Dwustosunek i biegunowe

Dominik Burek

13 marca 2012

Przedmowa

Geometria od lat spędza sen z powiek olimpijczykom. Umiejętność rozwiązywania zadań tego typu jest bardzo ważna - niemal na każdym konkursie uczestnicy zmagają się z wykazywaniem rozmaitych faktów geometrycznych. Nie ma w Polsce zbyt wielu pozycji uczących geometrii. Praca ta ma na celu rozwijanie geometrycznego "szóstego zmysłu".

Praca jest skierowana do wszystkich czytelników zainteresowanych geometrią - zakładam znajomość podstawowych twierdzeń geometrii euklidesowej oraz rzutowej. Wprowadzę pojęcia biegunowej oraz dwustosunku i pokażę ich kilka interesujących własności. Są one zilustrowane licznymi przykładami wykorzystania w zadaniach olimpijskich. Każdy rozdział kończy się zadaniami do samodzielnego rozwiązania - ma to służyć utrwaleniu nabytej wiedzy przez czytelnika.

Chciałbym serdecznie podziękować mojemu opiekunowi naukowemu Tomaszowi Cieśli za pomoc przy składzie tekstu, tworzeniu rysunków oraz za cenne wskazówki dotyczące pracy.

Dominik Burek

Spis treści

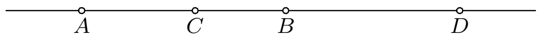
1 Wprowadzenie niezbędnych pojęć

1.1 Dwustosunek

Definicja 1.1. Dane są cztery różne punkty A, B, C, D leżące na jednej prostej w kolejności A, C, B, D. Wartość wyrażenia

$$\frac{AC}{BC} \div \frac{AD}{BD}$$

nazywamy dwustosunkiem czwórki punktów A, B, C, D i zwykle oznaczamy przez $(A, B; C, D)$.



rys. 1.

Jeśli $(A, B; C, D) = 1$, to wtedy mówimy, że punkt C jest sprzężony harmonicznie do punktu D względem pary punktów (A, B) lub czwórka A, B, C, D jest harmoniczna lub para punktów (C, D) jest sprzężona harmonicznie względem pary (A, B).

Wprost z definicji wynikają następujące fakty:

Fakt 1.2. Jeśli punkt C jest sprzężony harmonicznie do punktu D względem pary punktów (A, B), to punkt D jest sprzężony harmonicznie do punktu C względem pary (A, B).

Fakt 1.3. Jeśli para (C, D) jest sprzężona harmonicznie względem pary punktów (A, B), to para punktów (A, B) jest sprzężona harmonicznie względem pary (C, D).

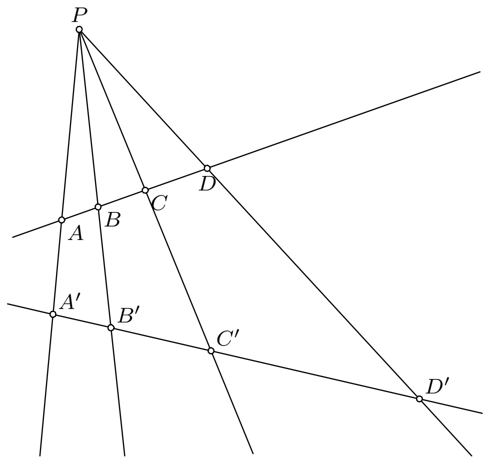
Fakt 1.4. Dla ustalonych trzech punktów A, B, C istnieje dokładnie jeden punkt D taki, że czwórka A, B, C, D jest harmoniczna.

Fakt 1.5. $(A, B; C, D) = (D, C; B, A)$ oraz $(A, B; C, D) = \frac{1}{(B,A;C,D)}$. Jeśli $(A, B; C, D) = 1$, to $(A, B; C, D) = (B, A; C, D) = (A, B; D, C) = 1$.

Fakt 1.6. Jeśli $(A, B; C, D) = (A, B; C, D')$, to $D = D'$.

Udowodnimy teraz bardzo ważne twierdzenie, z którego będziemy korzystać intuicyjnie.

Twierdzenie 1.7. Dany jest punkt P oraz prosta l niezawierająca punktu P. Punkty A, B, C, D leżą na prostej l. Prosta k różna od l niezawierająca punktu P przecina proste PA, PB, PC, PD w punktach odpowiednio A', B', C', D'. Wówczas $(A, C; B, D) = (A', C'; B', D')$



rys. 2.

Dowód. Niech $[F]$ oznacza pole figury F.

Mamy następujące związki:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{[ACP]}{[BCP]} = \frac{\frac{1}{2}AP \cdot CP \cdot \sin\angle APC}{\frac{1}{2}BP \cdot CP \cdot \sin\angle BPC} = \frac{AP}{BP} \cdot \frac{\sin\angle APC}{\sin\angle BPC}$$

i analogicznie

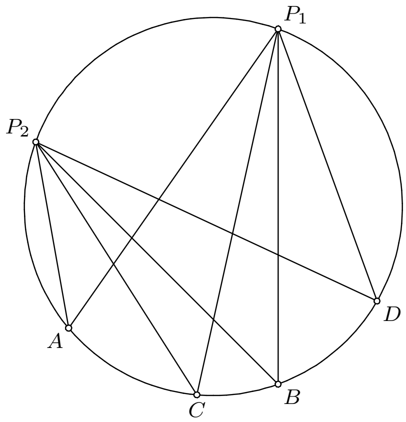
$$\frac{AD}{BD} = \frac{AP}{BP} \cdot \frac{\sin\angle APD}{\sin\angle BPD}$$

Zatem
$$(A, C; B, D) = \frac{AC}{BC} \div \frac{AD}{BD} = \frac{\sin\angle APC}{\sin\angle BPC} \div \frac{\sin\angle APD}{\sin\angle BPD}$$
Dowód twierdzenia został zakończony. □

Twierdzenie 1.7 jest motywacją do tego, aby wprowadzić notację dwustosunku czterech prostych a, b, c i d mających punkt wspólny P, jako liczbę $(a, c; b, d) = P(A, C; B, D) = (PA, PC; PB, PD) = (A, C; B, D)$, gdzie punkty A, B, C i D są odpowiednimi punktami przecięcia prostych a, b, c i d z dowolną prostą nie przechodzącą przez punkt P. Jeżeli $(A, C; B, D) = 1$, to powiemy, że proste a, b, c i d tworzą pęk harmoniczny (w tym przypadku punkty A', B', C' i D' będące odpowiednimi punktami przecięcia prostych a, b, c i d z dowolną prostą nie przechodzącą przez punkt P tworzą czwórkę harmoniczną).

Przyjmijmy jednak następującą umowę. Jeżeli niewspółliniowe punkty X, Y, Z i T są takie, że $X \in a$, $Y \in b$, $Z \in c$ i $T \in d$, gdzie proste a, b, c i d mają punkt wspólny P różny od punktów X, Y, Z i T, to dwustosunek prostych a, b, c i d oznaczymy przez $(a, c; b, d)$ lub $P(X, Z; Y, T)$ lub $(PX, PZ; PY, PT)$, lecz nie oznaczymy go jako $(X, Z; Y, T)$, gdyż punkty X, Y, Z i T nie leżą na jednej prostej. Notacja ta okaże się bardzo wygodna w pewnych konfiguracjach geometrycznych, gdzie kłopotliwe będzie wprowadzanie oznaczeń nowych punktów. Aby zidentyfikować proste, których dwustosunek chcemy obliczyć wskażemy ich punkt wspólny oraz po jednym dowolnym punkcie na każdej z nich (zobaczymy to przy okazji następnego twierdzenia). Jadnakże, przyjmując oznaczenia punktów i prostych jak wyżej należy pamiętać, że $(a, c; b, d) = P(X, Z; Y, T) = (PX, PZ; PY, PT) = (A, C; B, D)$, gdzie punkty A, B, C i D są odpowiednimi punktami przecięcia prostych a, b, c i d z dowolną prostą nieprzechodzącą przez punkt P.

Twierdzenie 1.8. Przypuśćmy, że punkty P_1, P_2, A, B, C, D leżą na okręgu. Wówczas $(P_1A, P_1B; P_1C, P_1D) = (P_2A, P_2B; P_2C, P_2D)$.



rys. 3.

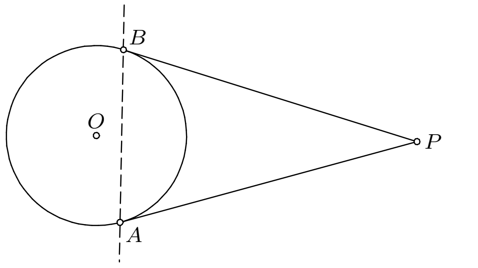
Dowód. Rozważmy dowolną prostą nie przechodzącą przez punkt P_1 i przecinającą proste P_1A, P_1B, P_1C i P_1D w punktach odpowiednio X, Y, Z i T. Na podstawie dowodu twierdzenia 1.7 dostajemy zależność:
$$(P_1A, P_1B; P_1C, P_1D) = (X, Z; Y, T) = \frac{\sin\angle AP_1C}{\sin\angle BP_1C} \div \frac{\sin\angle AP_1D}{\sin\angle BP_1D}.$$
Widzimy, że dwustosunek $(P_1A, P_1B; P_1C, P_1D)$ jest zależny jedynie od kątów AP_1C, BP_1C, AP_1D i BP_1D, a ponieważ punkty P_1, P_2, A, B ,C i D leżą na jednym okręgu, to wykorzystując twierdzenie o równości kątów wpisanych opartych na tym samym łuku ustalonego okregu, otrzymujemy tezę. □

Jeżeli punkty P, A, B, C i D leżą na jednym okręgu ω oraz zachodzi równość $P(A, C, B, D) = 1$, to powiemy, że czworokąt $ABCD$ jest harmoniczny. Na podstawie powyższego twierdzenia, dla dowolnego punktu $Q \in \omega$ mamy równość $Q(A, C; B, D) = 1$. Gdy punkt Q jest jednym z punktów A, B, C lub D wówczas np. prosta AA to styczna do ω w punkcie A.

W geometrii płaszczyzny rzutowej każda prosta oprócz punktów własnych ma jeszcze jeden dodatkowy punkt: swój kierunek lub tzw. punkt w nieskończoności. Kierunek prostej jest tym, co ta prosta ma wspólnego z wszystkimi prostymi do niej równoległymi. Punkt w nieskończoności ustalonej prostej bedziemy w tej pracy oznaczać przez X_∞.

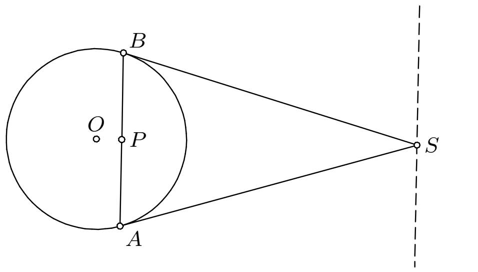
1.2 Biegunowe

Prostą biegunową punktu P względem okręgu ω o środku w punkcie O różnym od P, nazywamy prostą zawierającą obraz inwersyjny punktu P względem ω prostopadłą do OP. Biegunem prostej l względem okręgu ω nazwiemy punkt, którego biegunową względem okręgu ω jest prosta l. Jeśli $P = O$ to biegunową punktu P względem ω jest prosta w nieskończoności i odwrotnie. Natomiast gdy P jest punktem w nieskończoności to jego biegunową względem ω jest linia przechodząca przez O i prostopadła do jakiejś prostej przechodzącej przez punkt P i odwrotnie. Łatwo zauważyć, że:
1) Jeśli punkt P leży na zewnątrz ω, to prowadząc styczne PA i PB do ω, prosta AB jest biegunową punktu P względem ω.



rys. 4.

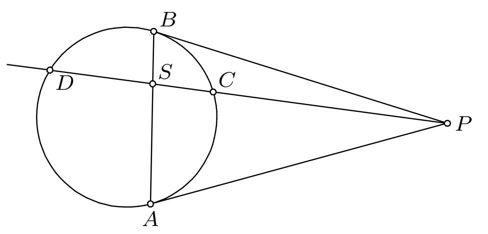
2) Jeśli punkt P leży wewnątrz ω, to przez P prowadzimy cięciwę AB okręgu ω tak, aby punkt P był środkiem odcinka AB. Następnie rysujemy styczne do ω w punktach A i B aż do przecięcia się w punkcie S. Prostą biegunową punktu P względem ω określamy w tym przypadku jako prostą zawierającą punkt S i prostopadłą do OP.



rys. 5.

Pojęcie prostej biegunowej jest jednym z podstawowych elementów geometrii rzutowej, która znajduje swoje zastosowanie w wielu trudnych problemach olimpijskich. Najpierw jednak przedstawimy i udowodnimy kilka własności prostych biegunowych.

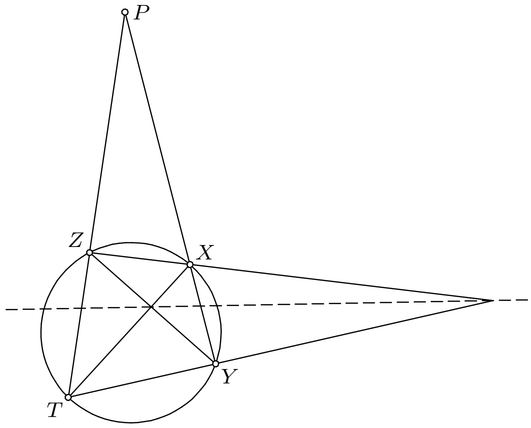
Twierdzenie 1.9. Proste PA i PB są styczne do okręgu ω w punktach odpowiednio A i B. Przez punkt P prowadzimy prostą przecinającą ω w punktach C i D oraz odcinek AB w punkcie S. Wówczas $(D, C; S, P) = 1$.



rys. 6.

