
Ćwiczenia z geometrii

Dominik Burek

dominik.burek@uj.edu.pl

ZADANIA

Zadanie 1. W trójkącie ABC punkt I jest środkiem okręgu wpisanego. Punkt P leży wewnątrz trójkąta oraz:

$$\sphericalangle PBA + \sphericalangle PCA = \sphericalangle PBC + \sphericalangle PCB.$$

Pokazać, że $AP \geq AI$.

Zadanie 2. W trójkącie ABC punkt O to środek okręgu opisanego ω . Prosta l przechodzi przez punkt O i przecina ω w punktach Q i Q' oraz proste zawierające boki BC , CA i AB odpowiednio w punktach X , Y i Z . Pokazać, że:

- (1) Okręgi o średnicach AX , BY i CZ mają dwa punkty wspólne T i W .
- (2) Punkt T leży na okręgu ω , natomiast punkt W leży na okręgu Feuerbacha trójkąta ABC .
- (3) Punkt W jest punktem przecięcia prostych *Simsona* punktów Q i Q' względem trójkąta ABC .
- (4) Proste *Simsona* o których mowa wyżej są prostopadłe.
- (5) Prosta TW przechodzi przez ortocentrum H trójkąta ABC .
- (6) Jeśli punkt T' to obraz punktu T względem l to prosta TW jest prostą *Steinera* punktu T' względem trójkąta ABC .

Zadanie 3. W trójkącie ABC punkty H i O to odpowiednio ortocentrum i środek okręgu opisanego. Punkty K , L , M i $N(X_5)$ to środki odpowiednio odcinków BC , CA , AB i OH . Punkty O_1 , O_2 i O_3 to środki okręgów opisanych na trójkątach BOC , COA i AOB w tej kolejności. Punkty W i T to punkty antypodyczne okręgu opisanego (końce średnicy).

- (1) Pokazać, że punkt N jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie KLM (jest to tzw. okrąg *Feuerbacha*).
- (2) Pokazać, że $\sphericalangle BAN = \sphericalangle O_1AC$.
- (3) Pokazać, że proste AO_1 , BO_1 i CO_1 przecinają się w jednym punkcie - X_{54} (jest to tzw. punkt *Kosnity*).
- (4) Pokazać, że jeśli punkty P , Q i R to rzuty punktu X_{54} na boki BC , CA i AB odpowiednio, to środek odcinka NX_{54} jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie PQR .
- (5) Pokazać, że rzuty punktu W na boki trójkąta ABC leżą na jednej prostej (jest to tzw. prosta *Simsona*).
- (6) Pokazać, że obraz prostej *Simsona* punktu W w jednokładności o środku w punkcie W i skali 2, przechodzi przez punkt H .
- (7) Pokazać, że proste *Simsona* punktów W i T są prostopadłe.
- (8) Pokazać, że proste *Simsona* punktów W i T przecinają się na okręgu *Feuerbacha*.

Zadanie 4. W czworokącie $ABCD$ definiujemy punkty $P = AC \cap BD$, $Q = AB \cap CD$ i $R = DA \cap CB$ (taki czworokąt nazywamy czworokątem *pełnym*). Przyjmujemy, że taki czworokąt ma *trzy* przekątne: AC , BD i QR .

- (1) Pokazać, że okręgi opisane na trójkątach ABR , DCR , ADQ i BQC przecinają się w jednym punkcie F (jest to tzw. punkt *Miquel'a* czworokąta *pełnego* $ABCD$).
- (2) Pokazać, że środki okręgów opisanych na trójkątach ABR , DCR , ADQ i BQC leżą na jednym okręgu (jest to tzw. okrąg *Miquel'a*).
- (3) Pokazać, że rzuty punktu F na proste AB , BC , CD i DA leżą na jednej prostej R (jest to tzw. prosta *Simsona* czworokąta $ABCD$).
- (4) Ortocentra trójkątów ABR , DCR , ADQ i BQC leżą na jednej prostej R' (jest to tzw. prosta *Auberta*).
- (5) Pokazać, że proste R i R' są równoległe.
- (6) Pokazać, że prosta R przechodzi przez środek odcinka łączącego punkt F z rzutem punktu F na prostą R' .
- (7) Pokazać, że środki wszystkich przekątnych czworokąta $ABCD$ leżą na jednej prostej R'' (jest to tzw. prosta *Newtona*).
- (8) Pokazać, że prosta R'' jest prostopadła do prostych R' i R .
- (9) Pokazać, że środki okręgów wpisanych i dopisanych trójkątów ABR , DCR , ADQ i BQC (łącznie 16) leżą na czterech nowych okręgach po cztery punkty na każdym.
- (10) Pokazać, że punkt F leży na okręgu *Feuerbacha* trójkąta ograniczonego wszystkimi przekątnymi czworokąta $ABCD$.

Zadanie 5. Niech teraz punkty $ABCD$ leżą na jednym okręgu ω o środku w punkcie O . Punkty H_A , H_B , H_C i H_D to ortocentra trójkątów odpowiednio BCD , CDA , DAB i ABC .

