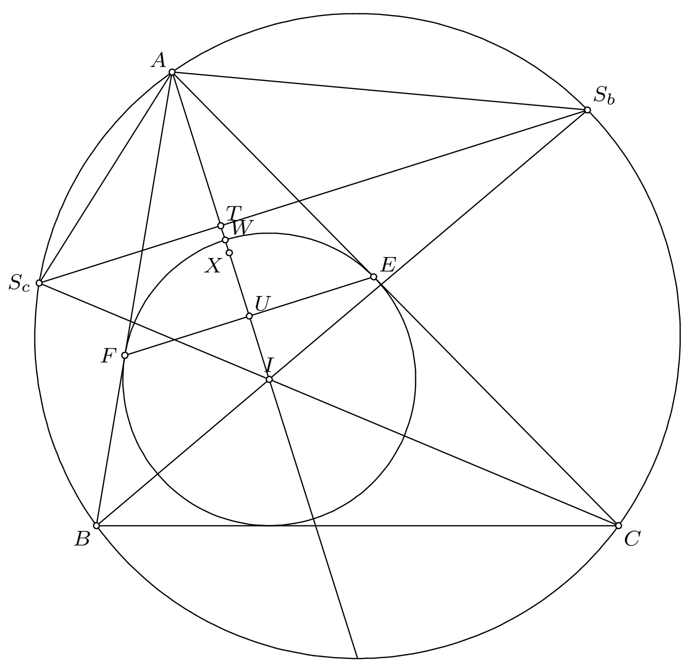

**Oznaczenia:**
$a$, $b$, $c$ - długości boków odpowiednio $BC$, $CA$ i $AB$
$\omega$, $o$ - odpowiednio okrąg wpisany i opisany
$I$, $O$ - środki okręgów odpowiednio wpisanego i opisanego
$K$, $L$, $M$ - środki odpowiednio boków $BC$, $CA$ i $AB$
$D$, $E$, $F$ - punkty styczności okręgu $\omega$ z bokami odpowiednio $BC$, $CA$ i $AB$
$H_a$, $H_b$, $H_c$ - ortocentra odpowiednio trójkątów $IBC$, $ICA$ i $IAB$
$S_a$, $S_b$, $S_c$ - środki łuków odpowiednio $BC$, $CA$ i $AB$ okręgu $o$, niezawierających wierzchołków $A$, $B$ i $C$ w tej kolejności
$X$, $Y$, $Z$ - obrazy punktu $I$ w symetrii względem odpowiednio prostych $EF$, $FD$ i $DE$

**Twierdzenie 1.** (Dominik Burek) Proste $KX$, $LY$ i $MZ$ przecinają się w punkcie $X_{442}$.

*Dowód.* Na początku udowodnimy, że proste $KX$, $LY$ i $MZ$ przecinają się w jednym punkcie, a następnie pokażemy, że jest to punkt $X_{442}$.

Zacznijmy jednak od wprowadzenia kilku niezbędnych faktów, z których będziemy korzystać w dalszej części dowodu.

**Lemat 2.** Prosta $S_bS_c$ jest biegunową punktu $X$ względem okręgu $\omega$.




*Dowód.* Na początku zauważmy, że

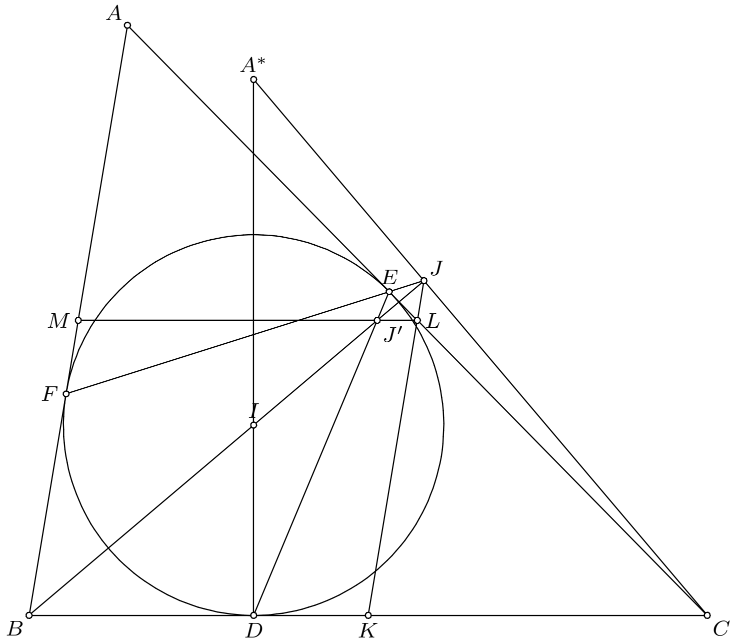
$$\angle IAS_b = \angle IAC + \angle CAS_b = \angle BAI + \angle ABS_b = \angle S_bIA,$$