Dowód. Z definicji dwustosunku wystarczy pokazać, że $\frac{CS}{SD} = \frac{PC}{PD}$. Zauważmy, że trójkąty PCB oraz PDB są podobne (proste porównanie kątów). Stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa, przeto $\frac{PC}{PD} = (\frac{BC}{BD})^2$, gdyż trójkąty PDB i PCB mają wspólną wysokość. Analogicznie otrzymujemy, iż $\frac{PC}{PD} = (\frac{AC}{AD})^2$. Łącząc powyższe związki uzyskujemy równość $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}$. Stąd $\frac{CS}{SD} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \sin \angle ACB}{\frac{1}{2} \cdot AD \cdot BD \cdot \sin \angle BDA} = \frac{AC}{AD} \cdot \frac{BC}{BD} = (\frac{AC}{AD})^2 = \frac{PC}{PD}$. $\square$

Twierdzenie 1.10. Dwie różne proste przechodzące przez punkt P przecinają okrąg ω w punktach odpowiednio X, Y, oraz Z i T. Wówczas:
1) Przekątne czworokąta $XYZT$ przecinają się na biegunowej punktu P względem ω.
2) Proste XZ oraz YT przecinają się na biegunowej punktu P względem ω.



rys. 7.

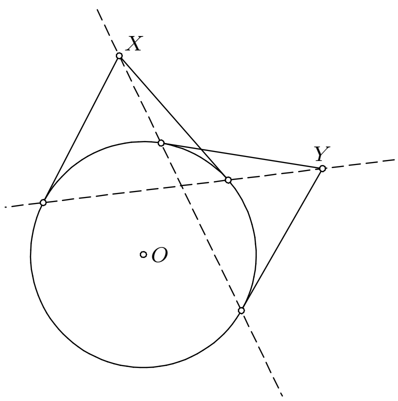
Dowód. Udowodnimy tylko pierwszą część twierdzenia, pokazanie drugiej części proponujemy czytelnikowi jako proste ćwiczenie.
Przyjmijmy oznaczenia $R = XT \cap ZY$, $Q = ZX \cap TY$, $K = QR \cap PZ$, $L = QR \cap PX$. Na mocy twierdzenia 1.7 otrzymujemy równości:

$$(T, Z; K, P) = (Y, X; L, P) = (Z, T; K, P) = \frac{1}{(T, Z; K, P)}.$$

Stąd, $(T, Z; K, P) = (Y, X; L, P) = 1 \Longrightarrow$ punkty K i L leżą na biegunowej punktu P względem okręgu ω, którą jest prosta QR. $\square$

Pokażemy teraz twierdzenie, które jest bardzo użyteczne w wielu zadaniach geometrycznych.

Twierdzenie 1.11 (La Hire)**.** Jeśli punkt X należy do prostej biegunowej punktu Y względem okręgu ω, to punkt Y należy od biegunowej punktu X względem ω.



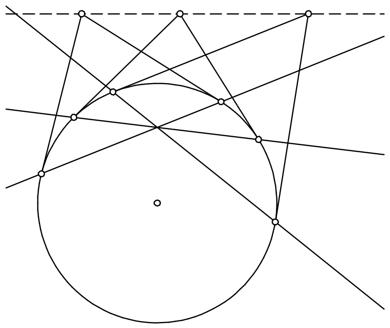
rys. 8.

Dowód. Niech punkt X należy do biegunowej punktu Y. Oznaczmy przez X' i Y' obrazy inwersyjne względem ω odpowiednio punktów X i Y. Biegunowa punktu X jest prostopadła do OX' w punkcie X', oraz trójkąt $OX'Y$ jest prostokątny. Wiemy, że trójkąty $OX'Y$ i $OY'X$ są podobne, stąd punkt X leży na prostej prostopadłej do OY' w punkcie Y', która jest biegunową punktu Y względem ω. $\square$

Wprost z twierdzenia 1.11 wynikają następujące wnioski:

Wniosek 1.12. Jeśli chcemy pokazać, że punkt A należy do prostej l wystarczy pokazać, że biegun prostej l względem ω leży na prostej biegunowej punktu A względem ω.

Wniosek 1.13. Jeśli chcemy pokazać, że trzy punkty są współliniowe, wystarczy udowodnić, że ich proste biegunowe względem ω są współpękowe i na odwrót - jeśli chcemy pokazać, że trzy proste są współpękowe, wystarczy pokazać, że ich bieguny względem ω są współliniowe.



rys. 9.

Oczywiście powyższe wnioski możemy zastosować dla dowolnej liczby punktów i prostych.

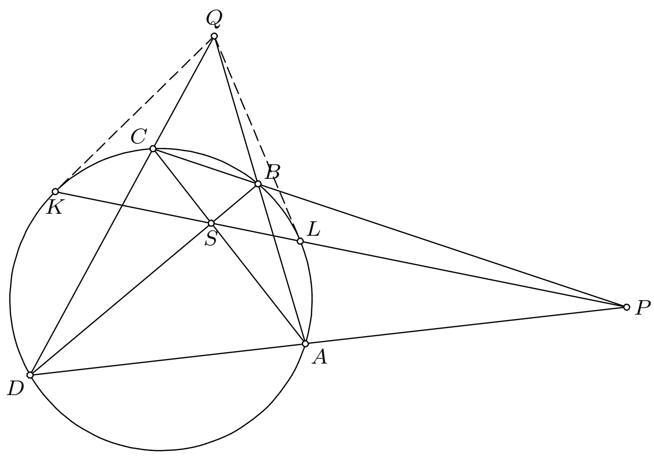
2 Przykłady zastosowań w zadaniach

W tym rozdziale zajmiemy się rozwiązywaniem zadań pochodzących z różnych olimpiad, wykorzystując poznane twierdzenia i definicje.

2.1 Biegunowe

Zacznijmy od czegoś łatwego.

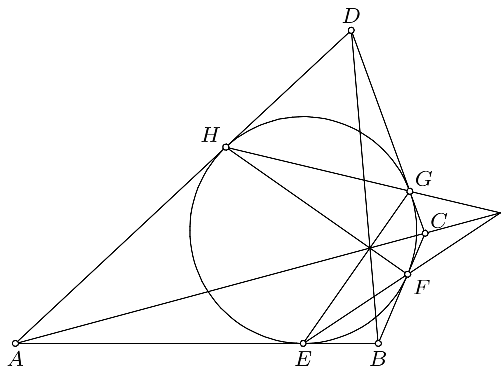
Zadanie 2.1. Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg ω. Punkty przecięcia prostych AD i BC oraz CD i AB to odpowiednio P i Q. Przekątne czworokąta $ABCD$ przecinają się w punkcie S. Prosta PS przecina ω w punktach K i L. Pokaż, że proste QK i QL są styczne do ω odpowiednio w punktach K i L.



rys. 10.

Dowód. Niech proste QK' i QL' bedą stycznymi do ω. Z twierdzenia 1.10 wynika, że prosta PS jest biegunową punktu Q względem ω. Zatem z definicji biegunowej otrzymujemy, iż K i L należą do PS, a to oznacza, że $K = K'$ i $L = L'$. □

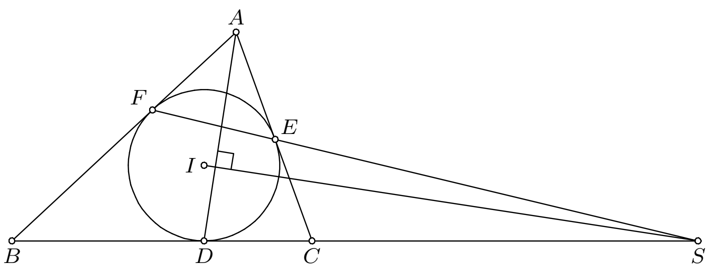
Zadanie 2.2. Okrąg ω wpisany w czworokąt $ABCD$ jest styczny do boków AB, BC, CD, DA odpowiednio w punktach E, F, G, H.
a) Pokaż, że proste AC, EF, GH przecinają sie w jednym punkcie.
b) Pokaż, że proste AC, BD, EG, FH przecinają sie w jednym punkcie. (Jest to szczególny przypadek twierdzenia Brianchona.)



rys. 11.

Dowód. a) Niech przekątne czworokąta $ABCD$, proste EF i GH oraz EH i GF przecinają się w punktach odpowiednio P, Q i R. Punkt Q leży na biegunowych punktów D i B względem ω, stąd korzystając z twierdzenia 1.11 wnioskujemy, iż prosta BD jest biegunową punktu Q względem ω. Analogicznie prosta AC jest biegunową punktu R względem ω. Z twierdzenia 1.10 wynika, że prosta PQ jest biegunową punktu R względem ω, zatem punkty Q, A, C muszą być współliniowe.
b) Teza wynika z dowodu podpunktu a) gdyż punkty A, P, C leżą na biegunowej punktu R względem ω, natomiast punkty D, P, B leżą na biegunowej punktu Q względem ω. □

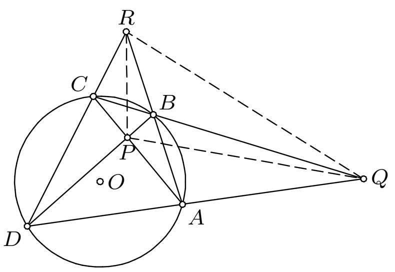
Zadanie 2.3. W trójkącie ABC okrąg ω o środku I jest styczny do boków BC, CA i AB w punktach odpowiednio D, E i F. Proste EF i BC przecinają się w punkcie S. Pokaż, że $SI \perp AD$.



rys. 12.

Dowód. Na mocy twierdzenia 1.11 łatwo zauważamy, że prosta AD jest biegunową punktu S względem ω, zatem $SI \perp AD$. □

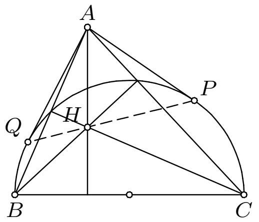
Zadanie 2.4 (twierdzenie Brocarda)**.** W czworokącie $ABCD$ wpisanym w okrąg ω o środku O przekątne, proste AD i BC oraz proste AB i CD przecinają się odpowiednio w punktach P, Q i R. Pokaż, że punkt O jest ortocentrum trójkąta PQR.



rys. 13.

Wskazówka. Na podstawie pierwszego zadania oraz twierdzenia 1.11 widzimy, że proste RP, PQ i QR są biegunowymi odpowiednio punktów Q, R i P względem ω. Zatem $OQ \perp RP$, $OR \perp PQ$ i $OP \perp QR$, stąd punkt O jest ortocentrum trójkąta PQR.

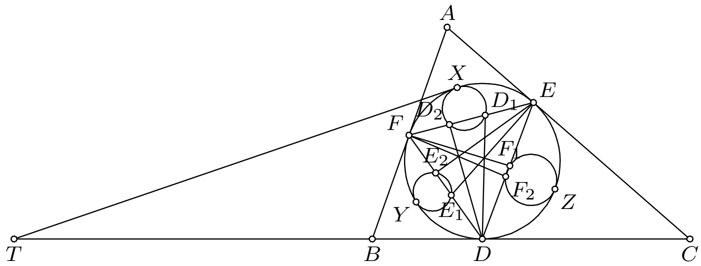
Zadanie 2.5. (Chiny 1996) Niech H będzie ortocentrum trójkąta ABC. Z punktu A rysujemy styczne AP i AQ do okręgu o średnicy BC, gdzie P i Q to punkty styczności. Pokaż, że punkty P, Q, H są współliniowe.



rys. 14.

Dowód. Niech BD i CE będą wysokościami trójkąta ABC. Oczywiście na czworokącie $BCDE$ da sie opisać okrąg ω. Przyjmijmy, że proste ED i BC przecinają się w punkcie R. Wówczas prosta RH to biegunowa punktu A względem ω, jednakże na tej prostej leżą również punkty P i Q. □

Zadanie 2.6. (Autorskie) W trójkącie ABC okrąg wpisany ω jest styczny do boków BC, CA i AB w punktach odpowiednio D, E i F. Proste AD, BE i CF przecinają ω w odpowiednio punktach X, Y i Z. Okrąg ω_1 jest styczny do ω w punkcie X oraz przecina bok EF w punktach D_1 i D_2. Analogicznie definiujemy okręgi ω_2 i ω_3 oraz punkty E_1, E_2 i F_1, F_2. Pokazać, że proste DD_1, EE_1 i FF_1 przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy gdy proste DD_2, EE_2 i FF_2 przecinają się w jednym punkcie.



rys. 15.

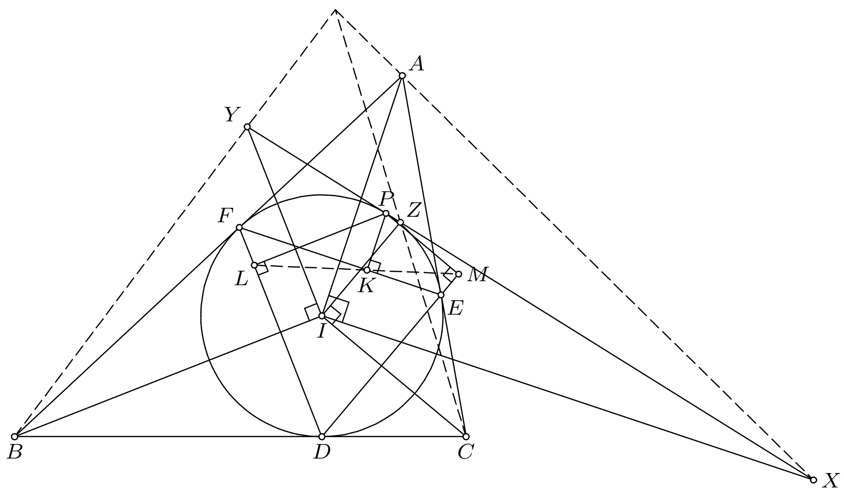
Dowód. Niech wspólna styczna do ω i ω_1 w punkcie X przecina prostą BC w punkcie T. Korzystając z twierdzenia 1.11 widzimy, że punkty E, F i T są współliniowe. Oznaczmy okrąg opisany na trójkącie DD_1D_2 przez o. Łatwo zauważamy, że punkt T jest środkiem potęgowym okręgów ω i ω_1, zatem korzystając z twierdzenia o trzech osiach potęgowych punkt T należy do osi potęgowej ω i o. Jednakże okregi te mają jeden punkt wspólny D, oraz prosta TD jest styczna do ω przeto są one styczne wewnętrznie w punkcie D. Zatem $\angle D_1DF = \angle D_1DB - \angle FDB = \angle D_1D_2D - \angle FED = \angle EDD_2$. Stąd proste DD_1 i DD_2 są izogonalnie sprzężone. Analogicznie dowodzimy, że pary prostych EE_1 i EE_2 oraz FF_1 i FF_2 są izogonalnie sprzężone. Teza zadania jest konsekwencją trygonometrycznej wersji twierdzenia Cevy. □

Przejdźmy do zadań trudniejszych.