- (1) Pokazać, że okręgi opisane na trójkątach AOC i BOD przechodzą przez punkt F .
- (2) Pokazać, że $F \in QR$.
- (3) Pokazać, że punkt F jest środkiem podobieństwa spiralnego ($A \rightarrow B$, $D \rightarrow C$) oraz ($A \rightarrow D$, $B \rightarrow C$).
- (4) Pokazać, że punkt F jest obrazem punktu P w inwersji względem okręgu ω . Wynika stąd w szczególności, że $OF \perp QR$.
- (5) Pokazać, że punkt $P \in OF$.
- (6) Pokazać, że czworokąty $ABCD$ i $H_A H_B H_C H_D$ są przystające i jeden z nich jest obrazem drugiego w obrocie o kąt 180° wokół pewnego punktu E (tzw. punktu *Eulera* czworokąta $ABCD$).
- (7) Pokazać, że okręgi *Feuerbacha* trójkątów BCD , CDA , DAB i ABC przecinają się w punkcie E .
- (8) Pokazać, że E jest również punktem *Eulera* czworokąta $H_A H_B H_C H_D$.
- (9) Pokazać, że punkt E jest przecięciem prostych $S_X Y Z T$ dla $\{X, Y, Z, T\} = \{A, B, C, D\}$, gdzie $S_a bcd$ oznacza prostą *Simsona* punktu a dla trójkąta bcd względem ω .

Zadanie 6. Punkt G jest środkiem ciężkości trójkąta ABC . Punkty X , Y leżą na bokach AB i AC odpowiednio tak, że na czworokącie $BCXY$ można opisać okrąg. Punkty S i M to środki odpowiednio odcinków XY i BC .

- (1) Pokazać, że $\sphericalangle BAS = \sphericalangle MAC$.
- (2) Pokazać, że jeśli styczne do okręgu opisanego na trójkącie ABC przecinają się w punkcie P to $\sphericalangle CAP = \sphericalangle MAC$.
- (3) Pokazać, że wyżej skonstruowane analogiczne proste AP dla pozostałych wierzchołków trójkąta ABC przecinają się w jednym punkcie (jest to tzw. *Lemoine'a* - X_6).
- (4) Przez punkt X_6 prowadzimy trzy proste równoległe do boków BC , CA i AB . Pokazać, że przecinają one boki trójkąta ABC w sześciu punktach, które leżą na jednym okręgu.

Zadanie 7. W trójkącie ABC , okrąg wpisany jest styczny do boków BC , CA i AB w punktach odpowiednio D , E i F . Okręgi dopisane są styczne do boków BC , CA i AB w punktach X , Y i Z w tej kolejności. Punkty $P(X_{55})$ i $Q(X_{56})$ to środki odpowiednio jednokładności wewnętrznej i zewnętrznej okręgu wpisanego i opisanego w trójkąt ABC .

- (1) Pokazać, że proste AD , BE i CF przecinają się w jednym punkcie (jest to tzw. punkt *Gergonne'a* X_7).
- (2) Pokazać, że punkty X_7 i P są izogonalnie sprzężone.
- (3) Pokazać, że proste AX , BY i CZ przecinają się w jednym punkcie (jest to tzw. punkt *Nagela* X_8).
- (4) Pokazać, że punkty X_7 i X_8 są izotomicznie sprzężone.
- (5) Pokazać, że punkty X_8 i Q są izogonalnie sprzężone.

Zadanie 8. W trójkącie ABC punkt D leży na boku BC . Okrąg ω_1 o środku w punkcie I_1 jest styczny do boków AD i DC oraz do okręgu opisanego na trójkącie ABC . Analogicznie definiujemy okrąg ω_2 (o środku w punkcie I_2).

- (1) Pokazać, że prosta przechodząca przez punkty styczności ω_1 z odcinkami AD i DC zawiera środek I okręgu wpisanego w trójkąt ABC .
- (2) Pokazać, że punkty I , I_1 i I_2 leżą na jednej prostej.¹

Zadanie 9. W trójkącie ABC punkty P i Q są izogonalnie sprzężone. Półproste AP i AQ przecinają bok BC trójkąta w punktach odpowiednio X i Y .

- (1) Pokazać, że:

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{BY}{YC} = \left(\frac{AB}{AC} \right)^2.$$

- (2) Zapisać powyższą równość dla par punktów (X_1, X_1) , (X_2, X_6) .
- (3) Pokazać, że jeśli dla pewnych punktów X i Y na boku BC , zachodzi równość (1) to półproste AX i AY są izogonalne względem kąta BAC .

Zadanie 10. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Prosta AO przecina bok BC w punkcie D . Punkty P i Q leżą odpowiednio na bokach AB i AC , przy czym $DP = BD$ oraz $DQ = CD$. Wykazać, że proste PQ i BC są równoległe.

Zadanie 11. Czworokąt $ABCD$, w którym $\sphericalangle ABC = 90^\circ$, jest wpisany w okrąg. Punkty M i N są rzutami prostokątnymi punktu B odpowiednio na proste AC i AD . Udowodnić, że prosta MN przechodzi przez środek odcinka BD .

¹Saweyama - Theboul't's Theorem

Zadanie 12. Na bokach BC i AC trójkąta ABC budujemy, po jego zewnętrznej stronie, kwadraty $BCDE$ i $ACFG$. Proste AE i BG przecinają się w punkcie H . Wykazać, że proste CH i AB są prostopadłe.

Zadanie 13. Dany jest okrąg o oraz okręgi o_1 i o_2 , styczne wewnętrznie do okręgu o odpowiednio w punktach A i B . Okręgi o_1 i o_2 leżą po jednej stronie prostej l stycznej do nich odpowiednio w punktach D i E . Dowieść, że proste AD i BE przecinają się w punkcie leżącym na okręgu o .

Zadanie 14. Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $AB = AD$ oraz $\sphericalangle DAB = 60^\circ$. Punkt E leży wewnątrz tego czworokąta. Udowodnić, że

$$DE + BE + CE \geq AC.$$

Zadanie 15. W trójkącie ostrokątnym ABC ($AB \neq AC$) okrąg o średnicy BC przecina boki AB i AC w punktach odpowiednio M i N . Punkt O jest środkiem odcinka BC . Dwieścienne kątów $\sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle MON$ przecinają się w punkcie R . Pokazać, że okręgi opisane na trójkątach BMR i CNR mają punkt wspólny leżący na boku BC .