zatem trójkąt $AS_bI$ jest równoramienny $\Longrightarrow$ $AS_b = S_bI$. Analogicznie $AS_c = S_cI$. Czworokąt $AS_bIS_c$ jest więc deltoidem, co oznacza, że $S_bS_c \perp AI$. Przyjmijmy teraz oznaczenia: $T = S_bS_c \cap AI$, $U = EF \cap AI$, oraz niech prosta $AI$ przecina okrąg $\omega$ w punktach $W$ i $V$ (punkt $W$ leży bliżej punktu $A$). Zachodzą następujące równości:

$$IX \cdot IT = 2 \cdot IU \cdot \frac{1}{2} \cdot AI = IU \cdot AI = IE^2 = IW^2,$$

stąd, $T$ jest obrazem punktu $X$ w inwersji względem okręgu $\omega$. Ponadto leży on na prostej prostopadłej do $AI$ $\Longrightarrow$ prosta $S_bS_c$ jest biegunową punktu $X$ względem okręgu $\omega$. □

**Lemat 3.** Prosta $LM$ jest biegunową punktu $H_a$ względem okręgu $\omega$.




*Dowód.* Niech punkt $A^*$ oznacza biegun prostej $ML$ względem okręgu $\omega$. Na początku pokażemy, że proste $BI$, $EF$, $KL$ i $CA^*$ przecinają się w jednym punkcie. Na półprostej $KL^{\rightarrow}$ obierzmy taki punkt $J$ aby zachodziła równość $JK = KC$.
(*) Skoro punkt $K$ jest środkiem odcinka $BC$, to $KJ = KC = KB \Longrightarrow$ trójkąt $BJC$ jest prostokątny. Stąd,

$$2\angle CBI = \angle CBA = \angle CKJ = 2\angle KBJ.$$

Innymi słowy $\angle CBI = \angle KBJ \Longrightarrow J \in BI$.
(**) Zauważmy, że zachodzi równość

$$EL = EC - LC = \frac{1}{2}(BC + CA - AB) - \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BC - \frac{1}{2}AB = KC - KL = KJ - KL = JL.$$

Stąd,

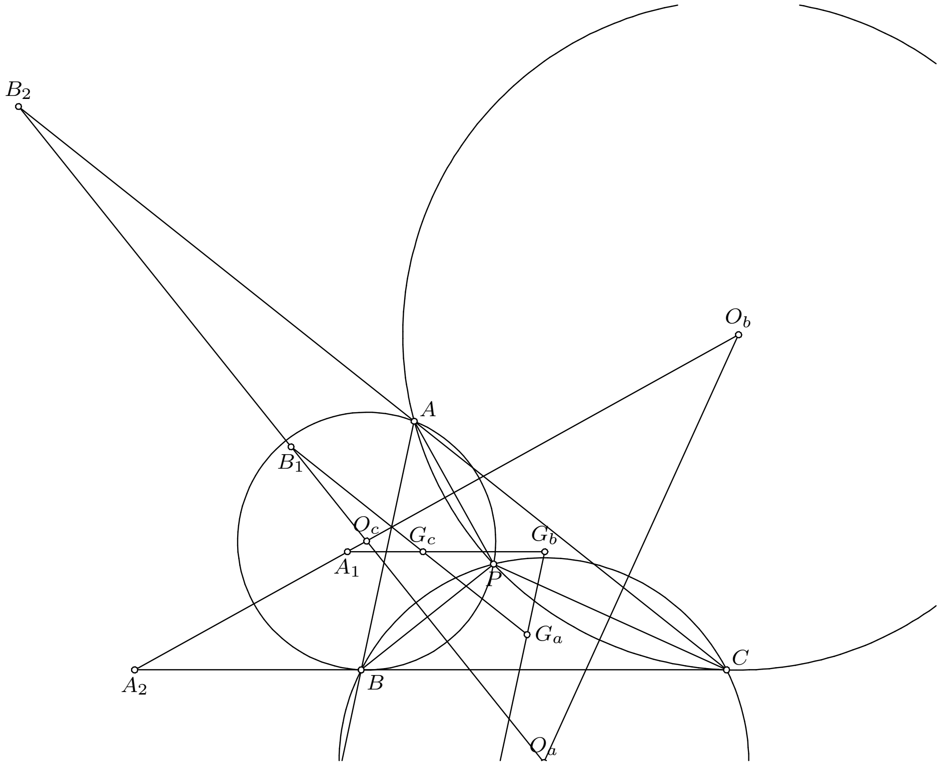
$$\frac{EL}{CE} = \frac{JL}{CD}.$$

Oznacza to, że trójkąty $ELJ$ i $CDE$ są równoramienne i podobne, z czego łatwo uzyskujemy, że $J \in EF$.