Zadanie 2.7. W trójkącie ABC punkt I to środek okręgu wpisanego. Niech prosta l będzie styczną do okręgu wpisanego różną od jego boków. Na prostej l obieramy punkty X, Y, Z takie, że:

$$\angle AIX = \angle BIY = \angle CIZ = 90^\circ \tag{1}$$

Pokaż, że proste AX, BY i CZ przecinają się w jednym punkcie.



rys. 16.

Dowód. Oznaczmy okrąg wpisany w trójkąt ABC przez ω. Niech ω będzie styczny do prostej l oraz boków BC, CA i AB w punktach odpowiednio P, D, E, F. Zrzutujmy punkt P na proste EF, FD, DE otrzymując punkty odpowiednio K, L, M. Zauważmy, że $PK \perp EF \perp AI \perp IX$. Prosta PK jest więc biegunową punktu X względem ω (PX jest styczną do ω). Analogicznie wnioskujemy, iż proste PL oraz PM są biegunowymi punktów odpowiednio Y i Z względem ω. Ponadto wiadomo, że proste EF, FD i ED są biegunowymi punktów odpowiednio A, B, C. Stąd punkt K będący punktem przecięcia biegunowych punktów A i X jest biegunem prostej AX względem ω. Podobnie punkty L i M są biegunami odpowiednio prostych BY i CZ. Korzystając z wniosku 1.13 zauważamy, że wystarczy pokazać współliniowość punktów K, L i M. Jednakże leżą one na prostej Simsona trójkąta DEF. $\square$

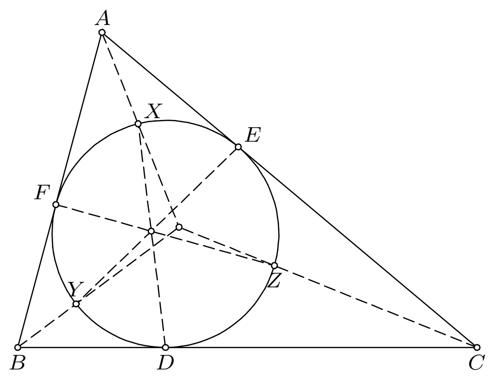
Zadanie 2.8. W trójkącie ABC proste AD, BE i CF są współpękowe (punkty D, E i F leżą na bokach trójkąta). Proste EF, FD i DE przecinają proste BC, CA i AB odpowiednio w punktach X, Y, Z. Rysujemy styczną XU do okręgu ω opisanego na trójkącie ABC (punkt U leży na łuku który nie zawiera punktu A). Analogicznie rysujemy styczne YV i ZW. Pokaż, że proste AU, BV i CW przecinają się w jednym punkcie.

Dowód. Udowodnimy najpierw dwa lematy.

Lemat 2.9. Punkty X, Y, Z są współliniowe.

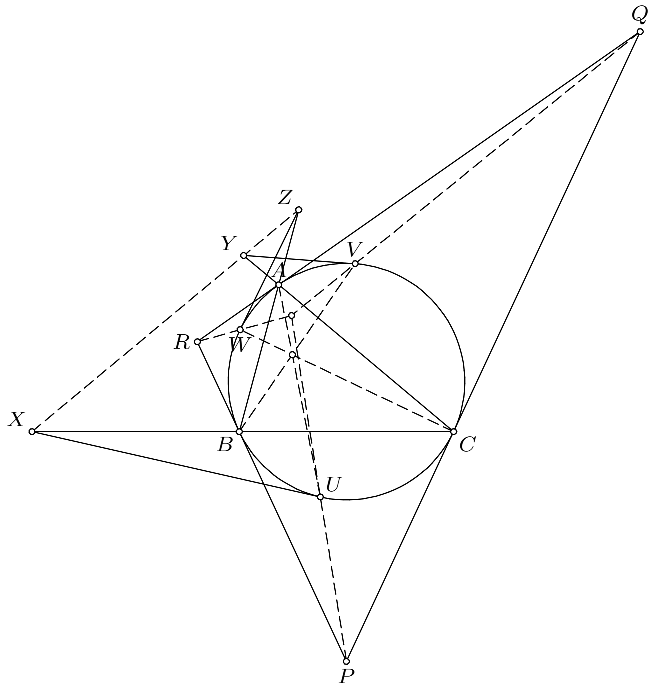
Dowód lematu. Współliniowość punktów X, Y, Z jest konsekwencją twierdzenia Desarguesa dla trójkątów ABC i DEF, które posiadają środek perpektywiczny. Można również to pokazać używając twierdzenia Menelausa dla trójkata ABC i punktów X, Y, Z.

Lemat 2.10 (Steinbart)**.** Okrąg o wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA i AB odpowiednio w punktach D, E i F. Punkty X, Y, Z leżą odpowiednio na krótszych łukach EF, FD i DE okręgu o. Udowodnić, że proste XD, YE, ZF przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy gdy proste AX, BY i CZ przecinają się w jednym punkcie.



rys. 17.

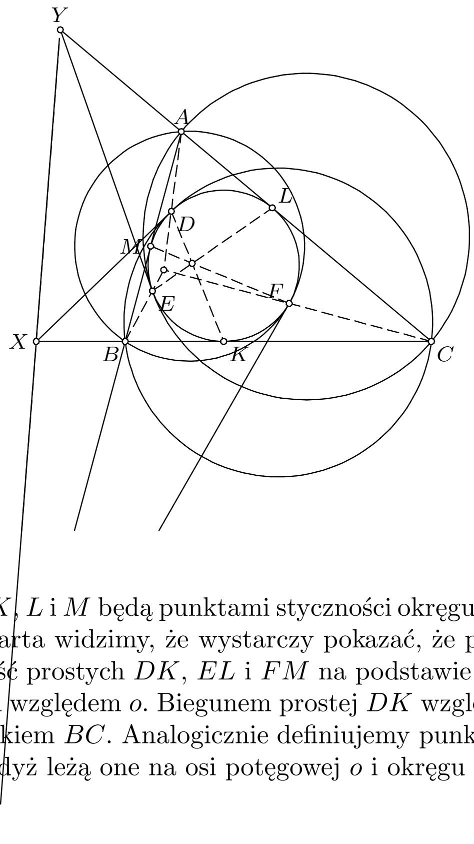
Wskazówka. Obie implikacje można pokazać korzystając z trygonometrycznej wersji twierdzenia Cevy.



rys. 18.

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Poprowadźmy styczne do okręgu ω w punktach A, B, C. Oznaczmy wierzchołki otrzymanego trójkąta przez P, Q i R (punkty P, Q i R leżą naprzeciwko odpowiednio wierzchołków A, B, C). Z lematu 2.10 wynika, że wystarczy pokazać że proste PU, QV, RW przecinają się w jednym punkcie. Stosując wniosek 1.13 widzimy, iż współpękowość prostych PU, QV, RW jest równoważna temu, że ich bieguny względem ω są współliniowe. Jednak punkt X należy do prostej BC czyli biegunowej punktu P względem ω. Zatem korzystając z twierdzenia 1.11 zauważamy, że punkt P należy do biegunowej punktu X względem ω, lecz do tej biegunowej należy również punkt U (prosta XU jest styczna do ω). Oznacza to, że punkt X jest biegunem prostej PU. Analogicznie punkty Y i Z są biegunami odpowiednio prostych QV i RW względem ω. Na podstawie lematu 2.9 otrzymujemy tezę zadania. □

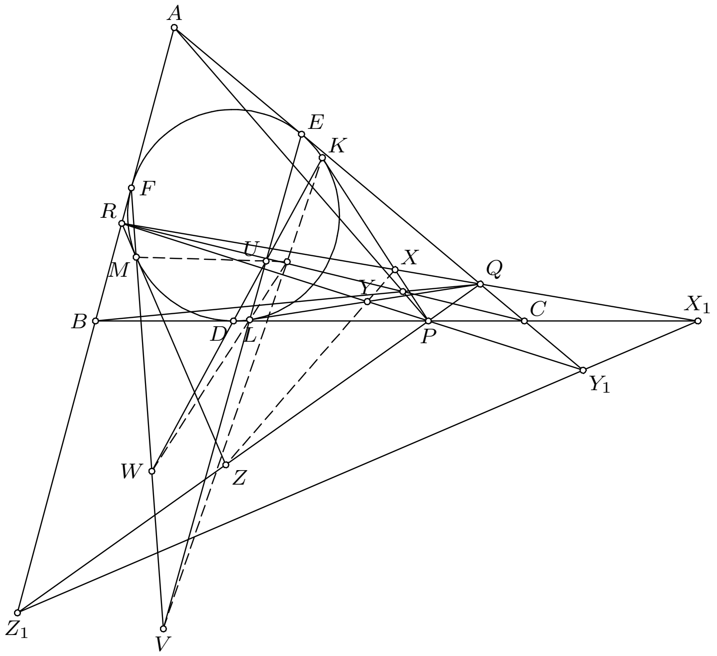
Zadanie 2.11. (Zwardoń 2003) Okrąg o jest wpisany w trójkąt ABC. Okrąg przechodzący przez punkty B i C jest styczny wewnętrznie do okręgu o w punkcie D. Analogicznie definiujemy punkty E i F. Wykazać, że proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.



rys. 19.

Dowód. Niech punkty K, L i M będą punktami styczności okręgu o z bokami odpowiednio BC, CA i AB trójkąta ABC. Z lematu Steinbarta widzimy, że wystarczy pokazać, że proste DK, EL i FM przecinają się w jednym punkcie. Współpękowość prostych DK, EL i FM na podstawie wniosku 1.13 jest równoważna współliniowości biegunów tych prostych względem o. Biegunem prostej DK względem o jest punkt X przecięcia prostej stycznej do o w punkcie D, z bokiem BC. Analogicznie definiujemy punkty Y, Z. Jednakże współliniowość punktów X, Y i Z jest oczywista, gdyż leżą one na osi potęgowej o i okręgu opisanego na trójkącie ABC. □

Zadanie 2.12. W trójkącie ABC okrąg wpisany ω jest styczny do boków BC, CA i AB odpowiednio w punktach D, E i F. Punkty P, Q i R leżą odpowiednio na bokach BC, CA i AB. Punkt X jest punktem przecięcia stycznej do ω poprowadzonej z punktu P różnej od BC z prostą QR. Analogicznie definiujemy punkty Y i Z. Pokaż, że jeśli proste AP, BQ i CR przecinają się w jednym punkcie, to punkty X, Y, Z leżą na jednej prostej.



rys. 20.

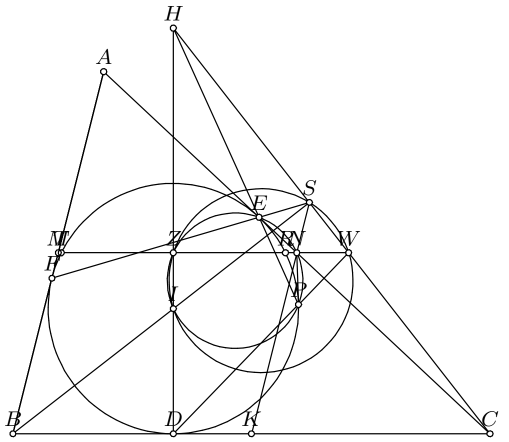
Dowód. Niech PK będzie styczną do ω różną od BC. Analogicznie definiujemy punkty L i M (QL i RM są styczne do ω). Bieguny prostych PQ, QR, i RS względem ω oznaczmy przez odpowiednio U, V i W. Punkt U jest punktem przecięcia prostych DK i LE, gdyż te proste są biegunowymi odpowiednio punktów P i Q. Analogicznie punkt V jest punktem przecięcia prostych LE i FM oraz punkt W jest punktem przecięcia prostych FM i DK. Zauważmy, że punkt X leży na prostej QR czyli na biegunowej punktu V względem ω. Zatem korzystając z twierdzenia 1.11 punkt V leży na biegunowej punktu X względem ω. Jednakże punkt K również należy do tej biegunowej (prosta PX styczna do ω w punkcie K), w efekcie prosta VK jest biegunową punktu X względem ω. Analogiczne rozumowanie pozwala nam stwierdzić, że proste WL i UM są biegunowymi punktów odpowiednio Y i Z względem ω. Korzystając z wniosku 1.13 stwierdzamy, że współliniowość punktów X, Y i Z jest równoważna współpękowości prostych UM, VK i WL. Niech proste QR, RP i PQ przecinają proste odpowiednio BC, CA i AB w punktach X_1, Y_1 i Z_1, w tej kolejności. Na mocy warunków zadania trójkąty ABC i PQR mają środek perpektywiczny, zatem korzystając z twierdzenia Desarguesa posiadają one również oś perpektywiczną i jest nią prosta zawierająca punkty X_1, Y_1, Z_1; w szczególności punkty te są współliniowe. Punkt X_1 leży na prostej QR czyli na biegunowej punktu V względem ω. Korzystając ponownie z twierdzenia 1.11 widzimy, że prosta VD jest biegunową punktu X_1 względem ω. Analogicznie proste UF i WE są biegunowymi punktów odpowiednio Z_1 i Y_1 względem ω. Biorąc pod uwagę to, że punkty X_1, Y_1 i Z_1 jak wyżej pokazaliśmy są współliniowe na mocy wniosku 1.13 wnosimy, że proste UF, VD i WE są współpękowe. Stąd na podstawie twierdzenia Cevy mamy: $\frac{WD}{DU} \cdot \frac{UE}{EV} \cdot \frac{VF}{FW} = 1$ mnożąc to równanie przez $\frac{WK}{KU} \cdot \frac{UL}{LV} \cdot \frac{VM}{MW}$ i korzystając z potęgi punktów U, V i W względem ω uzyskamy zależność $\frac{WK}{KU} \cdot \frac{UL}{LV} \cdot \frac{VM}{MW} = 1$, a to dzięki twierdzeniu odwrotnego do twierdzenia Cevy implikuje współpękowość prostych UM, VK i WL czyli tezę zadania. ☐

Uwaga. W zależności od konfiguracji punkty U, V lub W mogą leżeć zarówno wewnątrz jak i na zewnątrz ω, jednak nie wpływa to w znacznym stopniu na rozwiązanie zadania. W ostatniej części rozwiązania będziemy musieli jedynie skorzystać z twierdzenia Cevy dla punktów leżących wewnątrz boków trójkąta UVW.