Zadanie 16. Czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu o środku w punkcie I i wpisany w okrąg o środku w punkcie O . Przekątne czworokąta przecinają się w punkcie P . Pokazać, że punkty I , O i P leżą na jednej prostej.

Zadanie 17. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym $\sphericalangle BAC = 45^\circ$. Wysokości tego trójkąta przecinają się w punkcie H . Wykazać, że $AH = BC$.

Zadanie 18. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym $\sphericalangle BAC = 45^\circ$. Wysokości BD i CE przecinają się w punkcie H . Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Pokazać, że czworokąt $DEHO$ jest równoległobokiem.

Zadanie 19. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C jest równy 120° . Dwieścienne kątów wewnętrznych przy wierzchołkach C i B przecinają przeciwległe boki trójkąta ABC w punktach odpowiednio D i E . Pokazać, że $\sphericalangle DEB = 30^\circ$.

Zadanie 20. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C jest równy 60° . Punkty H i O to odpowiednio ortocentrum i środek okręgu opisanego na tym trójkącie. Prosta OH przecina boki CA i CB w punktach odpowiednio P i Q . Pokazać, że $CP = CQ$.

Zadanie 21. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C jest równy 60° . Punkty H , I i O to odpowiednio ortocentrum i środek okręgu wpisanego oraz środek okręgu opisanego na tym trójkącie. Pokazać, że punkty A , B , H , I , O leżą na jednym okręgu.

Zadanie 22. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C jest równy 60° . Dwieścienne kątów wewnętrznych przy wierzchołkach A i B przecinają przeciwległe boki tego trójkąta w punktach odpowiednio D i E . Pokazać, że okręgi opisane na trójkątach CAD i CBE przecinają się na prostej AB .

Zadanie 23. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C jest równy 60° . Dwieścienne kątów wewnętrznych przy wierzchołkach A i B przecinają przeciwległe boki tego trójkąta w punktach odpowiednio D i E . Proste AD i BE przecinają się w punkcie I . Pokazać, że $ID = IE$.

Zadanie 24. W trójkącie ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego. Punkt M jest środkiem odcinka BC . Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi punktów A i B na proste odpowiednio BC i AO . Pokazać, że $MP = MQ$.

Zadanie 25. Dany jest czworokąt $ABCD$ bez pary boków równoległych opisany na okręgu ω o środku w punkcie I . Punkty H_1 , H_2 , H_3 i H_4 to ortocentra trójkątów odpowiednio AIB , BIC , CID i DIA . Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie O . Pokazać, że punkty H_1 , H_2 , H_3 i H_4 i O leżą na jednej prostej.

Zadanie 26. W trójkącie ABC punkt D jest punktem przecięcia dwusiecznej kąta przy wierzchołku A z bokiem BC . Punkty I_1 i I_2 są środkami okręgów wpisanych w odpowiednio trójkąty ABD i ADC . Prosta I_1I_2 przecina proste AB i AC odpowiednio w punktach F i E . Wykazać, że proste AD , BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 27. W trójkącie ABC kąt BCA jest rozwarty oraz $\sphericalangle BAC = 2\sphericalangle ABC$. Prosta przechodząca przez punkt B i prostopadła do BC przecina prostą AC w punkcie D . Punkt M jest środkiem boku AB . Dowieść, że $\sphericalangle AMC = \sphericalangle BMD$.

Zadanie 28. W trójkącie ABC punkty D , E i F leżą na prostych odpowiednio BC , CA i AB . Pokazać, że okręgi opisane na trójkątach AFE , BFD i CED przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 29. Wysokości trójkąta ABC przecinają boki BC , CA i AB w punktach odpowiednio D , E i F . Punkty P i Q są obrazami punktu D w symetrii względem odpowiednio prostych AB i AC . Pokazać, że punkty P , Q , E i F są współliniowe.

Zadanie 30. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ wszystkie kąty wewnętrzne mają równe miary. Wykazać, że symetralna odcinka EA , symetralna odcinka BC i dwusieczna kąta CDE przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 31. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle ACB = 90^\circ$ oraz $AC \neq BC$. Punkty P i Q są takie, że czworokąt $APBQ$ jest kwadratem. Udowodnij, że proste CP i CQ są prostopadłe.

Zadanie 32. Odcinek AB jest średnicą okręgu ω opisanego na czworokącie wypukłym $ABCD$, którego przekątne przecinają się w punkcie E . Proste styczne do okręgu ω w punktach C i D przecinają się w punkcie P . Udowodnić, że $PC = PE$.

Zadanie 33. Punkty A i B leżą na okręgu ω . Punkt S jest środkiem łuku AB . Dwie proste przechodzące przez punkt S przecinają odcinek AB i ω w czterech punktach. Pokazać, że punkty te leżą na jednym okręgu.

Zadanie 34. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg ω . Proste AB i CD oraz AD i BC przecinają się w punktach odpowiednio P i Q . Pokazać, że dwusieczne kątów BPC oraz AQB są prostopadłe.

Zadanie 35. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg ω . Punkty K , L , M i N to środki odpowiednio łuków AB , BC , CD i DA . Pokazać, że proste KM i LN są prostopadłe.

Zadanie 36. Punkt S leży wewnątrz sześciokąta foremnego $ABCDEF$. Udowodnij, że suma pól trójkątów ABS , CDS , EFS jest równa połowie pola sześciokąta $ABCDEF$.