Proste $EF$, $KL$ i $BI$ mają więc punkt wspólny $J$. Analogiczne rozumowanie pokazuje, że proste $ML$, $DE$ i $BI$ również przecinają się w jednym punkcie - oznaczmy go przez $J'$.
(***) Ponieważ proste $DE$ i $ML$ są biegunowymi punktów odpowiednio $C$ i $A^*$ względem $\omega$, widzimy że punkt $J'$ jest biegunem prostej $A^*C$ względem $\omega$. Jednakże $J' \in BI$, stąd $BI \perp A^*C$ $\Longrightarrow J \in A^*C$.

Tym samym dowiedliśmy, że proste $BI$, $EF$, $KL$ i $CA^*$ przecinają się w punkcie $J$. Mając na uwadze warunek $A^*I \perp EF$ wnioskujemy, że $A^*I \perp BC$. Łącząc to z zależnością $BJ \perp A^*C$, uzyskujemy równość $A^* = H_a$, czyli tezę lematu. $\square$

**Twierdzenie 4.** (Schiffler) Proste Eulera trójkątów $IBC$, $ICA$ i $IAB$ przecinają się w jednym punkcie, zwanym punktem Schifflera $X_{21}$.




*Dowód.* Pokażemy ogólniejszy rezultat: *Wewnątrz trójkąta $ABC$ dany jest punkt $P$. Punkty $O_a$, $O_b$, $O_c$ są środkami okręgów opisanych odpowiednio na trójkątach $PBC$, $PCA$ i $PAB$. Wówczas, proste Eulera trójkątów $PBC$, $PCA$ i $PAB$ przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy gdy proste $AO_a$, $BO_b$ i $CO_c$ przecinają się w jednym punkcie.*

Niech punkty $G_a$, $G_b$ i $G_c$ będą środkami ciężkości odpowiednio trójkątów $PBC$, $PCA$ i $PAB$. Ponadto przyjmijmy nastepujące oznaczenia $G_bG_c \cap O_bO_c = A_1$, $G_cG_a \cap O_cO_a = B_1$, $G_aG_b \cap O_aO_b = C_1$, $O_bO_c \cap BC = A_2$, $O_cO_a \cap CA = B_2$, $O_aO_b \cap AB = C_2$. Na podstawie twierdzenia Desarguesa, proste Eulera trójkatów $PBC$, $PCA$ i $PAB$ przecinają się w jedym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy punkty $A_1$, $B_1$ i $C_1$ są współliniowe. Jednakże na mocy twierdzenia Menelausa jest to równoważne związkowi:

$$\frac{A_1G_b}{A_1G_c} \cdot \frac{B_1G_c}{B_1G_a} \cdot \frac{C_1G_a}{C_1G_b} = 1.$$

Zauważmy ponadto, że

$$G_bG_c \parallel BC, \qquad G_cG_a \parallel CA, \qquad G_aG_b \parallel AB.$$

Pierwsza z równoległości wynika z faktu, że środek ciężkości trójkąta dzieli środkowe w stosunku $2:1$ licząc od wierzchołków trójkąta oraz proste $BG_c$ oraz $CG_b$ przechodzą przez środek odcinka $AP$. Pozostałych dowodzi się analogicznie. Zatem otrzymujemy równości:

$$\frac{A_1G_b}{A_1G_c} = \frac{A_2B}{A_2C}, \qquad \frac{B_1G_c}{B_1G_a} = \frac{B_2C}{B_2A}, \qquad \frac{C_1G_a}{C_1G_b} = \frac{C_2A}{C_2B}.$$