Zadanie 2.13. Dany jest okrąg o opisany na trójkącie ostrokątnym ABC. Punkty X, Y i Z są środkami odpowiednio łuków BC, CA i AB okregu o niezawierających odpowiednich wierzchołków A, B i C. Niech punkty P, Q i R będą środkami boków odpowiednio BC, CA i AB. Pokazać, że biegunowe punktów X, Y i Z względem okręgu ω wpisanego w trójkąt ABC przecinają odpowiednie boki trójkąta PQR w trzech punktach leżących na jednej prostej.

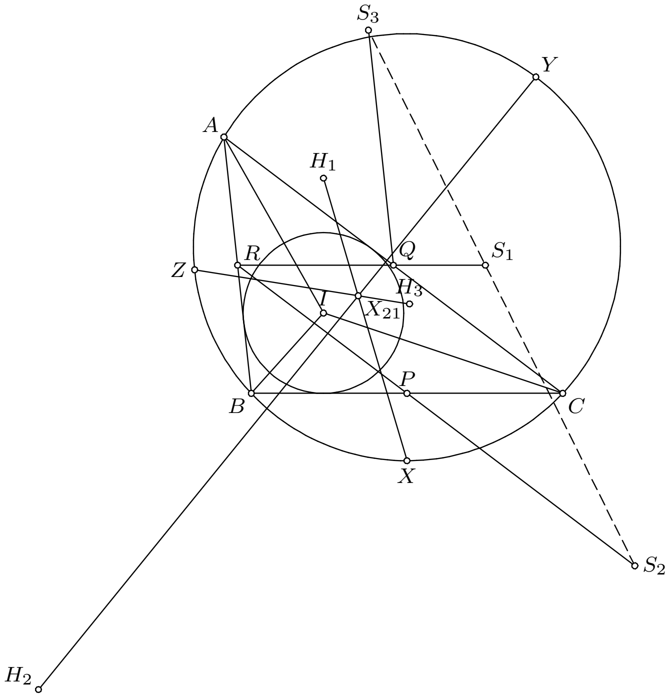
Dowód. Zacznijmy od pokazania lematu, który dotyczy biegunu lini środkowej trójkąta ABC względem okręgu weń wpisanego.

Lemat 2.14. Dany jest okrag ω o środku w punckie I wpisany w trójkąt ABC. Niech punkty M i N będą środkami boków odpowiednio AB i AC. Wówczas biegunem prostej MN względem ω jest ortocentrum trójkąta BIC.



rys. 21.

Dowód. Niech okrąg ω będzie styczny do boków BC, CA i AB w punktach odpowiednio D, E i F. Przyjmijmy, że prosta MN przecina ω w punktach odpowiednio R i T (punkt T leży bliżej punktu N). Jeśli prosta BI przecina prostą EF w punkcie S to na podstawie lematu 2.30 $BS \perp SC$. Zatem ortocentrum H trójkąta BIC jest punktem przecięcia prostych DI i SC. Jednakże $TM \perp ID$, wiec na mocy twierdzenia 1.11 wystarczy pokazać, że punkty H, E i P są współliniowe gdzie P jest punktem styczności drugiej stycznej do ω poprowadzonej z punktu N. Oznaczmy przez K środek boku BC. Wówczas $\angle BSK = \angle KBS = \angle SBA$. Stąd $SK \parallel AB$, zatem $N = SK \cap AC$ oraz łatwo widzimy, że $NE = NS$. Jeśli $W = MN \cap SC$ to $\angle KSC = \angle SCK = \angle SWT$, więc $ST = TW$. Łącząc powyższe równości dostajemy, iż punkt N jest środkiem okręgu opisanego na czworokącie $ESWP$. Jednakże jeśli $Z = MN \cap ID$ to punkty I, Z, P, E i N leżą na jednym okręgu. Podobnie punkty Z, I, S i W leżą na jednym okręgu. Na mocy twierdzenia o trzech osiach potęgowych otrzymujemy tezę lamatu. $\square$



rys. 22.

Przejdźmy do właściwej części zadania. Wprowadźmy oznaczenia H_1, H_2 i H_3 - ortocentra trójątów odpowiednio IBC, ICA i IAB, gdzie I to środek okręgu ω. Na podstawie lematu 2.14 punkty H_1, H_2 i H_3 są biegunami odpowiednio prostych PQ, QR i RP względem ω. Na podstawie twierdzenia 1.11 przecięcie prostej PQ z biegunową punktu X jest biegunem S_1 prostej H_1X względem ω. Analogicznie punkty, których współliniowość wraz z punktem S_1 chcemy pokazać to bieguny S_2 i S_3 prostych odpowiednio H_2Y i H_3Z. Na podstawie wniosku 1.13 wystarczy pokazać, że proste H_1X, H_2Y i H_3Z są współpękowe. Zauważmy ponadto, że punkty X, Y i Z są środkami okręgów opisanych na tójkątach IBC, ICA i IAB w tej kolejności (łatwe przeliczenie na kątach). Proste, których współpękowość należy pokazać są zatem prostymi Eulera trójkątów IBC, IAB i ICA. Jednakże przecinają się one w punkcie Schifflera (X_{21}), leżącym na prostej Eulera trójkąta ABC (jest to znany rezultat czytaj `http://faculty.evansville.edu/ck6/tcenters/recent/schiff.html`). □

W tym miejscu podajemy zadania do samodzielnego rozwiązania.

Zadanie 2.15. Niech punkty P i Q będą dwoma punktami na półokręgu ω o średnicy AB. Styczne do ω poprowadzone z punktów P i Q oraz proste AP i BQ przecinają się odpowiednio w punktach R i S. Pokazać, że $RS \perp AB$.

Zadanie 2.16. (LVII Olimpiada Matematyczna) Okrąg o środku O wpisany w czworokąt wypukły $ABCD$ jest styczny do boków AB, BC, CD, DA odpowiednio w punktach K, L, M, N, przy czym proste KL i MN przecinają się w punkcie S. Dowieść, że proste BD i OS są prostopadłe

Zadanie 2.17. W trójkącie ABC prosta l jest styczną do okręgu ω o środku w punkcie I wpisanego w trójkąt ABC, różną od BC, CA i AB. Prosta l przecina proste zawierające boki trójkąta w punktach odpowiednio M, N i P. Z punktu I prowadzimy proste prostopadłe do prostych IM, IN i IP aż do ich przecięcia z odpowiednimi bokami trójkąta ABC odpowiednio w punktach M_1, N_1 i P_1. Pokazać, że punkty M_1, N_1 i P_1 leżą na jednej prostej.

Zadanie 2.18. Dwa trójkąty ABC i KLM mają wspólny okrąg wpisany ω. Okrąg ω jest styczny do boków BC, CA i AB odpowiednio w punktach D, E i F oraz do boków ML, LK i KM odpowiednio w punktach P, Q i R. Wykazać, że proste AP, BQ i CR przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy proste KD, LE i MF przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 2.19. W trójkącie ABC dane są wysokości AD, BE i CF. Okrąg ω_1 przechodzący przez punkty E i F jest styczny wewnętrznie do okręgu o opisanego na trójkącie ABC w punkcie A_1, leżącym na łuku BC nie zawierającym punktu A. Analogicznie definiujemy okręgi ω_2 i ω_3 oraz punkty B_1 i C_1. Pokazać, że proste AA_1, BB_1 i CC_1 przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 2.20. Okrąg ω o środku w I wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA i AB w punktach odpowiednio D, E i F. Punkty M i N są środkami odpowiednio odcinków AB i BC. Udowodnić, że proste MN, DF i CI przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 2.21. (Autorskie) W tójkącie ABC okrąg ω o środku w punkcie I dopisany do prostej BC jest styczny do boków BC, CA i AB w punktach odpowiednio D, E i F. Punkt P jest rzutem prostokątnym punktu C na prostą BI. Prosta CP przecina ω w punkcie Q. Punkty M i N są środkami odpowiednio odcinków AB i AC. Proste MN i DE przecinają się w punkcie S. Wykazać, że prosta SQ jest styczna do ω.

Zadanie 2.22. (Iran 2009) W trójkącie ABC prosta l jest styczna do okręgu ω wpisanego w ten trójkąt. Prosta l' przecina boki BC, CA i AB w punktach odpowiednio A_1, B_1 i C_1. Z punktu A_1 prowadzimy prostą styczną do ω aż do przecięcia się z prostą l w punkcie A_2. Analogicznie definiujemy punkty B_2 i C_2. Pokazać, że proste AA_2, BB_2 i CC_2 przecinają sie w jednym punkcie.

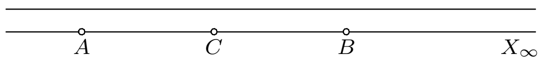
Zadanie 2.23. Dany jest czworokąt $ABCD$ bez pary boków równoległych opisany na okręgu ω o środku w punkcie I. Punkty H_1, H_2, H_3 i H_4 to ortocentra trójkątów odpowiednio AIB, BIC, CID i DIA. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie O. Pokazać, że punkty H_1, H_2, H_3, H_4 i O leżą na jednej prostej.

Zadanie 2.24. (Romanian Masters of Mathematics 2012) Okrągi: wpisany i opisany na trójkącie ABC, mają środki odpowiednio w punktach I i O. Okrąg ω_a przechodzi przez punkty B, C i jest styczny do okregu wpisanego. Analogicznie definiujemy okręgi ω_b i ω_c. Pokazać, że środek potęgowy okręgów ω_a, ω_b i ω_c leży na prostej OI.

2.2 Dwustosunek i cztery lematy

W tym podrozdziale wyprowadzimy kilka lematów dotyczących dwustosunku. Fakty te są łatwe do udowodnienia, jednak ich znajomość przy rozwiązywaniu różnych zadań geometrycznych jest bardzo cenna. Pokażemy to na licznych przykładach.

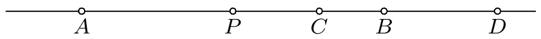
Lemat 2.25. Dane są trzy punkty współliniowe A, B i C takie, że punkt C jest środkiem odcinka AB. Pokaż, że $(A, B; C, X_\infty) = 1$.



rys. 23.

Wskazówka. Zastosuj definicję dwustosunku.

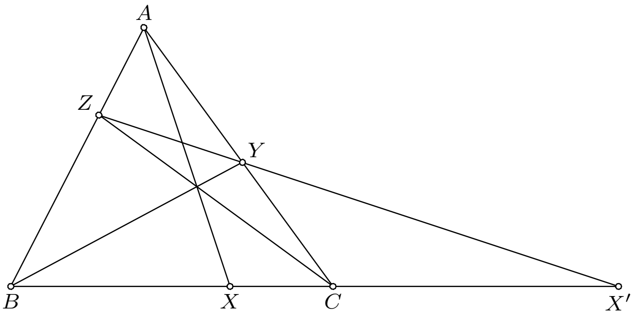
Lemat 2.26 (Newton)**.** Dane są cztery punkty A, C, B i D leżące w tej kolejności na jednej prostej. Punkt P jest środkiem odcinka AB. Pokaż, że $(A, B; C, D) = 1$ wtedy i tylko wtedy gdy $PA^2 = PC \cdot PD$.



rys. 24.

Wskazówka. Po raz kolejny zastosuj definicję dwustosunku.

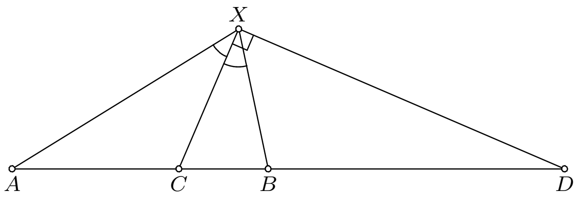
Lemat 2.27. W trójkącie ABC punkty X, Y i Z leżą odpowiednio na bokach BC, CA i AB. Prosta YZ przecina prostą AB w punkcie X'. Pokaż, że $(B, C; X, X') = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy proste AX, BY i CZ przecinają się w jednym punkcie.



rys. 25.

Dowód. Jeśli proste AX, BY i CZ przecinają się w jednym punkcie to korzystając z twierdznia Cevy oraz z twierdzenia Menelausa dla trójkąta ABC i punktów X, Y i Z mamy: $\frac{BX}{XC} = \frac{BZ}{ZA} \cdot \frac{AY}{YC} = \frac{BX'}{CX'}$ czyli $(B, C; X, X') = 1$. Jeśli natomiast $(B, C; X, X') = 1$ to korzystając z twierdzenia Menelausa mamy: $\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = \frac{BX'}{CX'} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = 1$, stąd na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Cevy uzyskujemy współpękowość prostych AX, BY i CZ. □

Lemat 2.28. Jeśli punkty A, C, B i D leżą w tej kolejności na jednej prostej k, oraz punkt X nie należy do k to dowolne dwa z trzech następujących warunków implikują trzeci:
1) $(A, B; C, D) = 1$.
2) Prosta XC jest dwusieczną kąta AXB.
3) $XC \perp XD$.

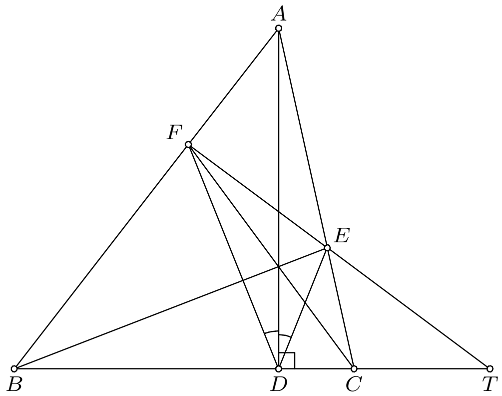


rys. 26.

Dowód. (*) Załóżmy prawdziwość warunków 1) i 2). Rozważmy okrąg Apoloniusza punktów A i B o stosunku $\lambda = \frac{XA}{XB}$. Oznaczmy go przez o. Korzystając z warunku pierwszego mamy: $\lambda = \frac{XA}{XB} = \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$, stąd prosta XD jest dwusieczną kąta zewnętrznego przy wierzchołku X trójkata AXB. Zatem odcinek CD jest średnicą okręgu o czyli $\angle CXD = 90°$.
(**) Przyjmijmy, że prawdziwe są warunki 2) i 3). Wówczas proste XB i XD są dwusiecznymi odpowiednio kątów wewnętrznego i zewnętrznego przy wierzchołku X w trójkącie AXB. Warunek 1) jest konsekwencją twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego i zewnętrznego dla trójkąta AXB.
(***) Niech wreszcie prawdziwe są warunki 3) i 1). Rozważmy okrąg Apoloniusza punktów A i B o stosunku $\lambda = \frac{AC}{BC}$. Oznaczmy go przez o. Z warunku pierwszego mamy $\lambda = \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$, zatem CD jest średnicą okręgu o. Stąd punkt X należy do o, gdyż $\angle CXD = 90°$ a więc prosta XC dzieli kąt AXB na połowy. □

W poniższych zadaniach zauważymy, że niektóre z niech są tworzone na bazie lematów przedstawionych we wstępie.