Zadanie 37. W trójkącie ABC średnicami okręgów ω_1 i ω_2 są odpowiednio odcinki AB i AC . Pokazać, że istnieje okrąg styczny do ω_1 i ω_2 , którego środek leży na prostej BC .

Zadanie 38. Dany jest czworokąt $ABCD$, w który można wpisać okrąg. Odcinki AB , BC , CD i DA są średnicami odpowiednio okręgów ω_1 , ω_2 , ω_3 i ω_4 . Dowieść, że istnieje okrąg styczny do każdego z okręgów ω_1 , ω_2 , ω_3 i ω_4 .

Zadanie 39. Okręgi ω_1 i ω_2 o środkach odpowiednio O_1 i O_2 przecinają się w dwóch różnych punktach A i B , przy czym kąt O_1AO_2 jest rozwarty. Prosta O_1B przecina okrąg ω_2 w punkcie C różnym od B , a prosta O_2B przecina okrąg ω_1 w punkcie D różnym od B . Wykazać, że punkt B jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ACD .

Zadanie 40. W czworokącie wypukłym $ABCD$ punkt M jest środkiem przekątnej AC . Wykazać, że jeżeli

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle BMC = \sphericalangle CMD,$$

to na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

Zadanie 41. W trójkącie ABC punkty E i F leżą na bokach odpowiednio AB i AC , przy czym $BE = CF$. Punkt N jest środkiem łuku BAC okręgu opisanego na trójkącie ABC . Pokazać, że punkty A , N , E i F leżą na jednym okręgu.

Zadanie 42. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym $\sphericalangle BAC = 45^\circ$. Wysokości tego trójkąta przecinają się w punkcie H . Wykazać, że $AH = BC$.

Zadanie 43. W trójkącie ostrokątnym ABC punkty M i N są odpowiednio środkami boków AC i BC . Wysokość trójkąta ABC poprowadzona z wierzchołka C przecina odcinek MN w punkcie D . Symetralna boku AB przecina odcinek MN w punkcie E . Wykazać, że $MD = NE$.

Zadanie 44. Dany jest okrąg o środku S oraz punkt D leżący na tym okręgu. Cięciwa AB przecina odcinek SD w punkcie C , różnym od punktu S . Wykazać, że $AB > 2CD$.

Zadanie 45. W trójkącie ABC dwusieczna kąta ACB przecina bok AB w punkcie D . Długości boków BC i AC są równe odpowiednio a i b , a długość odcinka CD jest równa d . Wykazać, że

$$d < \frac{2ab}{a+b}.$$

Zadanie 46. Dany jest trójkąt ABC oraz punkt P . Pokazać, że punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC , wtedy i tylko wtedy gdy rzuty prostokątne punktu P na proste zawierające boki tego trójkąta są współliniowe.

Zadanie 47. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC . Punkty K , L , M są symetryczne do punktu P odpowiednio względem środków boków BC , CA , AB . Wykazać, że proste AK , BL , CM przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 48. W trójkącie ABC kąt ABC jest rozwarty. Punkty P i Q są rzutami punktów A i C na proste odpowiednio BC i AB . Punkty K i L oraz M i N są rzutami punktów odpowiednio P i Q na proste AB i AC oraz CB i CA w tej kolejności. Pokazać, że $KL = MN$.

Zadanie 49. W trójkącie ABC punkt I jest środkiem okręgu wpisanego. Punkt S jest środkiem tego łuku BC okręgu opisanego na trójkącie ABC , który nie zawiera punktu A . Pokazać, że $SB = SI = SC$.

Zadanie 50. W równoległoboku $ABCD$, dwusieczna kąta BAD przecina proste BC i CD w punktach odpowiednio P i Q . Pokazać, że środek okręgu opisanego na trójkącie PQC leży na okręgu opisanym na trójkącie BCD .

Zadanie 51. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AC = BC$. Na odcinku AC wybrano punkt D , który nie jest wierzchołkiem trójkąta ABC . Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABD . Wykazać, że punkty B, C, D, S leżą na jednym okręgu.

Zadanie 52. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt D jest rzutem prostokątnym punktu C na prostą AB . Punkt E jest rzutem prostokątnym punktu D na prostą BC . Punkt F leży na odcinku DE , przy czym

$$\frac{EF}{FD} = \frac{AD}{DB}.$$

Wykazać, że proste CF i AE są prostopadłe.

Zadanie 53. Pokazać, że w trójkącie ABC zachodzi nierówność:

$$\frac{1}{\sqrt{\sin 2A}} + \frac{1}{\sqrt{\sin 2B}} + \frac{1}{\sqrt{\sin 2C}} \leq \sqrt{\frac{p}{r}}$$

gdzie p i r to odpowiednio połowa obwodu i promień okręgu wpisanego w trójkąt.

Zadanie 54. W czworokącie $ABCD$ wpisanym w okrąg zachodzi: $AD < BC$ oraz $CD < AB$. Punkty K i L leżą odpowiednio na bokach AB i BC , przy czym $BK = CD$ oraz $BL = AD$. Odcinki KL i BD przecinają się w punkcie M . Dowieść, że $KM = ML$.

Zadanie 55. Punkt P leży we wnętrzu trójkąta równobocznego ABC . Punkty D, E i F są rzutami prostokątnymi punktu P odpowiednio na boki BC, CA i AB . Udowodnić, że suma pól trójkątów PAF, PBD i PCE nie zależy od wyboru punktu P .

Zadanie 56. Czworokąt wypukły $ABCD$ ($AC \neq BD$) jest wpisany w okrąg o środku w punkcie O . Niech E będzie punktem przecięcia przekątnych AC i BD . Punkt P leży wewnątrz czworokąta $ABCD$, przy czym

$$\sphericalangle PAB + \sphericalangle PCB = \sphericalangle PBC + \sphericalangle PDC = 90^\circ.$$

Dowieść, że punkty O, P i E są współliniowe.