Stąd

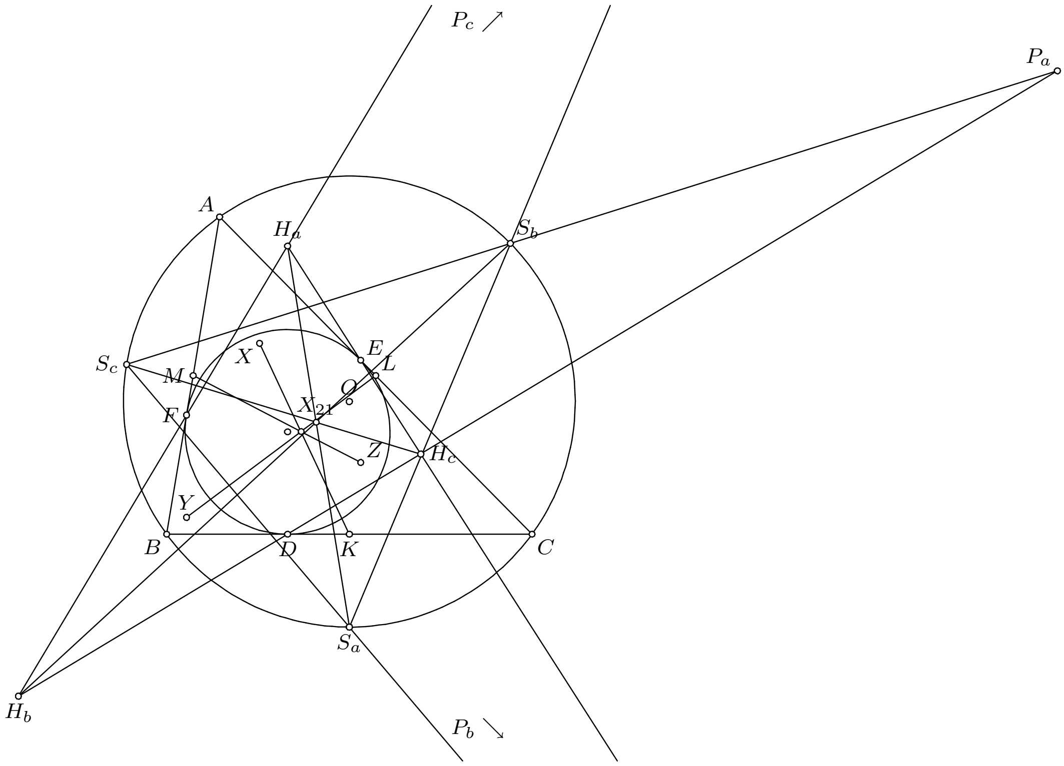
$$\frac{A_1G_b}{A_1G_c} \cdot \frac{B_1G_c}{B_1G_a} \cdot \frac{C_1G_a}{C_1G_b} = \frac{A_2B}{A_2C} \cdot \frac{B_2C}{B_2A} \cdot \frac{C_2A}{C_2B}.$$

Ostatni czynnik na mocy twierdzeń Desarguesa i Menelausa jest równy 1 wtedy i tylko wtedy, gdy proste $AO_a$, $BO_b$ i $CO_c$ przecinają się w jednym punkcie, co należało dowieść.

Kładąc $P = I$ otrzymujemy twierdzenie Schifflera, gdyż na podstawie wniosków zawartych w dowodzie lematu 2, środkami okręgów opisanych na trójkątach $IBC$, $ICA$ i $IAB$ są odpowiednio punkty $S_a$, $S_b$, $S_c$, a proste $AS_a$, $BS_b$, i $CS_C$ oczywiście przecinają się w punkcie $I$. □

*Uwaga.* Można pokazać, że punkt Schifflera leży również na prostej Eulera trójkąta $ABC$.

Przejdźmy do dowodu twierdzenia 1. Aby pokazać współpękowość prostych $KX$, $LY$ i $MZ$, w myśl twierdzenia La Hire'a wystarczy udowodnić, że ich bieguny względem okręgu $\omega$ leżą na jednej prostej. Skonstruujmy zatem biegun prostej $KX$. Należy on do biegunowych punktów $K$ i $X$ względem okręgu $\omega$. Na podstawie lematu 2 biegunową punktu $X$ względem okręgu $\omega$ jest prosta $S_bS_c$. Punkt $K$ jest punktem przecięcia prostych $KM$ i $KL$. W takim razie biegunowa punktu $K$ zawiera bieguny prostych $KM$ i $KL$. Wykorzystując zatem lemat 3, widzimy, że biegunową punktu $K$ względem okręgu $\omega$ jest prosta $H_bH_c$. Dzięki temu łatwo zauważamy, że biegunem prostej $KX$ jest punkt $P_a$ - przecięcie prostych $H_bH_c$ i $S_bS_c$. Analogicznie biegunami prostych $LY$ i $MZ$ względem okręgu $\omega$ są odpowiednio punkty $P_b$ i $P_c$.