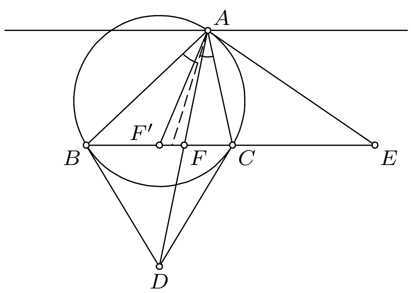
Zadanie 2.29. W trójkącie ABC punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A na podstawę BC. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach AC i AB tak, że proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie. Pokazać, że $\angle ADF = \angle EDA$.



rys. 27.

Dowód. Niech proste EF i BC przecinają się w punkcie T (jeśli $AB = AC$ to $T = X_\infty$ prostej BC). Korzystając z lematu 2.27 mamy $(B, C; D, T) = 1$. Na mocy lematu 2.28 otrzymujemy tezę zadania. □

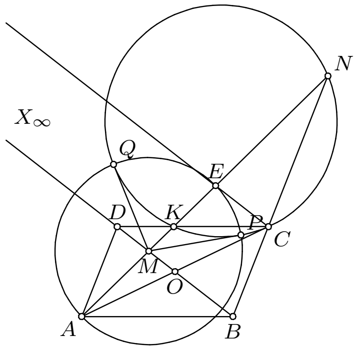
Zadanie 2.30 (Twierdzenie o symedianie)**.** W trójkącie ABC styczne do okręgu ω opisanego na ABC w punktach B i C przecinają się w punkcie D. Pokaż, że prosta AD jest symedianą w trójkacie ABC. *Uwaga.* AD jest symedianą, czyli prostą symetryczną do środkowej AM względem dwusiecznej kąta BAC.



rys. 28.

Dowód. Niech styczna do ω w punkcie A oraz prosta AD przecinają prostą BC w punktach odpowiednio E i F. Oczywiście wiemy, iż punkt E jest biegunem prostej AD względem ω. Zatem $(B, C; F, E) = 1$. Oznacza to, że pęk prostych AB, AC, AD, AE jest harmoniczny. Rozważmy obrazy tych prostych względem dwusiecznej kąta BAC. Obrazy te również bedą tworzyć pęk harmoniczny, więc prosta BC przecina je w czterech punktach sprzężonych harmonicznie. Jednak po łatwym rachunku na kątach widzimy, że obraz prostej AE jest prostą równoległą do BC przechodzącą przez A. Stąd, jeśli oznaczymy punkt przecięcia obrazu prostej AD względem dwusiecznej kąta BAC z bokiem BC przez F', to $(B, C; F', X_\infty) = 1$, czyli na mocy lematu 2.25 mamy $BF' = F'C$. □

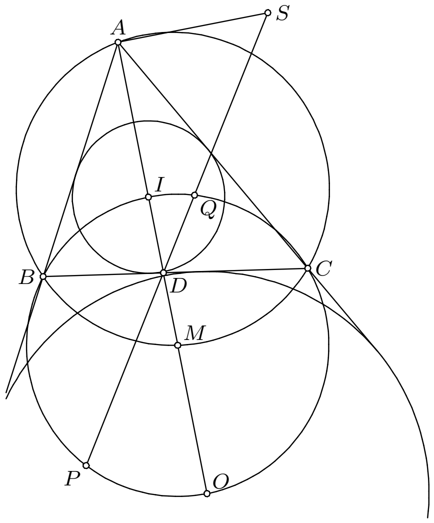
Zadanie 2.31. Punkt M leży na przekątnej BD równoległoboku $ABCD$. Prosta AM przecina proste CD i AB w punktach odpowiednio K i N. Niech ω_1 będzie okręgiem o środku w punkcie M i promieniu AM. Niech ω_2 będzie okręgiem opisanym na trójkącie KCN. Okręgi ω_1 i ω_2 przecinają się w punktach P i Q. Pokaż, że proste MP i MQ są styczne do ω_2.



rys. 29.

Dowód. Niech O będzie punktem przecięcia się przekątnych AC i BD równoległoboku $ABCD$. Odbijmy punkt A symetrycznie względem punktu M. Obraz ten oznaczmy przez punkt E. Łatwo zauważyć, że $CE \parallel DB$. Niech X_∞ oznacza punkt w nieskończoności prostej BD. Z lematu 2.25 wynika, że $(B, D; O, X_\infty) = 1$. Zatem pęk prostych $C(D, B; O, X_\infty)$ jest harmoniczny, a ponieważ punkty K, N, A, E leżą odpowiednio na prostych CD, CB, CO i CE, więc $(K, N; A, E) = 1$. Korzystając z lematu 2.26 widzimy, że $MA^2 = ME^2 = MK \cdot MN$, czyli okręgi ω_1 i ω_2 są ortogonalne (prostopadłe), stąd łatwo uzyskujemy tezę zadania. □

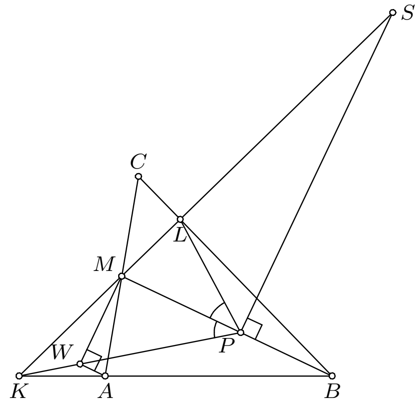
Zadanie 2.32. (Iran 2004) W trójkącie ABC dwusieczna kąta przy wierzchołku A przecina prostą BC i okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach D i M. Niech ω będzie okręgiem o środku w punkcie M promieniu MB. Prosta l przechodząca przez punkt D, przecina ω w punktach P i Q. Pokaż, że prosta AD jest dwusieczną kąta PAQ.



rys. 30.

Dowód. Oznaczmy okrąg o środku I wpisany w trójkąt ABC przez o, a okrąg opisany na trójkącie ABC przez o. Łatwo zauważyć, że $\angle IBM = \angle DBI + \angle MBD = \angle IBA + \angle BAI = \angle BIM$, zatem $BM = IM$. Analogicznie $MI = IC$. Stąd na okręgu ω leży punkt I. Podobnie możemy pokazać, iż na okręgu ω leży środek O okregu dopisanego do trójkąta BAC, stycznego do prostej BC (to są bardzo ważne fakty). Korzystając z lematu 2.28 łatwo zauważyć, że $(A, D; I, O) = 1$. Zatem biegunową k punktu D względem ω jest prosta prostopadła do AD i przechodząca przez punkt A. Jednakże prosta k jest dwusieczną kąta zewnętrznego trójkąta ABC przy wierzchołku A. Jeśli prosta l przetnie prostą k w punkcie S to skoro k jest biegunową punktu D względem ω, to $(P, Q; D, S) = 1$. Zatem ponownie korzystając z lematu 2.28 otrzymujemy tezę zadania. □

Zadanie 2.33. (Baltic Way 2009) Niech M będzie środkiem boku AC trójkąta ABC, a K — punktem półprostej BA leżącym poza odcinkiem BA. Prosta KM przecina bok BC w punkcie L, a P jest takim punktem odcinka BM, że półprosta PM jest dwusieczną kąta LPK. Prosta l jest równoległa do BM i przechodzi przez punkt A. Wykazać, że rzut prostopadły punktu M na prostą l leży na prostej PK.



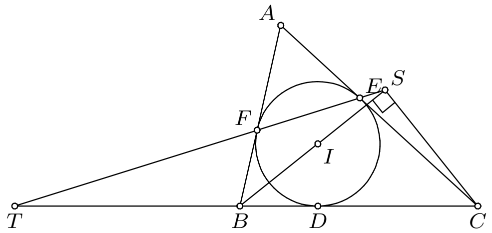
rys. 31.

Dowód. Przez punkt P poprowadźmy prostą k prostopadłą do prostej BM. Przecięcie prostych k i KL oznaczmy przez S (jeśli $k \parallel KL$ to teza zadania jest oczywista). Na mocy lematu 2.28 otrzymujemy $(K, L; M, S) = 1$. Zatem $B(K, L; M, S) = 1$, ale punkt M jest środkiem odcinka AC, więc korzystając z lematu 2.25 mamy $BS \parallel AC$. Jeśli prosta PK przecina l w punkcie W to łatwo zauważamy, że $\frac{KW}{WP} = \frac{KA}{AB} = \frac{KM}{MS}$ zatem $WM \parallel PS$ czyli $WM \perp l$, zatem W jest rzutem punktu M na prostą l, który oczywiście leży na prostej PK. □

Zadanie 2.34. (Iran 2009) W trójkącie ABC okrąg wpisany o środku I jest styczny w punktach D, E i F do boków odpowiednio BC, CA i AB. Punkt M to rzut prostokątny punktu D na prosta EF. Niech P będzie środkiem odcinka DM . Pokaż, że jeśli H jest ortocentrum w trójkącie BIC to prosta PH połowi odcinek EF.

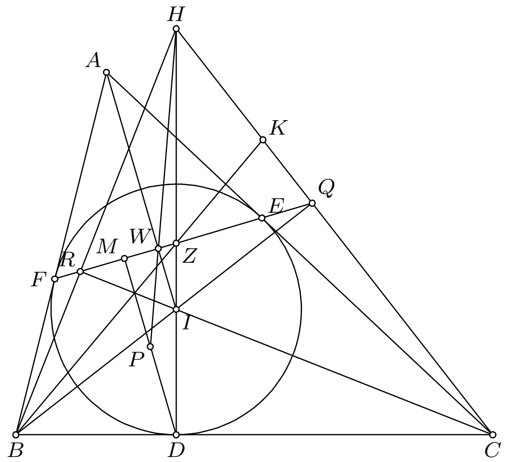
Dowód. Wykażemy najpierw lemat.

Lemat 2.35. W tej konfiguracji niech prosta BI przecina prostą EF w punkcie S. Wówczas $BS \perp SC$.



rys. 32.

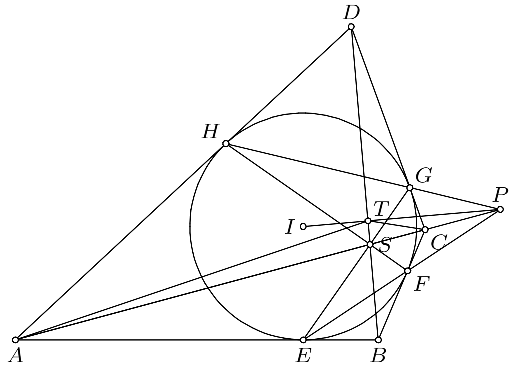
Dowód lematu. Przyjmijmy, że prosta EF przecina prostą BC w punkcie T (jeśli $EF \parallel BC$ to $T = X_\infty$ prostej BC). Korzystając z lematu 2.27 otrzymujemy $(T, D; B, C) = 1$. Łatwo zauważyć, że trójkąty BSD i FSB są przystające, stąd $\angle FSB = \angle BSD$. Na mocy lematu 2.28 otrzymujemy tezę.



rys. 33.

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Niech proste BI i CI przecinają prostą EF w punktach odpowiednio Q i R. Z powyższego lematu uzyskujemy zależności $BR \perp RC$ i $BQ \perp QC$. Stąd punkt H jest punktem przecięcia prostych BR i CQ. Jednocześnie punkt I jest ortocentrum trójkata BHC. Niech proste AI i HD przecinają prostą EF w punktach odpowiednio W i Z. Teza zadania sprowadza się do pokazania współliniowości punktów P, W i H. Korzystając z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Menelausa widzimy, że wystarczy pokazać zależność $\frac{DP}{PM} \cdot \frac{MW}{WZ} \cdot \frac{HZ}{HD} = 1$, czyli $\frac{MW}{WZ} = \frac{HZ}{HD}$. Skoro $AI \parallel MD$, to $\frac{MW}{WZ} = \frac{ID}{IZ}$, łącząc to z powyższym związkiem wystarczy pokazać $(H, I; Z, D) = 1$. Jednakże na mocy lematu 2.27 $(H, Q; K, C) = 1$, gdzie K to punkt przecięcia prostych BZ i HC. Zatem $B(H, Q; K, C) = 1$, czyli $(H, I; Z, D) = 1$. □

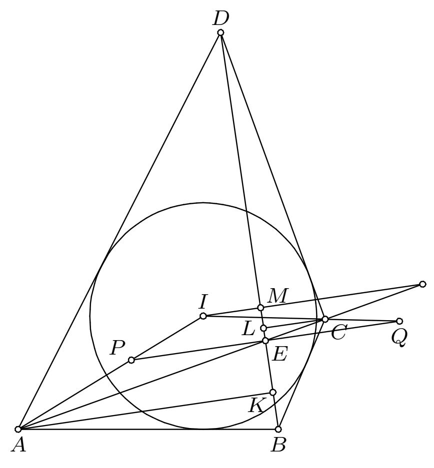
Zadanie 2.36. (Twierdzenie Googo). Dany jest czworokąt $ABCD$ opisany na okręgu ω o środku w punkcie I. Punkt T jest rzutem punktu I na prostą BD. Pokaż, że prosta BD jest dwusieczną kąta ATC.



rys. 34.