Zadanie 57. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC . Niech D, E, F będą odpowiednio rzutami prostokątnymi punktu P na proste BC, CA, AB . Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie DEF , zaś r jego promieniem. Dowieść, że:

$$[ABC] \geq 3r\sqrt{3r^2 - OP^2}.$$

$[F]$ oznacza pole figury F .

Zadanie 58. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków AC i BC odpowiednio w punktach D i E . Punkt F jest rzutem prostokątnym punktu A na prostą BC . Punkt K jest symetryczny do punktu F względem prostej DE . Dowieść, że punkt K leży na dwusiecznej kąta BAC .

Zadanie 59. Punkty A, B, C, D, E, F leżą w tej kolejności na okręgu. Część wspólna trójkątów ACE i BDF jest sześciokątem wypukłym. Dowieść, że główne przekątne tego sześciokąta przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 60. W trójkąt ABC wpisano okrąg o styczny do boków AB, BC, CA odpowiednio w punktach C_1, A_1, B_1 . Niech X będzie dowolnym punktem wewnątrz trójkąta ABC i niech A_2, B_2, C_2 będą punktami przecięcia z o odpowiednio prostych AX, BX, CX (wybieramy punkty bliższe wierzchołkom trójkąta). Pokazać, że proste A_1A_2, B_1B_2 i C_1C_2 przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 61. W trójkącie ostrokątnym ABC dwusieczna kąta A przecina bok BC i okrąg opisany w punktach odpowiednio L i N . Punkty K i M to rzuty prostokątne punktu L na proste AB i AC w tej kolejności. Pokazać, że pole trójkąta ABC jest równe polu czworokąta $AKNM$.

Zadanie 62. Trójkąt ostrokątny ABC jest wpisany w okrąg o środku O . Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu C na prostą AB , a punkty E i F są rzutami prostokątnymi punktu D odpowiednio na proste AC i BC . Wykazać, że pole czworokąta $EOFC$ jest równe połowie pola trójkąta ABC .

Zadanie 63. W trójkącie ostrokątnym ABC ($BC > CA$), punkty H i O to odpowiednio ortocentrum i środek okręgu opisanego. Punkt F jest spodkiem wysokości opuszczonej z punktu C . Prosta prostopadła do prostej OF przechodząca przez punkt F , przecina prostą AC w punkcie P . Pokazać, że $\sphericalangle FHP = \sphericalangle BAC$.

Zadanie 64. W trójkącie ABC prosta antyrównoległa do boku BC , nazywamy prostą równoległą do stycznej w punkcie A do okręgu opisanego na trójkącie ABC . Przez punkt X_6 trójkąta ABC , prowadzimy trzy proste antyrównoległe do boków tego trójkąta. Pokazać, że przecinają one boki trójkąta w sześciu punktach, które leżą na jednym okręgu (jest to tzw. drugi okrąg Lemoine'a).

Zadanie 65. Punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC . Czym jest punkt izogonalnie sprzężony do punktu P względem trójkąta ABC ?

Zadanie 66. Okręgi ω_1 i ω_2 są styczne zewnętrznie w punkcie I oraz wewnętrznie do okręgu ω . Wspólna styczna w punkcie I do ω_1 i ω_2 przecina ω w punkcie A . Punkty B i C leżą na ω , przy czym prosta BC jest styczna do $I \omega_1$ i ω_2 . Pokazać, że punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC .

Zadanie 67. Okręgi ω_1 i ω_2 o promieniu r przecinają się w punktach A i B , przy czym $|AB| = r$. Z punktu P leżącego na ω_1 prowadzimy styczne do ω_2 , które przecinają ω_1 w punktach X i Y . Pokazać, że prosta XY jest styczna do ω_2 .

Zadanie 68. W trójkącie ABC , prosta l jest styczna do okręgu opisanego ω . Proste l_a , l_b i l_c są obrazami prostej l w symetrii względem boków BC , CA i AB odpowiednio. Pokazać, że proste l_a , l_b i l_c ograniczają trójkąt, którego okrąg opisany jest styczny do ω .

Zadanie 69. W czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg. Prosta l przechodząca przez punkt A , przecina odcinki BC i CD w punktach odpowiednio M i N . Punkty I_1 , I_2 i I_3 to środki okręgów wpisanych w trójkąty odpowiednio ABM , MNC i NDA . Pokazać że ortocentrum trójkąta $I_1I_2I_3$ leży na prostej l .

Zadanie 70. Trójkąty T_1 i T_2 mają równe promienie okręgów wpisanych i opisanych. Czy z tego wynika, że T_1 i T_2 są przystające?

Zadanie 71. W równoległoboku $ABCD$, punkty M i N różne od wierzchołków równoległoboku leżą na bokach AB i BC odpowiednio przy czym $AM = NC$. Proste AN i CM przecinają się w punkcie Q . Pokazać, że prosta DQ jest dwusieczną kąta ADC .

Zadanie 72. W trójkącie równobocznym ABC punkty A_1 , A_2 , B_1 , B_2 , C_1 i C_2 leżą odpowiednio na bokach BC , BC , CA , CA , AB , AB przy czym są wierzchołkami sześciokąta wypukłego, którego wszystkie boki są równe. Pokazać, że proste A_1B_2 , B_1C_2 , C_1A_2 przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 73. W trójkącie ABC punkty K , L i M są środkami odpowiednio boków BC , CA i AB . Punkty X , Y i Z są środkami wysokości opuszczonych z wierzchołków odpowiednio A , B i C . Pokazać, że proste KX , LY i MZ przecinają się w punkcie Lemoine'a trójkąta ABC .