Pozostało nam jedynie pokazać, że punkty $P_a$, $P_b$ i $P_c$ są współliniowe. Jednakże jest to równoważne wykazaniu istnienia osi perpektywicznej trójkątów $S_aS_bS_c$ i $H_aH_bH_c$. W świetle twierdzenia Desarguesa wystarczy wskazać środek perpektywiczny tych trójkątów, czyli udowodnić współpękowość prostych $S_aH_a$, $S_bH_b$ i $S_cH_c$. Wykorzystując rozumowanie zawarte w dowodzie lematu 2, widzimy, że punkty $S_a$, $S_b$ i $S_c$ są środkami okręgów opisanych na trójkątach odpowiednio $IBC$, $ICA$ i $IAB$. Jak wiemy, punkty $H_a$, $H_b$ i $H_c$ to ortocentra trójkątów $IBC$, $ICA$ i $IAB$ - w tej kolejności. W takim razie proste $S_aH_a$, $S_bH_b$ i $S_cH_c$ są prostymi Eulera odpowiednio trójkątów $IBC$, $ICA$ i $IAB$. Proste te przecinają się w jednym punkcie $X_{21}$ na mocy twierdzenia Schifflera - tym samym pokazaliśmy współpękowość prostych $KX$, $LY$ i $MZ$.

Aby wykazać, że punktem przecięcia prostych $KX$, $LY$, $MZ$ jest punkt $X_{442}$, użyjemy współrzędnych barycentrycznych względem trójkąta $ABC$ (czytelników nieznających tej metody odsyłamy do [2]).

Współrzędne barycentryczne punktów $K$, $L$ i $M$ wynoszą odpowiednio

$$K = (0 : 1 : 1), \qquad L = (1 : 0 : 1), \qquad M = (1 : 1 : 0).$$

Natomiast współrzędne punktów $E$ i $F$ są równe odpowiednio

$$E = \left(\frac{1}{b+c-a} : 0 : \frac{1}{a+b-c}\right), \qquad F = \left(\frac{1}{b+c-a} : \frac{1}{c+a-b} : 0\right).$$

Oczywiście współrzędne punktu $I$ wynoszą $I = (a : b : c)$. Po łatwych rachunkach obliczamy współrzędne barycentryczne punktu $X$ względem trójkąta $ABC$, wynoszą one:

$$X = (a^2b - b^3 + a^2c + 2abc + b^2c + bc^2 - c^3 : -ba^2 + b^3 + bc^2 : -ca^2 + cb^2 + c^3).$$

Współrzędne barycentryczne punktów $Y$ i $Z$ powstają poprzez cykliczne przestawienie stałych $a$, $b$ i $c$ we współrzędnych punktu $X$.

Mając już współrzędne barycentryczne par punktów $(X, K)$, $(Y, L)$ i $(Z, M)$, po żmudnym rachunku dochodzimy do wniosku, że proste $KX$, $LY$ i $MZ$ przecinają się w jednym punkcie o współrzędnych barycentrycznych $(u : v : w)$, gdzie
$u = (b + c)(a^2b - b^3 + a^2c + 2abc + b^2c + bc^2 - c^3)$,
$v = (c + a)(b^2c - c^3 + b^2a + 2abc + c^2a + ca^2 - a^3)$,
$w = (a + b)(c^2a - a^3 + c^2b + 2abc + a^2b + ab^2 - b^3)$.

Na podstawie [2] punktem o powyższych współrzędnych barycentrycznych jest punkt $X_{442}$ trójkąta $ABC$, co kończy dowód twierdzenia 1. $\square$

Używając współrzędnych barycentrycznych w zasadzie pokazaliśmy w inny sposób współpękowość prostych $KX$, $LY$ i $MZ$. Analizując uważnie powyższy dowód widzimy, że pokazaliśmy również, iż punkt $X_{442}$ jest biegunem osi perspektywicznej trójkątów $S_aS_bS_c$ i $H_aH_bH_c$.

W pełni syntetyczny dowód twierdzenia 1 nie jest znany autorowi. A może Czytelnik będzie w stanie go znaleźć?

# Literatura


[1] Ross Honsberger, *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*

[2] Clark Kimberling, *Encyclopedia of Triangle Centers*

[3] Dominik Burek, *Dwustosunek i biegunowe*