Dowód. Niech okrąg ω będzie styczny do boków AB, BC, CD i DA odpowiednio w punktach E, F, G i H. Korzystjąc z zadania 2.2 wiemy, że proste HG, EF i AC przecinają sie w jednym punkcie P oraz, że proste BD, AC, HF i FG są współpękowe (oznaczmy ich punkt przecięcia przez S). Łatwo zauważamy, że $(A, C; S, P) = 1$. Korzystając z twierdzenia 1.11 widzimy, że prosta BD jest biegunową punktu P względem ω. Zatem $PI \perp BD$. Stąd punkt T jest punktem przecięcia prostych BD i PI. Teza zadania jest konsekwencją lematu 2.28. □

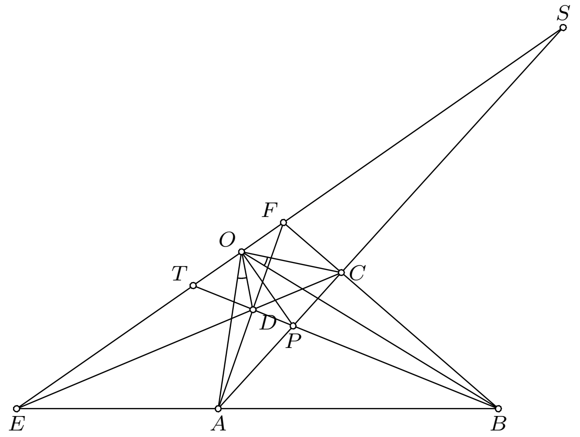
Zadanie 2.37. (LVI Olimpiada Matematyczna) Okrąg o środku I jest wpisany w czworokąt wypukły $ABCD$, przy czym punkt I nie leży na prostej AC. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E. Prosta przechodząca przez punkt E oraz prostopadła do prostej BD przecina proste AI, CI odpowiednio w punktach P i Q. Wykazać, że $PE = EQ$.



rys. 35.

Dowód. Korzystając z twierdzenia Menelausa dla trójkąta PIQ przeciętego prostą AC mamy: $\frac{EP}{EQ} = \frac{IC}{CQ} \cdot \frac{AP}{AI}$. Zatem wystarczy pokazać, że $\frac{IC}{CQ} \cdot \frac{AP}{AI} = 1$. Niech punkty K, L i M będą rzutami punktów odpowiednio A, C i I na prostą BD. Wówczas równość którą mamy pokazać jest równoważna temu, że punktu K, L, E i M tworzą czwórkę harmoniczną. Lecz jest to prawdą gdyż, korzystając z dowodu twierdzenia Googo uzyskujemy iż punkt przecięcia prostych MI i AC wraz z punktami A, E i C tworzą czwórkę harmoniczną, a punkty K, L, E i M są ich rzutami prostokątnymi na prostą BD. □

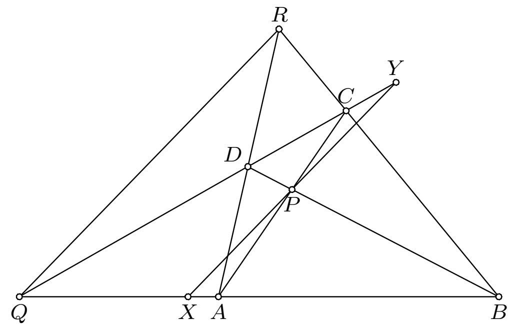
Zadanie 2.38. (Chiny 2002) Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Niech $E = AB \cap CD$, $F = AD \cap BC$ i $P = AC \cap BD$. Punkt O jest rzutem prostokątnym punktu P na prostą EF. Pokazać, że $\angle BOC = \angle AOD$.



rys. 36.

Dowód. Przyjmijmy, że $S = AC \cap EF$ i $T = BD \cap EF$. Korzystając z lematu 2.27 widzimy, że $(E, F; T, S) = 1$. Stąd $(T, P; D, B) = 1$ oraz $(A, C; P, S) = 1$ gdyż odpowiednio $A(E, F; T, S) = 1$ i $B(E, F; T, S) = 1$. Pamiętając o tym, że $OP \perp EF$ na mocy lematu 2.28 oraz powyższych związków mamy $\angle DOP = \angle POB$ i $\angle AOP = \angle POC$. Stąd $\angle BOC = \angle POC - \angle POB = \angle AOP - \angle DOP = \angle AOD$. □

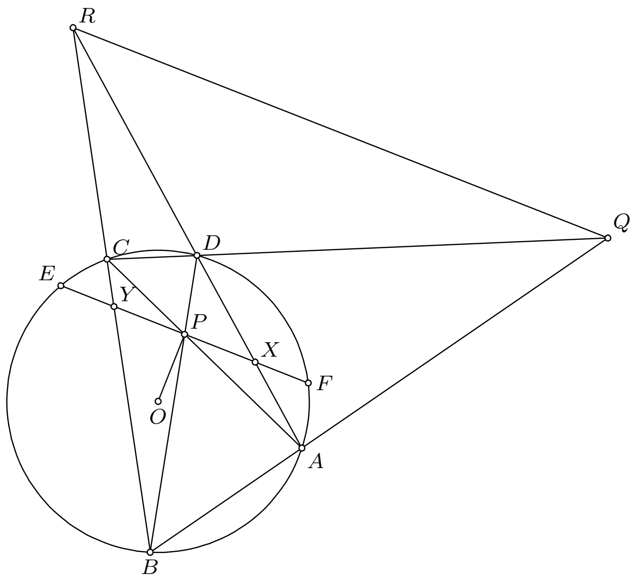
Zadanie 2.39. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Niech $Q = AB \cap CD$, $R = AD \cap BC$ i $P = AC \cap BD$. Prosta równoległa do prostej QR przechodząca przez punkt P przecina proste AB i CD w punktach odpowiednio X i Y. Wykazać, że punkt P jest środkiem odcinka XY.



rys. 37.

Dowód. Korzystając z lematu 2.25 wystarczy pokazać, że pęk prostych QA, QD, QP i QR jest harmoniczny. Jednakże, na mocy lematu 2.27 jest to oczywiście prawdą. □

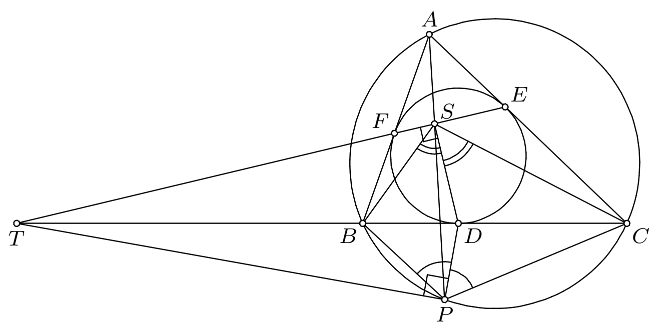
Zadanie 2.40. (Twierdzenie o motylku) Dany jest okrąg ω oraz cięciwa EF. Niech P będzie środkiem odcinka EF. Cięciwy AC i BD przechodzą przez punkt P. Proste AD i BC przecinają cięciwę EF w punktach odpowiednio X i Y. Wykazać, że $PX = PY$.



rys. 38.

Dowód. Przyjmijmy $Q = AB \cap CD$ oraz $R = AC \cap BD$ (jeśli cięciwa EF jest średnicą ω lub $AB \parallel CD$ to teza zadania jest oczywista). Niech O bedzie środkiem okręgu ω. Na mocy zadania 2.4 wynika, że O jest ortocentrum trójkąta PQR. Mamy więc $QR \perp OP \perp EF$ i stąd $EF \parallel QR$. Teza poprzedniego zadania kończy dowód. □

Zadanie 2.41. (Autorskie) W trójkącie ABC okrąg wpisany ω jest styczny do boków BC, CA i AB w punktach odpowiednio D, E i F. Punkt S jest rzutem prostokątnym punktu D na odcinek EF. Prosta EF przecina prostą BC w punkcie T. Prosta AS przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie P. Pokazać, że punkty T, S, D, P leżą na jednym okregu.



rys. 39.

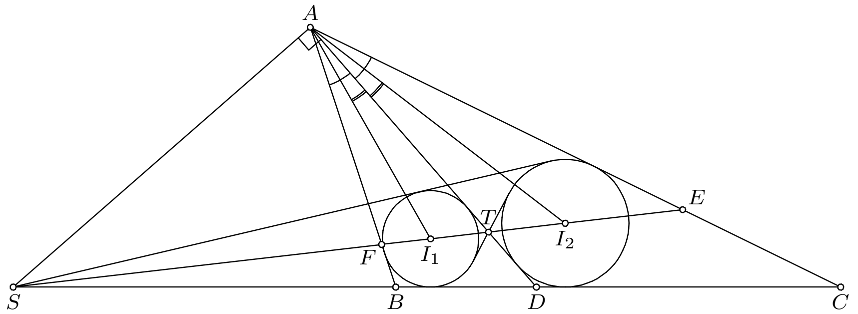
Dowód. Łatwo zauważyć, że wystarczy pokazać równość $\angle DPT = 90°$. Korzystając z lematu 2.27 $(T, D; B, C) = 1$. Stąd na mocy lematu 2.28 pozostaje udowodnić, że prosta PD jest dwusieczną kąta CPB. Ponownie stosując lemat 2.28 widzimy, że $\angle BSD = \angle DSC$ lub też $\angle FSB = \angle CSE$. Korzystając z twierdzenia o dwusiecznej i z twierdzenia sinusów mamy: $\frac{BP}{PC} = \frac{\sin\angle BCP}{\sin\angle PBC} = \frac{\sin\angle BAP}{\sin\angle PAC} = \frac{FS}{SE}$. Jednakże, trójkąty FSB i SEC są podobne, przeto $\frac{BP}{PC} = \frac{FS}{SE} = \frac{SB}{SC} = \frac{BD}{DC}$. Zatem na mocy twierdzenia o dwusiecznej wnosimy, że prosta PD jest dwusieczną kąta CPB co było do pokazania. □

Zadanie 2.42. (Mediterranean Mathematics Olympiad 2011) W trójkącie ABC punkt D jest punktem przecięcia dwusiecznej kąta przy wierzchołku A z bokiem BC. Punkty I_1 i I_2 są środkami okręgów wpisanych w odpowiednio trójkąty ABD i ADC. Prosta I_1I_2 przecina proste AB i AC odpowiednio w punktach F i E. Wykazać że proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

Dowód. Rozpoczniemy od sformułowania przydatnego faktu, którego łatwy dowód pozostawiamy czytelnikowi.

Lemat 2.43. Dane są dwa różne okręgi o_1 i o_2 o środkach odpowiednio O_1 i O_2. Niech punkty P i Q będą środkami odpowiednio jednokładności zewnętrznej i wewnętrznej okręgów o_1 i o_2. Wykazać, że

$$(P, Q; O_1, O_2) = 1.$$



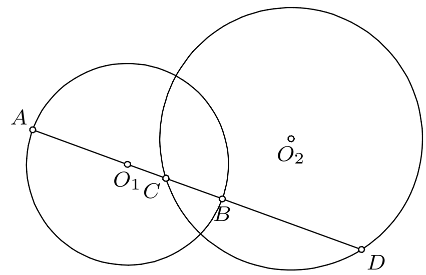
rys. 40.

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Niech prosta I_1I_2 przecina proste BC i AD odpowiednio w punktach S i T (jeśli $I_1I_2 \parallel BC$ teza zadania jest oczywista). Łatwo zauważamy, że punkty S i T to środki odpowiednio jednokładności zewnętrznej i wewnętrznej okręgów o_1 i o_2. Zatem na mocy powyższego lematu $(S,T;I_1,I_2) = 1$. Stąd pęk prostych $A(S,T;I_1,I_2) = 1$. Jednakże $\angle I_1AD = \angle DAI_2$, więc na mocy lematu 2.28 - $TA \perp AD$. Skoro $\angle BAD = \angle DAC$ to korzystając ponownie z lematu 2.28 mamy $(S,D;B,C) = 1$. Ostatecznie stosując lemat 2.27 uzyskujemy tezę zadania. □

Zadanie 2.44. (Autorskie) Dany jest punkt P wewnątrz trójkąta ABC. Okręgi ω_1 i ω_2 o środkach odpowiednio O_1 i O_2 są opisane na trójkątach APB i APC w tej kolejności. Prosta CO_1 przecina ω_1 w punktach K i L (K leży bliżej punktu P niż L) oraz ω_2 w punkcie S. Analogicznie prosta BO_2 przecina ω_2 w punktach M i N (M leży bliżej punktu P niż N) oraz ω_1 w punkcie T. Niech punkty X, Y, Z będą takie, że $X = BS \cap CT$, $Y = BK \cap CM$ i $Z = LB \cap NC$. Pokazać, że jeśli $\angle BPC - \angle BAC = 90°$ to punkty X, Y i Z leżą na jednej prostej.

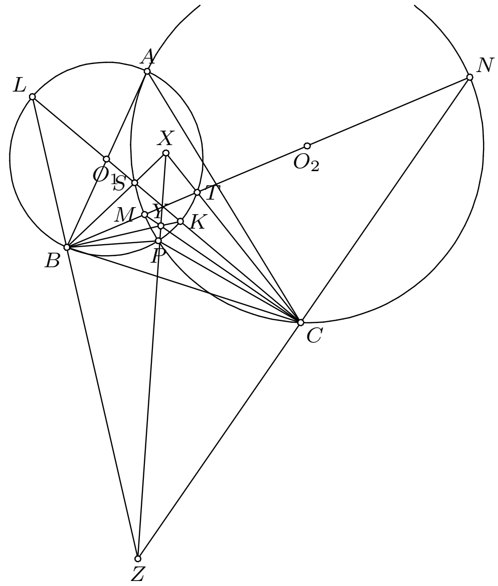
Dowód. Pokażemy najpierw lemat:

Lemat 2.45. Dane są dwa ortogonalne (prostopadłe) okręgi o_1 i o_2 o środkach odpowiednio O_1 i O_2. Prosta przechodząca przez O_1 przecina okrąg o_1 w punktach A i B, a okrąg o_2 w punktach C i D. Wykazać, że $(A,B;C,D) = 1$.



rys. 41.