Zadanie 74. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC , CA i AB w punktach odpowiednio D , E i F . Okrąg opisany na trójkącie AEF przecina okrąg opisany na trójkącie ABC kolejny raz w punkcie X . Analogicznie definiujemy punkty Y i Z . Pokazać, że proste XD , YE i ZF przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 75. W trójkącie ABC punkty O , I i H to odpowiednio środek okręgu opisanego, wpisanego oraz ortocentrum. Pokazać, że $OI \leq OH$.

Zadanie 76. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na nierównoramiennym trójkącie ABC . Okrąg wpisany ω w trójkąt ABC jest styczny do boków BC , CA i AB w punktach odpowiednio D , E i F . Przypuśćmy, że $P = DE \cap AB$, $Q = DF \cap AC$, $R = EF \cap BC$, M i N - środki odcinków QE i PF odpowiednio. Pokazać, że proste prostopadłe przechodzące przez punkty O , P i Q do prostych odpowiednio MN , CF i BE przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 77. W trójkącie ABC okrąg przechodzący przez punkty B i C jest styczny do okręgu ω wpisanego w trójkąt ABC w punkcie D . Okrąg dopisany do trójkąta ABC styczny jest do boku BC w punkcie E . Prosta AE przecina ω w punkcie F leżącym bliżej punktu A . Wykazać, że $\sphericalangle FDA = \sphericalangle EDF$.

Zadanie 78. W trójkącie ABC okrąg wpisany ω jest styczny do boku BC w punkcie K . Punkt D jest spodkiem wysokości trójkąta ABC opuszczonej z wierzchołka A . Punkt M jest środkiem odcinka AD . Prosta KM przecina ω w punkcie N . Pokazać, że okrąg opisany na trójkącie BNC jest styczny do ω .

Zadanie 79. W trójkącie ABC okrąg wpisany ω jest styczny do boków BC , CA i AB w punktach odpowiednio D , E i F . Punkt S jest rzutem prostokątnym punktu D na odcinek EF . Prosta EF przecina prostą BC w punkcie T . Prosta AS przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie P . Pokazać, że punkty T , S , D , P leżą na jednym okręgu.

Zadanie 80. Dany jest czworokąt $ABCD$ opisany na okręgu ω o środku w punkcie I . Punkt T jest rzutem punktu I na prostą BD . Pokaż, że prosta BD jest dwusieczną kąta ATC .

Zadanie 81. W trójkącie ABC dwusieczna kąta przy wierzchołku A przecina prostą BC i okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach D i M . Niech ω będzie okręgiem o środku w punkcie M promieniu MB . Prosta l przechodząca przez punkt D , przecina ω w punktach P i Q . Pokaż, że prosta AD jest dwusieczną kąta PAQ .

Zadanie 82. Dany jest okrąg o opisany na trójkącie ostrokątnym ABC . Punkty X , Y i Z są środkami odpowiednio łuków BC , CA i AB okręgu o niezawierających odpowiednich wierzchołków A , B i C . Niech punkty P , Q i R będą środkami boków odpowiednio BC , CA i AB . Pokazać, że biegunowe punktów X , Y i Z względem okręgu ω wpisanego w trójkąt ABC przecinają odpowiednie boki trójkąta PQR w trzech punktach leżących na jednej prostej.

Zadanie 83. W czworokącie wypukłym $ABCD$, nie będącym równoległobokiem, zachodzi równość $AB = CD$. Punkty M i N są odpowiednio środkami przekątnych AC i BD . Dowieść, że rzuty prostokątne odcinków AB i CD na prosta MN są odcinkami o jednakowej długości, równej długości odcinka MN .

Zadanie 84. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC , CA , AB odpowiednio w punktach D , E , F . Punkty M , N , J są odpowiednio środkami okręgów wpisanych w trójkąty AEF , BDF , DEF . Dowieść, że punkty F i J są symetryczne względem prostej MN .

Zadanie 85. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AB = AC$. Na półprostych $AB^{\rightarrow}$ i $AC^{\rightarrow}$ obrano odpowiednio takie punkty K i L leżące poza bokami trójkąta, że $4 \cdot BK \cdot CL = BC^2$. Punkt M jest środkiem boku BC . Proste KM i LM przecinają po raz drugi okrąg opisany na trójkącie AKL odpowiednio w punktach P i Q . Wykazać, że proste PQ i BC są równoległe.

Zadanie 86. W trójkącie ABC punkt I to środek okręgu wpisanego. Niech prosta l będzie styczną do okręgu wpisanego różną od jego boków. Na prostej l wybieramy punkty X , Y , Z takie, że:

$$\sphericalangle AIX = \sphericalangle BIY = \sphericalangle CIZ = 90^\circ$$

Pokaż, że proste AX , BY i CZ przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 87. Niech BC będzie średnicą okręgu ω o środku O . Punkt A leżący na okręgu ω spełnia warunek $0^\circ < \sphericalangle AOB < 120^\circ$. Oznaczmy przez D środek tego łuku AB , który nie zawiera punktu C . Prosta przechodząca przez O i równoległa do DA przecina prostą AC w punkcie J . Symetralna odcinka OA przecina okrąg ω w punktach E i F . Dowieść, że J jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt CEF .

Zadanie 88. W trapezie $ABCD$ przekątne przecinają się w punkcie P . Punkt Q leży pomiędzy równoległymi bokami BC i AD tak, że punkty P i Q leżą po przeciwnej stronie prostej CD oraz $\sphericalangle AQD = \sphericalangle CQB$. Pokazać, że $\sphericalangle BQP = \sphericalangle DAQ$.