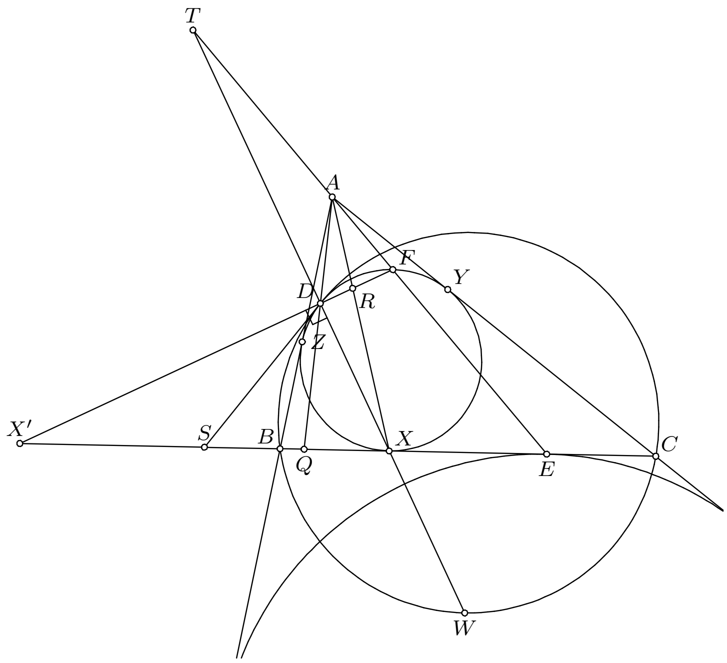
Dowód. Przyjmijmy, że punkty przecięcia leżą w kolejności A, C, B i D. Na mocy lematu 2.26 wystarczy pokazać, że $O_1A^2 = O_1C \cdot O_1D$, jednakże jest to oczywiste, gdyż okręgi o_1 i o_2 są ortogonalne. □



rys. 42.

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Po prostym rachunku na kątach widzimy, że równość $\angle BPC - \angle BAC = 90°$ implikuje nam ortogonalność okręgów ω_1 i ω_2. Na podstawie powyższego lematu mamy $(B, T; M, N) = (L, K; S, C) = 1$. Jednakże odcinki KL i MN to średnice odpowiednio okręgów ω_1 i ω_2 stąd na mocy lematu 2.28 mamy równości $\angle SBK = \angle KBC$ oraz $\angle TCM = \angle MCB$. Zatem punkt Y jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt BXC. Ostatecznie skoro $BK \perp BZ$ i $CM \perp CZ$, przeto proste BZ i CZ są dwusiecznymi kątów zewnetrznych trójkąta BXC przy wierzchołkach odpowiednio B i C. Stąd punkt Z jest środkiem okręgu dopisanego do trójkąta BXC, stycznego do prostej BC. Punkty X, Y i Z leżą więc na jednej prostej, która jest dwusieczną kąta BXC. ☐

Zadanie 2.46. W trójkącie ABC okrąg przechodzący przez punkty B i C jest styczny do okręgu ω wpisanego w trójkąt ABC w punkcie D. Okrąg dopisany do trójkąta ABC styczny jest do boku BC w punkcie E. Prosta AE przecina ω w punkcie F leżącym bliżej punktu A. Wykazać, że $\angle FDA = \angle EDF$.

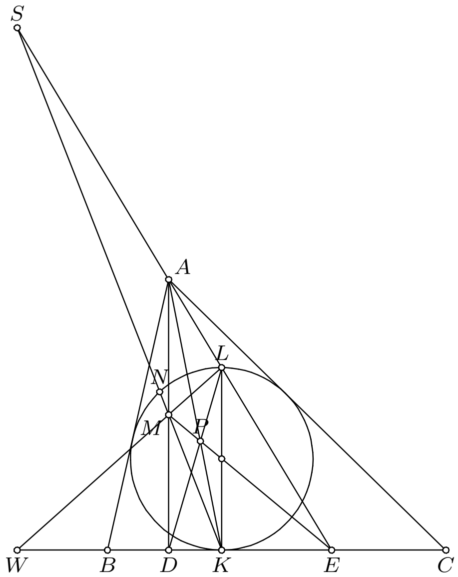


rys. 43.

Dowód. Przyjmijmy, że ω jest styczny do boków BC, CA i AB odpowiednio w punktach X, Y i Z. Oznaczmy okrąg przechodzący punkty B i C i styczny do ω przez o. Niech wspólna styczna okręgów ω i o przecina bok BC w punkcie S. Korzystając z twierdzenia o potędze punktów otrzymujemy: $SX^2 = SD^2 = SB \cdot SC$. Oznaczmy przez X' punkt symetryczny do punktu X względem punktu S. Na mocy lematu Newtona widzimy, że $(X', X; B, C) = 1$. Zatem punkt X' na podstawie lematu 2.27 leży na prostej YZ. Jednokładność o środku w punkcie D, przeprowadza prostą BC na prostą styczną do o w środku W łuku BC niezawierającego punktu W.

Stąd punkty D, X i W leżą na jednej prostej i prosta DX jest dwusieczną kąta BDC. Jednakże $(X', X; B, C) = 1$, więc na mocy lematu 2.28 otrzymujemy, że proste $X'D$ i DX są prostopadłe. Niech $X'D$ przecina ω w punkcie F'. Pokażemy, że $F = F'$. Skoro $XDF' = 90°$ to wystarczy pokazać, że FX jest średnicą okręgu ω. Rzeczywiście, jednokładność o środku w A przeprowadza średnicę okręgu ω na średnicę okręgu dopisanego trójkąta ABC stycznego do boku BC w punkcie E. Stąd odcinek XF jest średnicą okręgu ω, zatem $F = F'$. Niech teraz proste AD i AX przecinają proste odpowiednio BC i DF w punktach Q i R w tej kolejności. Z twierdzenia 1.11 wynika, że X' jest biegunem prostej AX względem ω. Stąd mamy zależność $A(X', R; D, F) = 1$, z której implikuje równość $(X', X; Q, E) = 1$. Zatem $D(X', X; Q, E) = 1$, czyli $(F, T; A, E) = 1$ gdzie T jest punktem przecięcia prostych DX i AE. Jednakże $\angle TDF = 90°$ więc, korzystając ponownie z lematu 2.28 mamy $\angle ADF = \angle FDE$ czyli tezę zadania. □

Zadanie 2.47. (IMO Shortlist 2002) W trójkącie ABC okrąg wpisany ω jest styczny do boku BC w punkcie K. Punkt D jest spodkiem wysokosci trójkąta ABC opuszczonej z wierzchołka A. Punkt M jest środkiem odcinka AD. Prosta KM przecina ω w punkcie N. Pokazać, że okrąg opisany na trójkącie BNC jest styczny do ω.



rys. 44.

Dowód. Jeśli $AB = AC$, to teza zadania jest oczywista. Załóżmy dalej, że $AB \neq AC$. Niech okrag o będzie okręgiem przechodzącym przez punkty B i C oraz styczny do ω w punkcie N'. Wystarczy pokazać, że $N = N'$. Załóżmy nie wprost, że $N \neq N'$. Przyjmijmy, że okrąg dopisany do trójkąta ABC styczny jest do boku BC w punkcie E, oraz że punkt L jest drugim końcem średnicy KL okręgu ω. Wykażemy najpierw, że $\angle LNA = \angle ENL$. Podobnie jak w poprzednim zadaniu dowodzimy, że punkty A, L, E leżą na jednej prostej. Niech prosta NK przecina prostą AE w punkcie S, ponieważ $\angle KNL = 90°$ to na mocy lematu 2.28 wystarczy pokazać, że $(S, L; A, E) = 1$. Czyli, że pęk prostych $M(S, L; A, E) = 1$ lub też $(W, K; D, E) = 1$ gdzie $W = LM \cap BC$. Korzystając z lematu 2.27 widzimy iż, związek $(W, K; D, E) = 1$ jest równoważny współpękowości prostych AK, DL i EM. Jednakże czworokąt $ALKD$ jest trapezem prostokątnym, więc na mocy twierdzenia Talesa w łatwy sposób otrzymamy, że prosta EP dzieli odcinki LK i AD na połowy (gdzie $P = LD \cap AK$). Stąd oczywiście uzyskujemy, iż proste AK, DL i EM przecinają sie w jednym punkcie, zatem $\angle LNA = \angle ENL$. Na mocy poprzedniego zadania $\angle LN'A = \angle EN'L$. Powyższe równości oznaczają, że okrąg przechodzący przez punkty N, N' i L (czyli okrąg ω) jest pewnym okręgiem Apoloniusza punktów A i E. Jest to sprzeczność, bo środek tego okręgu nie leży na prostej AE. Kończy to dowód nie wprost. □

Zadania do samodzielnego rozwiązania.

Zadanie 2.48. (Baltic Way 2002) Niech L, M i N będą takimi punktami odpowiednio na bokach AC, AB i BC trójkąta ABC, że BL jest dwusieczną kąta ABC oraz odcinki AN, BL i CM mają punkt wspólny. Udowodnić, że jeśli $\angle ALB = \angle MNB$, to $\angle LNM = 90°$.

Zadanie 2.49. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg ω. Odcinek AC jest średnicą ω oraz $AC \perp BD$. Prosta prostopadła do prostej BM przechodząca przez punkt C przecina prostą AD w punkcie P. Pokazać, że prosta BP jest styczna do okregu wpisanego w trójkąt ABC.

Zadanie 2.50. Dany jest półokrąg ω o średnicy AB i punkt C leżący na ω. Styczne do ω w punktach A i C przecinają się w punkie D. Na prostej AB obieramy punkt H taki, że $CH \perp AB$. Prosta CH przecina prostą BD w punkcie K. Pokazać, że $HK = KC$.

Zadanie 2.51. Okrąg ω o środku I wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków AB i AC w punktach odpowiednio F i E. Niech M będzie środkiem odcinka BC. Proste EF i AM przecinają się w punkcie N. Proste BI i CI przecinają okrąg o średnicy BC w punktach odpowiednio X i Y. Pokazać, że $\frac{NX}{NY} = \frac{AC}{AB}$.

Zadanie 2.52. (Zwardoń 2008) $ABCD$ jest czworokątem wypukłym, w którym prosta AC jest dwusieczną kąta BAD. Punkt E leży na odcinku CD, a F jest przecieciem BE i AC. Odcinek DF przedłużamy do przeciecia z bokiem BC w punkcie G. Wykazać, że $\angle GAC = \angle EAC$.

Zadanie 2.53. (Tuymaada 2010) Okrąg ω o środku w punkcie I jest wpisany w trójkąt ABC. Punkt P jest taki, że $PI \perp BC$ oraz $PA \parallel BC$. Punkty Q i R leżą na bokach odpowiednio AB i AC tak, że $QR \parallel BC$ oraz prosta QR jest styczna do ω. Pokazać, że $\angle QPB = \angle CPR$.

Zadanie 2.54. (XLIX Olimpiada Matematyczna) W trójkącie ABC kąt BCA jest rozwarty oraz $\angle BAC = 2\angle ABC$. Prosta przechodząca przez punkt B i prostopadła do BC przecina prostą AC w punkcie D. Punkt M jest środkiem boku AB. Dowieść, że $\angle AMC = \angle BMD$.

Zadanie 2.55. (LVII Olimpiada Matematyczna) W czworokącie $ABCD$ miara kąta wewnętrznego przy wierzchołku A jest większa od $180°$ oraz zachodzi równość $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. Punkt P jest symetryczny do punktu A względem prostej BD. Udowodnić, że $\angle PCB = \angle ACD$.

Zadanie 2.56. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na nierównoramiennym trójkącie ABC. Okrąg wpisany ω w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA i AB w punktach odpowiednio D, E i F. Przypuśćmy, że $P = DE \cap AB$, $Q = DF \cap AC$, $R = EF \cap BC$, M i N - środki odcinków QE i PF odpowiednio. Pokazać, że proste prostopadłe przechodzące przez punkty O, P i Q do prostych odpowiednio MN, CF i BE przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 2.57. Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg ω. Styczne do ω w punktach A i C przecinają się w punkcie E, styczne do ω w punktach B i D przecinają się w punkcie F, $S = AC \cap BD$, punkty M i N to środki odpowiednio przekątnych AC i BD. Pokazać, że następujące warunki są równoważne:
1) $AB \cdot CD = BC \cdot AD$.
2) $E \in BD$.
3) $F \in AC$.
4) Punkt S jest punktem przecięcia przekątnej czworokąta $ABCD$ z symedianą co najmniej jednego z trójkątów BCD, CDA, DAB, ABC poprowadzonej z punktów odpowiednio A, B, C lub D.
5) $(A, C; S, F) = 1$.
6) $(B, D; S, E) = 1$.
7) $\angle ADM = \angle CDB$.
8) $\angle BCN = \angle DCA$.

Uwaga. Powyższe zadanie przedstawia najważniejsze własności czworokąta harmonicznego. Znajomość tych faktów może okazać się bardzo przydatna na zawodach matematycznych.

3 Rozwiązania

3.1 Biegunowe

Rozwiązanie 2.15. Niech proste AB i PQ oraz BP i AQ przecinają się odpowiednio w punktach T i W (jeśli $AB \parallel PQ$ teza zadania jest oczywista). Korzystając z twierdzenia 1.11 oraz twierdzenia 1.10 łatwo uzyskujemy, że punkty S, R i W leżą na biegunowej punktu T względem ω, co kończy rozwiązanie.

Rozwiązanie 2.16. Na podstawie twierdzenia 1.11 uzyskujemy, że punkt S jest biegunem prostej BD względem o, zatem $SO \perp BD$.

Rozwiązanie 2.17. Przyjmijmy, że punkty N i P leżą odpowiednio na prostych AC i AB. Niech okrąg ω będzie styczny do boków BC, CA i AB w punktach D, E i F w tej kolejności. Pokażemy, że punkty M, N i P leżą na prostej stycznej do ω. Przez punkty E i F poprowadźmy prostopadłe do prostych odpowiednio IN' oraz IP', ich punkt przecięcia oznaczmy przez S. Po łatwym rachunku na kątach uzyskujemy, że $\angle ESF = \angle PIN = 180° - \frac{1}{2}\angle FPN - \frac{1}{2}\angle PNE = 180° - \frac{1}{2}(360° - \angle APN - \angle ANP) = 90° - \angle BAC = \angle AEF$, stąd punkt S należy do ω. Analogiczne dowodzimy, że prosta prostopadła do prostej IM' poprowadzona z punktu D przechodzi przez S. Zatem łatwo widzimy, że proste DS, FS i ES są biegunowymi punktów odpowiednio M, N i P, stąd na mocy wniosku 1.13 punkty te leżą na jednej prostej stycznej do ω w punkcie S.

Rozwiązanie 2.18. Teza zadania jest konsekwencją lematu 2.10.