Zadanie 89. Na bokach AC i BC trójkąta ostrokątnego ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, prostokąty $ACPQ$ i $BKLC$ o równych polach. Udowodnić, że środek odcinka PL , punkt C oraz środek okręgu opisanego na trójkącie ABC leżą na jednej prostej.

Zadanie 90. Odcinek BD jest dwusieczną kąta $\sphericalangle ABC$ w trójkącie ABC . Punkt M jest środkiem boku AB . Wykazać, że jeśli $\sphericalangle BDM = 90^\circ$, to zachodzi równość $AB = 3BC$.

Zadanie 91. Okrąg wpisany w trójkąt ABC , gdzie $AB \neq AC$, jest styczny do boku BC w punkcie K , zaś M to środek wysokości AD . Odcinek KM przecina okrąg wpisany w trójkąt ABC w punkcie $N \neq K$. Dowieść, że okrąg opisany na trójkącie BCN jest styczny do okręgu wpisanego w trójkąt ABC .

Zadanie 92. Wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$ leży punkt E , dla którego

$$\sphericalangle ADE + \sphericalangle BCE \geq 90^\circ \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle CBE + \sphericalangle DAE \geq 90^\circ.$$

Drugi punkt przecięcia okręgów opisanych na trójkątach BCE i ADE leży wewnątrz tego czworokąta. Dowieść, że jeśli M i N są środkami boków AB i CD , to

$$AB + CD \geq 2MN.$$

Zadanie 93. Odcinki AD , BE , CF są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC . Niech o_A , o_B i o_C będą okręgami dopisanymi do tego trójkąta, st stycznymi odpowiednio do boków BC , CA i AB . Prosta ℓ_A jest wspólną styczną zewnętrzną okręgów o_B , o_C różną od BC , proste ℓ_B i ℓ_C definiujemy analogicznie. Punkty A' , B' , C' to odpowiednio punkty przecięcia prostych ℓ_B i ℓ_C , ℓ_C i ℓ_A oraz ℓ_A i ℓ_B . Wykazać, że proste $A'D$, $B'E$ i $C'F$ przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 94. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i AC trójkąta ABC , przy czym $AE = BD$. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków AD i BE . Okręgi opisane na trójkątach ACD i BEC przecinają się w punktach C i S . Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi punktu S odpowiednio na proste BC i AC . Udowodnić, że punkty P , Q , M , N leżą na jednej prostej.

Zadanie 95. Odcinki AD , BE i CF są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC . Okrąg przechodzący przez punkty B i C jest styczny do prostej EF w punkcie A' . Analogicznie definiujemy punkty B' i C' . Wykazać, że proste AA' , BB' i CC' przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 96. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC i AC odpowiednio w punktach D i E . Środkowa CS przecina ten okrąg w punktach K i L . Punkt P jest punktem przecięcia prostych DK i EL . Dowieść, że proste AB i CP są równoległe.

Zadanie 97. Okrąg o_1 jest styczny do boków AC i BC trójkąta ABC oraz do okręgu opisanego na tym trójkącie w punkcie P . Okrąg o_2 jest styczny do półprostych $CA^\rightarrow$ i $CB^\rightarrow$ oraz jest styczny zewnętrznie do okręgu opisanego na trójkącie ABC w punkcie Q . Wykazać, że

$$\frac{AP \cdot AQ}{BP \cdot BQ} = \left(\frac{AC}{BC} \right)^2.$$

Zadanie 98. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Półproste $AB^\rightarrow$ i $DC^\rightarrow$ przecinają się w punkcie P , a półproste $AD^\rightarrow$ i $BC^\rightarrow$ w punkcie Q . Punkt O leży wewnątrz czworokąta $ABCD$ i spełnia warunek $\sphericalangle BOP = \sphericalangle DOQ$. Udowodnić, że $\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD = 180^\circ$.

Zadanie 99. Dany jest trójkąt ABC oraz punkt D leżący na odcinku BC (różny od punktów B i C). Okrąg ABD przecina odcinek AC ponownie w punkcie E różnym od C . Okrąg ACD przecina odcinek AB ponownie w punkcie F różnym od B . Niech A' będzie punktem symetrycznym do A względem prostej BC . Proste $A'C$ i DE przecinają się w punkcie P , a proste $A'B$ i DF przecinają się w punkcie Q . Udowodnić, że proste AD , BP i CQ przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe.

Zadanie 100. Punkt X leży wewnątrz trójkąta ABC , przy czym

$$XA \cdot BC = XB \cdot AC = XC \cdot AB.$$

Niech I_1 , I_2 , I_3 będą środkami okręgów wpisanych w trójkąty odpowiednio XBC , XCA i XAB . Wykazać, że proste AI_1 , BI_2 i CI_3 przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 101. Dany jest równoległobok $ABCD$ oraz punkt F leżący na odcinku CD . Punkty O_1 , O_2 i O_3 są środkami okręgów opisanych na trójkątach ABF , BCF i ADF . Dowieść, że ortocentrum trójkąta $O_1O_2O_3$ leży na prostej AB .

Zadanie 102. Dwa okręgi ω_1, ω_2 o promieniu 1 przecinają się w punktach X i Y . Odległość pomiędzy ich środkami jest równa 1. Punkt C leży na okręgu ω_1 . Styczne CA i CB do okręgu ω_2 przecinają ω_1 odpowiednio w punktach B' i A' . Proste AA' i BB' przecinają się w punkcie Z . Wyznaczyć $\sphericalangle XZY$.

Zadanie 103. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o . Punkt P leży na prostej BC , przy czym punkty P, B, C leżą na prostej w tej właśnie kolejności. Okrąg ω jest styczny zewnętrznie do okręgu o oraz do odcinków PA i PB odpowiednio w punktach X i Y . Udowodnić, że środek okręgu dopisanego do trójkąta ABC stycznego do odcinka AB leży na prostej XY .

Zadanie 104. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o środku w punkcie O . Punkty E i F są odpowiednio punktami przecięcia półprostych $DA \rightarrow$ z $CB \rightarrow$ i $AB \rightarrow$ z $DC \rightarrow$. Prosta prostopadła do AC i przechodząca przez F przecina prostą EO w punkcie X . Udowodnić, że $\sphericalangle CDX = 90^\circ$.

Zadanie 105. Okrąg o środku I jest wpisany w trójkąt ABC i styczny do jego boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F . Okrąg ω o środku w punkcie A i promieniu AF przecina wysokość trójkąta ABC , poprowadzoną z wierzchołka A , w punkcie P . Prosta DP przecina okrąg ω w punkcie X , zaś prosta XA przecina prostą BC w punkcie S . Dowieść, że punkty P, I, S są współliniowe.

Zadanie 106. Dany jest trójkąt ABC . Punkt M jest środkiem boku BC , a punkt D środkiem tego łuku BC okręgu opisanego na trójkącie ABC , który zawiera punkt A . Punkty I_1, I_2 to środki okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty AMB, AMC . Udowodnić, że punkty A, D, I_1, I_2 leżą na jednym okręgu.

Zadanie 107. Punkty P i Q leżą na boku BC trójkąta ostrokątnego ABC , przy czym $\sphericalangle PAB = \sphericalangle BCA$ oraz $\sphericalangle CAQ = \sphericalangle ABC$. Punkty M i N leżą odpowiednio na prostych AP i AQ , przy czym P jest środkiem odcinka AM oraz Q jest środkiem odcinka AN . Udowodnić, że proste BM i CN przecinają się w punkcie leżącym na okręgu opisanym na trójkącie ABC .

Zadanie 108. Niech ABC będzie trójkątem i niech D będzie punktem styczności okręgu wpisanego w ABC do boku BC . Niech J_b i J_c będą, odpowiednio, środkami okręgów wpisanych w trójkąty ABD i ACD . Udowodnij, że środek okręgu opisanego na trójkącie AJ_bJ_c leży na dwusiecznej kąta $\sphericalangle BAC$.

Zadanie 109. Punkt P należy do tego łuku BC okręgu opisanego na trójkącie ABC , do którego nie należy punkt A . Punkty I_1, I_2 są środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty PAB i PAC . Dowieść, że przy ustalonych punktach A, B, C i zmieniającym się punkcie P , okręgi opisane na trójkątach PI_1I_2 mają punkt wspólny.

Zadanie 110. Okręgi ω_1 i ω_2 są styczne zewnętrznie w punkcie D . Prosta k jest styczna do okręgów ω_1 i ω_2 odpowiednio w punktach A i B . Odcinek AC jest średnicą okręgu ω_1 . Prosta l przechodzi przez punkt C i jest styczna do okręgu ω_2 w punkcie E . Wykazać, że $AC = CE$.

Zadanie 111. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC . Wysokości tego trójkąta przecinają się w punkcie H . Okrąg o średnicy AH przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punktach A i K . Prosta KH przecina odcinek BC w punkcie M . Wykazać, że punkt M jest środkiem odcinka BC .

Zadanie 112. Na bokach trójkąta ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, prostokąty $ABDE$, $BCGF$, $CAHI$. Udowodnić, że symetralne odcinków DF , GI , HE przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 113. Okrąg Ω o środku w punkcie O jest opisany na trójkącie ABC . Okrąg ω o środku w punkcie A przecina odcinek BC w punktach D i E , przy czym punkty B , D , E oraz C są parami różne i leżą w tej właśnie kolejności na prostej BC . Punkty F i G są punktami przecięcia okręgów Ω i ω , przy czym punkty A , F , B , C oraz G leżą w tej właśnie kolejności na okręgu Ω . Niech K będzie drugim punktem przecięcia okręgu opisanego na trójkącie BDF z odcinkiem AB . Niech L będzie drugim punktem przecięcia okręgu opisanego na trójkącie CGE z odcinkiem CA . Przypuśćmy, że proste FK i GL są różne i przecinają się w punkcie X . Udowodnić, że punkt X leży na prostej AO .

Zadanie 114. Punkty O , I są odpowiednio środkami okręgów opisanego i wpisanego w trójkąt ABC . Punkt D jest punktem styczności okręgu wpisanego z bokiem BC , a punkty E i F są odpowiednio punktami przecięcia prostych AI i AO z okręgiem opisanym na trójkącie ABC . Proste FI i ED przecinają się w punkcie S , proste SC i BE — w M , a proste AC i BF — w N . Udowodnić, że punkty M , I , N są współliniowe.

Zadanie 115. Sześciokąt wypukły $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$ jest wpisany w okrąg Ω o promieniu R . Przekątne A_1B_2 , A_2B_3 i A_3B_1 przecinają się w punkcie X . Dla $i = 1, 2, 3$, niech ω_i będzie okręgiem stycznym do odcinków XA_i , XB_i i do łuku A_iB_i okręgu Ω nie zawierającego pozostałych wierzchołków sześciokąta. Niech r_i będzie promieniem okręgu ω_i .

- Udowodnić, że $r_1 + r_2 + r_3 \leq R$.
- Udowodnić, że jeśli $r_1 + r_2 + r_3 = R$, to sześć punktów styczności okręgów ω_i z przekątnymi A_1B_2 , A_2B_3 i A_3B_1 leży na jednym okręgu.