Rozwiązanie 2.19. Niech okrąg ω opisany na trójkącie AEF przecina po raz drugi o w punkcie S. Wiadomo, iż punkty B, C, E i F leżą na jednym okręgu. Na mocy twierdzenia o trzech osiach potegowych otrzymujemy, że proste AS, EF i BC przecinają sie w jednym punkcie X. Korzystając ponownie z twierdzenia o trzech osiach widzimy, że styczna do o w punkcie A_1 przechodzi przez punkt X. Analogicznie definiujemy punkty Y, i Z. Teza zadania sprowadza się do zadania 2.8.
Uwaga. Na mocy lematu 2.27 mamy $(X, D; B, C) = 1$. Stąd prosta A_1D jest biegunową punktu X względem ω. Analogicznie dowodzimy, iż proste B_1E i C_1F są biegunowymi punktów odpowiednio Y i Z względem ω. Skoro punkty X, Y i Z są współliniowe, przeto proste A_1D, B_1E, C_1F przecinają sie w punkcie będącym biegunem prostej przechodzącej przez punkty X, Y i Z względem ω. Jeśli punkty O i H to środek okręgu opisanego i ortocentrum odpowiednio trójkąta ABC, to łatwo pokazać, że $XZ \perp OH$ (korzystając z twierdzeń o potędze punktu względem okręgu). Zatem proste A_1D, B_1E, C_1F przecinają się na prostej Eulera trójkąta ABC.

Rozwiązanie 2.20. Na podstawie wniosku 1.13 wystarczy pokazać, że bieguny prostych MN, EF i CI leżą na jednej prostej. Korzystając z lematu 2.14 biegunem prostej MN jest ortocentrum H trójkąta BIC. Biegunem prostej DF jest oczywiście punkt B. Prosta CI ma biegun w punkcie X_∞ o kierunku BD. Jednakże współliniowość punktów H, B i X_∞ jest już oczywista.
Uwaga. Rozwiązanie zadania można znacznie skrócić, jednak nie angażowałby on metod opisanych w pracy.

Rozwiązanie 2.21. Zacznijmy od sformuowania następującego lematu:

Lemat 3.1. W trójkącie ABC okrąg ω o środku w punkcie I dopisany do boku BC trójkąta ABC jest styczny do prostych BC, CA i AB odpowiednio w punktach D, E i F. . Punkty M i N są środkami boków odpowiednio AB i AC. Wówczas ortocentrum trójkąta BIC jest biegunem prostej MN względem ω.

Wskazówka. Czytelnik z łatwością zauważy analogie pomiedzy tym lematem a lematem 2.14.

Przejdźmy do właściwej części rozwiązania. Oznaczmy przez H ortocentrum trójkąta BIC. Skoro punkty P, Q i H są współliniowe to na mocy wniosku 1.13 ich biegunowe względem ω przecinają się w jednym punkcie. Zatem styczna w punkcie Q do ω oraz proste MN i DE są współpękowe, co oczywiście kończy rozwiązanie.
Uwaga. Rozważana konfiguracja pozwala nam otrzymać wiele ciekawych rezultatów. Proponujemy czytelnikowi pokazanie ich w ramach treningu. Oto kilka z nich:
1) Prosta AH jest biegunową punktu $S = MN \cap EF$ względem ω.
2) Proste DE, BI i MN są współpękowe.
3) Odbicie H_2 względem środka odcinka BC to środek okręgu dopisanego do boku BC.
4) Odbicie H względem środka odcinka BC to punkt I.
5) Podobnie skonstruowane proste HH_2 dla trójkąta ABC tną się w jednym punkcie będącym punktem Nagela (X_8) trójkąta ABC.
6) Jeśli punkty S_1 i S_2, S_3 to ortocentra odpowiednio trójkątów BIC, CIA i AIB to powstałe trójkaty AS_2S_3, BS_1S_3 i CS_1S_2 mają wspólne ortocentrum - jest nim punkt Nagela trójkąta ABC.
7) Trójkąty ABC i $S_1S_2S_3$ mają równe pola.
8)(Autorskie) Niech punkty M, N i K będą środkami boków BC, CA i AB w tej kolejności. Okrąg ω jest styczny do boków BC, CA i AB w punktach odpowiednio D, E i F. Rozważamy punkt X przeciecia prostej NK z prostą prostopadłą do prostej IM przechodzącą przez środek odcinka ID. Analogicznie definiujemy punkty Y i Z. Wówczas punkty X, Y i Z leżą na biegunowej punktu Nagela trójkąta ABC względem okregu ω.

Rozwiązanie 2.22. Niech okrąg ω będzie styczny do prostych l, BC, CA i AB w punktach odpowiednio L, D, E i F. Punkty styczności prostych A_1A_2, B_1B_2 i C_1C_2 z okręgiem ω oznaczmy odpowiednio przez D', E' i F'. Ponadto przyjmijmy, że $X = EF \cap LD'$, $Y = DF \cap LE'$ oraz $Z = DE \cap LF'$. Biegun S prostej l' względem ω na mocy wniosku 1.13 jest punktem przecięcia prostych DD', EE' i FF'. Ponownie korzystając z wniosku 1.13 widzimy, że teza zadania jest równoważna wspołliniowości punktów X, Y i Z. Na mocy twierdzenia Pascala dla sześciokąta $DEFF'LD'$ mamy wspołliniowość punktów X, Y i S. Analogicznie punkty Y, Z i S są współliniowe, a to wraz z powyższym wnioskiem implikuje tezę zadania.

Rozwiązanie 2.23. Przyjmijmy, że $AD \cap BC = P$ oraz $AB \cap CD = Q$. Na podstawie wniosku 1.13 wystarczy pokazać, że biegunowe punktów H_1, H_2, H_3, H_4 i O są współpękowe. Biegunową punktu O jest oczywiście prosta PQ. Biegunowymi punktów H_3 i H_4 są na podsatwie lematu 2.14 odpowiednie linie środkowe w trójkątach CDP i ADQ. Widzimy, że przecinają się one w środku S prostej PQ. Podobnie na mocy lematu 3.1, biegunowe punktów H_1 i H_3 to odpowiednie linie środkowe trójkątów ABP i BCQ. Również łatwo jak poprzednio zauważamy, iż proste te tną się w punkcie S. Zatem biegunowe punktów H_1, H_2, H_3, H_4 i O przecinają się w jednym punkcie S, co należało pokazać.

Rozwiązanie 2.24. Przyjmijmy następujące oznaczenia, ω i o - odpowiednio okrąg wpisany i opisany na trójkącie ABC, $\omega \cap \omega_a = X_a$, $\omega \cap \omega_b = X_b$, $\omega \cap \omega_c = X_c$, punkty D, E i F - punkty styczności okręgu ω z bokami odpowiednio BC, CA i AB, $\omega_b \cap \omega_c = Y_a$, $\omega_c \cap \omega_a = Y_b$, $\omega_a \cap \omega_b = Y_c$ ($Y_x \neq X$). Na podstawie zadania 2.11 wiemy, że proste DX_a, EX_b i FX_c przecinają się w punkcie J, będącym biegunem osi potęgowej okręgów ω i o względem okręgu ω. Oczywiście J, O i I leżą na jednej prostej, gdyż oś potęgowa okręgów ω i o jest prostopadła do prostej OI. Pokażemy, że punkt J jest środkiem potęgowym okręgów ω_a, ω_b i ω_c, co jest równoważne tezie zadania. Wystarczy więc dowieść współpękowości prostych DX_a, FX_c, BY_b. Z twierdzenia o trzech osiach zastosowanego dla okręgów ω_b, ω_c i ω wnioskujemy, że proste styczne do okręgu ω w punktach X_a i X_c oraz prosta BY_b przecinają się w jednym punkcie, nazwijmy go K. Wykorzystując wniosek 1.13, widzimy, że pozostało nam pokazać współliniowość biegunów prostych DX_a, FX_c i BK względem okręgu ω. Jednakże, jest to oczywiste na mocy twierdzeń 1.11 i 1.10.

3.2 Dwustosunek i cztery lematy

Rozwiązanie 2.48. Niech prosta MN przecina prostą AC w punkcie S. Na mocy lematu 2.27 dostajemy równość $(S, L; A, C) = 1$. Warunek równości kątów w zadaniu implikuje nam, iż punkty S, L, M i N leżą na jednym okręgu. Jednakże prosta BL jest dwusieczną kąta ABC, zatem na podstawie lematu 2.28 mamy $\angle SBL = 90°$, stąd $\angle MNL = \angle SBL = 90°$.

Rozwiązanie 2.49. Przyjmijmy, że $AC \cap BD = H$, $BC \cap AD = Q$, oraz niech X_∞ oznacza punkt w nieskończoności prostej AD. Na podstawie lematu 2.25 mamy $B(A, D; M, X_\infty) = 1$. Skoro pęk prostych $C(B, P; H, D)$ zawiera proste przechodzące przez punkt C i prostopadłe do prostych BA, BD, BM i BX_∞, to jest on również harmoniczny. Zatem $(Q, A; P, D) = 1$ jednakże $B(Q, A; B, D) = 1$, stąd prosta BP jest styczną do ω.

Rozwiązanie 2.50. Niech $CD \cap AB = R$. Na mocy lematu 2.25 wystarczy pokazać, że $D(C, H; K, X_\infty) = 1$, jednakże $AD \parallel CH$ stąd należy udowodnić równość $(R, H; A, B) = 1$. Związek ten jednak jest oczywisty, gdyż prosta CH jest biegunową punktu R względem okręgu ω.

Rozwiązanie 2.51. Niech okrąg ω o środku w punkcie I będzie styczny do boku BC w punkcie D. Na podstawie lematu 2.35 punkty X i Y leżą na prostej EF. Poprowadźmy prostą równoległą do prostej BC przechodzącą przez punkt A. Na mocy lematu 2.25 mamy $(B, C; M, X_\infty) = 1$, stąd $(F, E; N, T) = 1$ gdzie $T = EF \cap AX_\infty$. Zatem prosta AT jest biegunową punktu N względem ω, więc $NI \perp AT$, a to oznacza, że punkt I należy do prostej ND. Punkt N jest ortocentrum trójkąta BSC, gdzie $S = BY \cap CX$. Po łatwych przeliczeniach na kątach dochodzimy do wniosku, iż tójkąty DXY i ABC są podobne. Ponadto wiemy, że $\angle NDY = \angle XDN$ (zadanie 2.14), stąd $\frac{NX}{NY} = \frac{DX}{DY} = \frac{AC}{AB}$.

Rozwiązanie 2.52. Przyjmijmy oznaczenia $BD \cap AC = S$, $AC \cap GE = W$ i $GE \cap BD = T$ (jeśli $GE \parallel BD$ teza zadania staje się oczywista). Na mocy lematu 2.27 mamy $(B, D; S, T) = 1$, zatem również $(G, E; W, T) = 1$. Na podstawie lematu 2.28 widzimy, że $\angle SAT = 90°$, stąd ponownie korzystając z lematu 2.28 uzyskujemy tezę zadania.

Rozwiązanie 2.53. Równość dana w treści zadania pokazuje, że dwusieczne kątów BAD i BCD przecinają się w punkcie T leżącym wewnątrz odcinka BD. Na zewnątrz odcinka BD obierzmy taki punkt S aby $\angle ASC = 90°$, wówczas na podstawie lematu 2.28 widzimy, że $\angle TAS = 90°$. Zatem punkty P, T, A, C i S leżą na jednym okręgu. Stąd $\angle BCP = \angle BCT + \angle TCP = \angle TCD + \angle TSP = \angle TCD + \angle AST = \angle TCD + \angle ACT = \angle ACD$.

Rozwiązanie 2.54. Przyjmijmy oznaczenia $PQ \cap BC = X$, $PR \cap BC = Y$, $AP \cap BR = Z$, $CQ \cap AP = T$, $BR \cap QC = U$ oraz $BC \cap \omega = M$. Z twierdzenia Brianchona łatwo otrzymujemy, że biegunową punktu U względem ω jest prosta AP. Zatem $(B, R; U, Z) = (T, U; Q, C) = 1$. Skoro $P(B, R; U, Z) = 1$, więc $(B, Y; M, X_\infty) = 1$ gdzie $X_\infty = QR \cap BC$ a to na mocy lematu 2.25 daje równość $BM = MY$, analogicznie uzyskujemy, że $MC = MX$. Oznacza to, że trójkąty PCX i BPY są równoramienne, a przez to łatwo uzyskujemy tezę zadania.

Rozwiązanie 2.55. Niech symetralna odcinka AB przecina prostą AC w punkcie E. Wówczas $\angle EBC = \angle EBA - \angle CBA = \angle EAB - \angle CBA = \angle CBA$. Zatem na mocy lematu 2.28 uzyskujemy równość $(A, E; C, D) = 1$. Jednakże $\angle EMA = 90°$, więc teza zadania wynika ponownie z lematu 2.28.

Rozwiązanie 2.56. Oczywiście proste CF i BE są prostymi biegunowymi punktów odpowiednio P i Q względem okręgu ω, więc proste prostopadłe poprowadzone z punktów P i Q do prostych CF i BE odpowiednio, przecinają się w punkcie I - środku okręgu ω. Łatwo zauważamy, że zachodzą równości $(A, B; F, P) = 1$ oraz $(A, C; E, Q) = 1$. Na mocy lematu 2.26 mamy zależności $NF^2 = NA \cdot NB$ oraz $ME^2 = MA \cdot MC$. Oznacza to, że punkty M i N mają jednakową potęge względem okręgów ω i o - opisanego na trójkącie ABC. Zatem prosta MN jest osią potęgową okręgów ω i o, czyli $MN \perp OI$ (O - środek okręgu o) - z czego oczywiście wynika teza zadania.

Rozwiązanie 2.57. Wystarczy pokazać, że warunek 1) jest implikowany przez pozostałe warunki.
2) i **3)** Wystarczy skorzystać z podobieństw: $\triangle ADE \sim \triangle ABE$, $\triangle EDC \sim \triangle EBC$, $\triangle ABF \sim \triangle BCF$ i $\triangle FAD \sim \triangle FDC$.
4) Teza wynika wprost z definicji symediany w trójkącie.
5) i **6)** Twierdzenie 1.9.
7) i **8)** Wykorzystaj twierdzenie Ptolemeusza oraz podobieństwa $\triangle ABD \sim \triangle MCD$ i $\triangle ADC \sim \triangle ABN$.

Literatura

[1] Ross Honsberger, *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*

[2] Roger A. Johnson, *Modern Geometry*

[3] Clark Kimberling, *Encyclopedia of Triangle Centers*

[4] Cosmin Pohoata, *Harmonic Division and its Applications*

[5] `http://matematyka.pl`

[6] `http://mathlinks.ro`